Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace euclidien

Dans tout ce chapitre, E sera un espace euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ des réels muni d'une forme bilinéaire définie positive de référence, appelée produit scalaire euclidien et notée $\langle \mid \rangle$. La forme quadratique associée est le carré de la norme euclidienne. On note la norme euclidienne $\| \ \|$. Une propriété fondamentale est *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\forall\, x, y \in E \qquad |\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
On suppose que E est de dimension finie n. On se donne alors une deuxième forme quadratique q, de forme polaire b. L'objet de ce chapitre est l'étude des propriétés métriques de q, c'est-à-dire des propriétés de q invariantes par le groupe orthogonal de E.

11. Définitions et propriété fondamentale

Un peu de topologie : E étant un espace vectoriel de *dimension finie*, toutes les normes sur E, en particulier la norme euclidienne, y définissent la même topologie. Pour cette topologie, la boule unité et la sphère unité $\mathbf{S}$ sont *compactes.*
Il s'ensuit que toute forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue. La norme de l'application linéaire f est la borne supérieure de f sur la sphère unité qui existe et est atteinte. De même l'application $b : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application bilinéaire continue : sa norme d'application bilinéaire est sa borne supérieure sur le produit $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ qui est compact. Par conséquent l'application

$$q : E \longrightarrow \mathbf{R}$$

est aussi continue puisque c'est la composée de l'application diagonale (toujours continue, le vérifier)

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

avec b.
Considérons alors la borne supérieure λ de l'application q sur $\mathbf{S}$ et l'ensemble des points $\mathbf{S}_\lambda$ où elle est atteinte. On vient de voir que $\mathbf{S}_\lambda$ contient au moins un point. On peut également considérer l'ensemble E_λ des vecteurs x de E qui vérifient l'égalité suivante

$$f(x) = \lambda \|x\|^2.$$

$\mathbf{S}_\lambda$ est l'intersection de E_λ avec $\mathbf{S}$.

Lemme 11.1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque et f une forme quadratique positive sur E de forme polaire ϕ. On a alors l'égalité*

$$\{x \in E \mid f(x) = 0\} = \ker f.$$

En particulier $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Si x est dans le noyau, $\phi(x, y)$ est nul pour tout y de E donc pour x et on a $f(x) = 0$.
Réciproquement, soit x tel que $f(x) = 0$. Pour y dans E on a, pour tout α réel :

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\alpha x + y) &= f(\alpha x) + f(y) + 2\phi(\alpha x, y) \\ &= f(y) + 2\alpha\phi(x, y). \end{aligned}$$

La fonction $\alpha \longmapsto f(y) + 2\alpha\phi(x, y)$ est une fonction affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui reste toujours positive ou nulle. La seule possibilité est que $\phi(x, y) = 0$. □

Exercice 11.2. Constater, sur l'exemple de la forme quadratique

$$\begin{array}{rcl} f : E = \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & k \\ x = (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x) = x_1 x_2 \end{array}$$

que l'ensemble des vecteurs x de E sur lesquels f s'annule (on les appelle *vecteurs isotropes* de f) n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Exercice 11.3. Montrer le lemme analogue pour une forme hermitienne positive sur un espace vectoriel complexe.

Une conséquence du lemme est que l'ensemble E_λ est un sous espace vectoriel de E, puisque c'est l'ensemble des vecteurs x de E sur lesquels la forme quadratique positive $f : x \mapsto \lambda\|x\|^2 - q(x)$ s'annule.
Un deuxième conséquence du lemme est la suivante : si y est orthogonal (pour le produit scalaire) à E_λ, alors $b(x, y) = 0$ pour tout vecteur $x \in E_\lambda$, autrement dit y est aussi q-orthogonal (ou b-orthogonal) à E_λ. En effet, la forme polaire de la forme quadratique positive f est la différence

$$\phi : (x, y) \longmapsto \lambda\langle x \mid y\rangle - b(x, y).$$

L'espace E_λ est le noyau de la forme f, autrement dit,

$$\forall\, x \in E_\lambda, \forall\, y \in E, \quad \lambda\langle x \mid y\rangle - b(x, y) = 0.$$

En particulier $b(x, y)$=0 pour $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\lambda^\perp$.

Exemple 11.3.1. Soit w un vecteur fixé non nul dans E. L'application $q : v \longmapsto |\langle w \mid v\rangle|^2$ est une forme quadratique positive sur E. Son noyau est l'hyperplan vectoriel $(w)^\perp$. Le maximum de cette forme quadratique sur $\mathbf{S}$ est la norme euclidienne de w.

Considérons un sous-espace vectoriel F de E et restriction q_F de la forme quadratique précédente à F. C'est donc une forme quadratique positive sur F. Son noyau est l'intersection $F \cap (w)^{\perp}$. Vérifier que le maximum de q sur la sphère unité $\mathbf{S}_F$ de F est égal au carré de la norme de la projection orthogonale de w sur F.

On en vient maintenant au théorème fondamental.

Théorème 11.4. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. Il existe des réels $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ et une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle q s'écrit*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ne dépendent que de q. On les appelle valeurs principales de la forme quadratique f. En particulier, λ_1 est la borne supérieure et λ_n la borne inférieure de q sur la sphère unité de E.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de l'espace E. Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire. Soit $n > 0$. Supposons que le problème est résolu pour tout espace euclidien de dimension strictement inférieure à n.
Compte tenu du lemme 11.1 et de ses conséquences, nous savons qu'il existe une décomposition de E en une somme directe de deux sous-espaces orthogonaux E_λ et $E_\lambda^{\perp}$ qui sont aussi q-orthogonaux. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de $E_\lambda^{\perp}$, dans laquelle la restriction de q a la forme voulue. En complétant cette base par une base orthonormée de E_λ, on obtient une base orthonormée de E qui remplit les conditions du théorème.
On remarque que l'on a utilisé fortement l'hypothèse E est de dimension finie : pour la compacité de $\mathbf{S}$ et l'existence de λ, pour l'existence d'un supplémentaire orthogonal, enfin dans la démonstration par récurrence. $\square$

Exercice 11.5. Formuler et montrer l'énoncé analogue pour une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe.

12. Réduction des matrices symétriques réelles sous le groupe orthogonal

Soit q une forme quadratique sur E et $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de q est A. Le théorème 11.4 affirme l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit P la matrice de passage. On obtient donc que ${}^tPAP$ est une matrice diagonale. Mais P est une matrice orthogonale, autrement dit ${}^tP = P^{-1}$, donc ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Une formulation matricielle, équivalente du théorème 11.4 est

Théorème 12.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une* matrice symétrique réelle. *Il existe alors une matrice orthogonale P de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.*

Exercice 12.2. Cet exercice fournit, entre autres choses, une autre démonstration des théorèmes 11.4 et 12.1 et de leurs analogues pour les formes hermitiennes.
On se donne un espace vectoriel hermitien E de dimension finie n sur $\mathbf{C}$ et un endomorphisme u de E. Dans *une base orthonormée* $\mathcal{B}_0$ de E la matrice de u est $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

a) Montrer (en prenant par exemple pour y les éléments d'une base orthonormée), qu'il existe un unique endomorphisme u^* défini par la formule

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle y \mid u^*(x) \rangle = \langle u(y) \mid x \rangle$$

On appelle u^* l'*endomorphisme adjoint* de u. Montrer que la matrice de u^* dans la base $\mathcal{B}_0$ est la matrice $A^* = \overline{{}^tA}$.

b) On dira qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est normal s'il commute avec son adjoint. Constater que c'est le cas si u est unitaire ($u^{-1} = u^*$) ou hermitien ($u = u^*$).
Soit λ une valeur propre de u (dites pourquoi il y en a toujours au moins une) et E_λ l'espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par u^*. En déduire que l'orthogonal $E_\lambda^{\perp}$ est stable par u.

c) Conclure, par récurrence sur la dimension de E, qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
En déduire l'analogue matriciel : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice qui commute avec son adjointe ($AA^* = A^*A$). Il existe alors une matrice unitaire $P \in \mathrm{U}_n(\mathbf{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.*

d) Remarquer qu'une matrice hermitienne (resp. unitaire) commute avec son adjointe. Montrer que les valeurs propres d'une matrice hermitienne (resp. unitaire) sont réelles (resp. de module 1). Examiner le cas particulier des matrices symétriques réelles (hermitiennes et à coefficients réels) et orthogonales (unitaires et à coefficients réels).

Corollaire 12.3. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une* base orthonormée *de E et A la matrice (symétrique) de q dans cette base. La trace de A est égale à la somme $\sum_{i=1}^{n} q(e_i)$. Elle est indépendante de la base orthonormée utilisée pour la calculer.*

Exemple 12.3.1. Reprenons l'exemple 11.3.1. La somme des valeurs de q_F sur les vecteurs d'une *base orthonormée* de F est le carré de la norme d'une projection orthogonale de w sur F. On constate qu'elle ne dépend pas de la base orthonormée.

Exemple 12.3.2. Considérons une forme quadratique q non dégénérée dans un espace euclidien de dimension 2 et l'ensemble C des vecteurs $x \in E$ tels que $|q(x)| = 1$. On appelle diamètre de C un couple de vecteurs $(x, -x)$ tels que $|q(x)| = |q(-x)| = 1$. Le corollaire dit que la somme des carrés des longueurs de 2 diamètres q-conjugués est constante.
C'est un théorème d'Apollonius. Combien vaut la constante si q est définie positive (C est alors une ellipse) ? si q est de signature $(1, 1)$ (C est alors la réunion de deux hyperboles) ?
Généraliser l'énoncé en dimension n.

Exercice 12.4 (Matrices de Gram). E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. Considérons un système $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ de p vecteurs de E et la matrice symétrique $G_{\mathcal{V}}$ dont les coefficients sont les $\langle v_i \mid v_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq p$. On l'appelle *matrice de Gram* du système $\mathcal{V}$.

a) Vérifier que $\det(G_{\mathcal{V}}) = 0$ si le système $\mathcal{V}$ est lié.

b) On suppose ici que $\mathcal{V}$ est un système libre. Constater que la matrice $G_{\mathcal{V}}$ est la matrice, dans la base $\mathcal{V}$, de la restriction du produit scalaire à $V = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.
En déduire qu'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ telle que $G_{\mathcal{V}} = {}^tPP$. Que représente la matrice P ? Montrer que le déterminant de $G_{\mathcal{V}}$ est un nombre positif non nul. Si $y = \sum_{i=1}^{p} y_i v_i$ est un vecteur de V on a donc, en notant Y la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{V}$

$$\|y\|^2 = {}^tY G_{\mathcal{V}} Y$$

Application : on prend $n = 3$ et $p = 2$. Montrer que le déterminant de la matrice de Gram d'un système de 2 vecteurs v_1, v_2 est égal au carré de la norme du produit vectoriel $v_1 \wedge v_2$ (l'orientation n'intervient pas).

c) On suppose toujours que $\mathcal{V}$ est un système libre. Soit x un vecteur de E. On considère la matrice $G_{\mathcal{V},x}$, matrice de Gram du système $(v_1, \dots, v_p, x)$. Montrer que x appartient à V si et seulement si $\det(G_{\mathcal{V},x}) = 0$.
On suppose maintenant que $x \notin V$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de V et P la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{B}$. Écrire la matrice de passage de $(v_1, \dots, v_p, x)$ à $(e_1, \dots, e_p, x)$ en fonction de P. Conclure que la quantité

$$\frac{\det(G_{\mathcal{V},x})}{\det(G_{\mathcal{V}})}$$

ne dépend pas de la base $(v_1, \dots, v_n)$ de V choisie pour la calculer. En la calculant dans une base orthonormée de V, conclure que, pour tout x de E,

$$\frac{\det(G_{\mathcal{V},x})}{\det(G_{\mathcal{V}})} = (d(x, V))^2 = \|x\|^2 - \|\mathrm{pr}_V(x)\|^2$$

où pr_V est la projection orthogonale sur V et $d(x, V)$ est la distance de x à V.

Exercice 12.5. On considère un espace euclidien de dimension finie 2 sur $\mathbf{R}$ et une forme quadratique q sur E de forme polaire b. On se donne une *base orthonormée* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la matrice A de q dans cette base orthonormée. On désigne par C l'ensemble des vecteurs x de E tels que $|q(x)| = 1$.

a) On considère deux vecteurs indépendants (v_1, v_2) qui sont q-conjugués, c'est-à-dire tels que $b(v_1, v_2) = 0$ et que $|q(v_1)| = |q(v_2)| = 1$. Calculer la matrice de q dans la base (v_1, v_2) et montrer que

$$|\det A| = \left|\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2)\right|^{-2}$$

où $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2)$ est le déterminant de la matrice des coordonnées des (v_1, v_2) dans la base orthonormée $\mathcal{B}$. On peut interpréter $|\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2)|$ comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs v_1, v_2, l'aire unité étant celle du carré construit sur les vecteurs e_1, e_2 de la base orthonormée.
On appelle parallélogramme construit sur un système de vecteurs (v_1, v_2) l'ensemble des vecteurs x de E qui s'écrivent :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

avec $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$.
En déduire que l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs q-conjugués est constante. C'est un autre théorème d'Apollonius (cf. 12.3.2). Combien vaut cette constante si q est définie positive (C est alors une ellipse) ? si q est de signature $(1, 1)$ (C est alors la réunion de deux hyperboles) ?

b) Remarquer que l'identité

$$q(x + h) - q(x) = 2b(x, h) + q(h)$$

valable pour tout x et tout h de E montre que l'application linéaire $h \longmapsto 2b(x, h)$ est la différentielle de q en x. En effet, $|q(h)| \leq |\lambda| \, \|h\|^2$ où $|\lambda|$ est la borne supérieure de $|q|$ sur $\mathbf{S}$, *i.e.* le plus grand module des valeurs principales de q. Donc $q(h)$ est un $o(h)$ au voisinage de $h = 0$. Calculer un vecteur directeur de la tangente en x à C. En déduire que deux vecteurs x et y sont q-conjugués si et seulement si la tangente à C en x est dirigée par y.

c) Généraliser à la dimension n.