

## Espaces de Hilbert

### 13. DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Dans tout ce chapitre,  $E$  sera un espace vectoriel sur le corps  $\mathbf{C}$  des complexes muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive de référence, appelée produit scalaire hermitien et notée  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . La forme hermitienne associée est le carré de la norme hermitienne. On note la norme hermitienne  $\| \cdot \|$ . Une propriété fondamentale est l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires. Cette inégalité implique l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un tel espace  $E$  est dit préhilbertien complexe. La norme hermitienne définit une topologie d'espace vectoriel normé sur  $E$ . Attention ! lorsque  $E$  n'est pas de dimension finie, deux normes ne définissent pas nécessairement la même topologie. Sauf mention du contraire, nous considérerons toujours la topologie associée à la norme hermitienne.

Comme sur tout espace vectoriel normé, une application linéaire est continue (pour la topologie définie par la norme) si et seulement si elle a une norme en tant qu'opérateur linéaire, autrement dit si elle est bornée sur la boule unité. En particulier, une forme linéaire  $f$  est continue s'il existe un réel positif  $\lambda$  tel que, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $|f(x)| \leq \lambda \|x\|$ . L'ensemble des forme linéaires continues sur  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  noté  $E'$  et appelé dual topologique de  $E$ .

Tous les énoncés restent valables, *mutatis mutandis*, dans un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  muni d'un produit scalaire euclidien.

EXERCICE 13.1.  $x$  et  $y$  étant deux vecteurs de  $E$ , on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto \|\lambda x + \mu y\|^2. \end{aligned}$$

a) Montrer que c'est une forme hermitienne positive sur  $\mathbf{C}^2$ , définie positive si et seulement si  $x$  et  $y$  ne sont pas colinéaires. Calculer sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique de  $\mathbf{C}^2$ . Calculer le déterminant de cette matrice.

b) Montrer que le déterminant de la matrice d'une forme hermitienne positive est un nombre réel positif, nul si et seulement si la forme n'est pas définie.

Déduire alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Définition 13.2.** On se donne une famille  $(e_i, i \in I)$  de vecteurs de  $E$  indexés par un ensemble  $I$ . On dit que la famille est orthonormale si ses vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.

Constater qu'une famille orthonormale est libre.

On note  $\text{Vect}(e_i, i \in I)$  le sous-espace vectoriel engendré. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients complexes de vecteurs de la famille.

**Définition 13.3.** On dit que la famille  $(e_i, i \in I)$  est totale si l'espace vectoriel engendré  $\text{Vect}(e_i, i \in I)$  est dense dans  $E$ .

Supposons la famille  $(e_i, i \in I)$  totale : pour tout  $x$  de  $E$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe une combinaison linéaire finie  $\sum_J \alpha_j e_j$  telle que

$$\|x - \sum_J \alpha_j e_j\| < \epsilon.$$

**Exemple 13.3.1.** Considérons l'espace vectoriel  $\ell^2(\mathbf{C})$  des suites de complexes de carré sommable, muni du produit scalaire hermitien

$$\langle x | y \rangle := \sum_{n \geq 0} \bar{x}_n y_n.$$

C'est un espace préhilbertien complexe (pour la preuve, s'inspirer de 8.2).

Pour  $i$  entier, on définit  $e^i$  comme la suite dont tous les termes sont nuls, excepté le  $i$ -ème qui vaut 1. La famille  $(e^i, i \in \mathbf{N})$  est une famille orthonormale et totale. Vérifier la première assertion ; pour vérifier la deuxième, on se donne une suite  $u$  de complexes de carré sommable et un réel  $\epsilon$ . Il existe un entier  $N$  tel que

$$\sum_{n > N} |u_n|^2 < \epsilon^2,$$

ce qui signifie que

$$\|u - \sum_{i=0}^N u_i e^i\| < \epsilon.$$

EXERCICE 13.4. Considérons l'espace vectoriel  $E$  des fonctions continues, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, périodiques de période  $2\pi$  sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs complexes, muni du produit scalaire hermitien

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

a) Vérifier que c'est un espace préhilbertien complexe.

b) Pour  $n$  entier relatif, on considère la fonction de  $E$

$$t \mapsto \exp(int).$$

Montrer que la famille  $(\exp(int), n \in \mathbf{Z})$  est une famille orthonormale de  $E$ .

b) Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . Pour une fonction  $f \in E$ , le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  est le produit scalaire

$$c_n(f) := \langle \exp(int) | f \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int) f(t) dt.$$

Le théorème de Dirichlet affirme que la série de Fourier d'une fonction de  $E$  converge uniformément vers la fonction, c'est-à-dire : pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un entier  $N$  tel que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n(f) \exp(int)| < \epsilon.$$

En déduire que la famille  $(\exp(int), n \in \mathbf{Z})$  est une famille totale dans  $E$ .

d) Si  $f \in E$  est à valeurs réelles, montrer que  $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ . Pour  $n \geq 0$ , on définit donc les coefficients de Fourier réels  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  par  $a_0(f) = c_0(f)$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2\Re(c_n(f)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) f(t) dt, \\ b_n(f) &= -2\Im(c_n(f)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) f(t) dt, \end{aligned}$$

en sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n(f) \exp(int) &= \\ a_0(f) + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)). \end{aligned}$$

En déduire que l'espace  $E_{\mathbf{R}}$  des fonctions de  $E$  à valeurs réelles, est un espace préhilbertien réel et que la famille

$$(1, \cos(nt), \sin(nt), n \geq 1)$$

est orthogonale et totale dans  $E_{\mathbf{R}}$  (noter que  $\cos(nt)$  et  $\sin(nt)$  sont de norme  $1/\sqrt{2}$ ).

e) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  de  $E$  qui est paire et qui coïncide avec  $t \mapsto (1 - \frac{t}{\pi})$  sur  $[0, \pi]$ .

#### 14. PROJECTION ORTHOGONALE

14.1. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'orthogonal de  $F$  pour le produit scalaire hermitien est un sous-espace vectoriel de  $E$  et l'intersection  $F \cap F^\perp$  est réduite à  $\{0\}$  (le vérifier). Cependant, lorsque  $E$  n'est pas de dimension finie, il n'est pas vrai, en général, que la somme  $F + F^\perp$  soit égale à  $E$ , autrement dit que  $F^\perp$  soit un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

**Exemple 14.1.1.** Dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ , considérons le sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(e^i, i \in \mathbf{N})$  engendré par la famille orthonormale  $(e^i, i \in \mathbf{N})$ . Soit  $u$  un élément de  $\ell^2(\mathbf{C})$  orthogonal à  $F$ . Pour tout  $i$  entier, on a donc

$$0 = \langle e^i | u \rangle = u_i,$$

ce qui prouve que  $F^\perp = \{0\}$ .

Constater que  $F$  est l'ensemble des suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On voit donc que  $F \subsetneq E$ .

Il y a un cas où le supplémentaire orthogonal existe toujours. C'est celui où le sous-espace vectoriel  $F$  est une droite vectorielle de  $E$  engendré par un vecteur non nul  $a$  que l'on peut supposer de norme 1. L'orthogonal de  $F = \text{Vect}(a)$  est le noyau de la forme linéaire (continue !)

$$\langle a | : x \mapsto \langle a | x \rangle$$

C'est un hyperplan de  $E$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit

$$x = \langle a | x \rangle a + (x - \langle a | x \rangle a)$$

et on vérifie que  $(x - \langle a | x \rangle a)$  est dans  $F^\perp$ . On a bien  $E = F \oplus F^\perp$ .

**Proposition 14.2.** Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . L'orthogonal  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$ .

Si  $(e_1, \dots, e_\ell)$  est une base orthonormée de  $F$ , la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  s'écrit

$$\pi_F(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \langle e_j | x \rangle e_j.$$

La différence  $x - \pi_F(x)$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F^\perp$ .

*Démonstration.* On construit, par le procédé de Gram-Schmidt, une base orthonormée finie  $(e_1, \dots, e_\ell)$  de  $F$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  on a donc, en posant  $x' = \sum_{j=1}^{\ell} \langle e_j | x \rangle e_j$ ,

$$x = x' + (x - x').$$

$x'$  est un vecteur de  $F$ ; d'autre part, les produits scalaires  $\langle e_j | x - x' \rangle$  sont tous nuls, ce qui prouve que  $x - x'$  est dans  $F^\perp$ . La somme  $F + F^\perp$  est égale à  $E$ .  $\square$

Supposons que  $E = F \oplus F^\perp$ ; on dit alors que  $F$  a un supplémentaire orthogonal. Tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique en

$$x = \pi_F(x) + \pi_{F^\perp}(x).$$

$\pi_F$  et  $\pi_{F^\perp}$  sont les deux projections orthogonales sur  $F$  et  $F^\perp$ . En calculant la norme de  $x$  on trouve

$$\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|\pi_{F^\perp}(x)\|^2,$$

qui est l'énoncé du théorème de Pythagore. On en déduit que, pour tout  $y$  de  $F$ ,

$$\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|$$

puisque  $x - \pi_F(x)$  et  $x - y$  ont même projection orthogonale sur  $F^\perp$ . C'est une *propriété caractéristique* importante de la projection orthogonale :

**Théorème 14.3** (Propriété caractéristique de la projection orthogonale). *Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel admettant un supplémentaire orthogonal dans  $E$ . Pour tout  $x$  de  $E$  la projection orthogonale  $\pi_F(x)$  de  $x$  sur  $F$  est l'unique vecteur de  $F$  où la fonction*

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ y &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

*atteint son minimum.*

#### 14.4. Familles sommables.

**Définition 14.5.** *On se donne un espace vectoriel normé  $E$  et une famille  $(x_i, i \in I)$  d'éléments de  $E$ . On dit que la famille est sommable dans  $E$  de somme  $\Sigma$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble fini  $J_0 \subset I$  tel que, pour tout ensemble fini  $J \supset J_0$ ,*

$$\|\Sigma - \sum_{i \in J} x_i\| < \epsilon.$$

*Si la famille est sommable, on note sa somme  $\sum_{i \in I} x_i$ .*

Noter que dans la définition de *famille sommable*, aucune notion d'ordre sur les éléments de  $I$  n'est requise.

Constater qu'une *famille de réels positifs*  $(x_i, i \in I)$  est sommable si et seulement si la famille des sommes partielles finies  $(\sum_{i \in J} x_i, J \subset I)$  est majorée. La somme est alors la borne supérieure de la famille des sommes finies. Montrer qu'une *famille de complexes*  $(z_n, n \in \mathbf{Z})$  est sommable si et seulement si les deux séries  $\sum_{n \geq 0} z_n$  et  $\sum_{n > 0} z_{-n}$  sont toutes les deux absolument convergentes.

**14.6. Inégalité de Bessel.** Considérons une famille orthonormale  $(e_i, i \in I)$  dans  $E$ . On se donne un vecteur  $x$  de  $E$ . Soit  $J$  un sous-ensemble fini de  $I$  et  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$  le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par la famille finie  $(e_i, i \in J)$ . Comme la projection de  $x$  sur  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$  est égale à  $\sum_{i \in J} \langle e_i | x \rangle e_i$ , du théorème de Pythagore on déduit l'inégalité

$$\sum_{i \in J} |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La famille de réels positifs  $(|\langle e_i | x \rangle|^2, i \in I)$  est donc sommable de somme majorée par  $\|x\|^2$ , ce qui s'écrit

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

C'est l'inégalité de Bessel.

**Théorème 14.7.** *Soit  $E$  un espace préhilbertien et une famille orthonormale  $(e_i, i \in I)$  de vecteurs de  $E$ .*

*Pour tout  $x$  de  $E$ , la famille de complexes  $(\langle e_i | x \rangle, i \in I)$  est de carré sommable et on a l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**14.8. Égalité de Parseval.** Considérons maintenant le sous-espace vectoriel  $F$ , adhérence dans  $E$  de l'espace vectoriel engendré par la famille orthonormale  $(e_i, i \in I)$ . Par construction, la famille  $(e_i, i \in I)$  est orthonormale et totale dans  $F$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $F$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble fini  $J_0 \subset I$  et une combinaison linéaire  $\sum_{i \in J_0} \alpha_i e_i$  telle que

$$\|x - \sum_{i \in J} \alpha_i e_i\| < \epsilon.$$

Dit autrement, il existe un élément  $y_{J_0} = \sum_{i \in J_0} \alpha_i e_i$  de  $\text{Vect}(e_i, i \in J_0)$ , sous-espace vectoriel de dimension finie, tel que

$$\|x - y_{J_0}\| < \epsilon.$$

D'après la propriété caractéristique de la projection orthogonale  $\pi_{J_0}$  sur  $\text{Vect}(e_i, i \in J_0)$ , on a également :

$$\|x - \pi_{J_0}(x)\| \leq \|x - y_{J_0}\| < \epsilon.$$

Toujours d'après la propriété caractéristique, mais cette fois de la projection  $\pi_J$ , on a, pour toute partie finie  $J \supset J_0$  :

$$\|x - \pi_J(x)\| \leq \|x - \pi_{J_0}(x)\|.$$

Mais, puisque  $(e_i, i \in J)$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$ , on a  $\pi_J(x) = \sum_{i \in J} \langle e_i | x \rangle e_i$ . En résumé, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble fini  $J_0 \subset I$  tel que, pour tout ensemble fini  $J \supset J_0$ ,

$$\left\| x - \sum_{i \in J} \langle e_i | x \rangle e_i \right\| < \epsilon.$$

Ceci exprime exactement le fait que la famille de vecteurs  $(\langle e_i | x \rangle e_i, i \in I)$  est *sommable dans  $F$*  de somme  $x$ .

De plus, comme la famille  $(e_i, i \in J)$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$ , on a

$$\|\pi_J(x)\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle e_i | x \rangle|^2.$$

Du théorème de Pythagore on déduit la formule

$$\|x\|^2 - \|\pi_J(x)\|^2 = \|x - \pi_J(x)\|^2 < \epsilon^2.$$

La famille de complexes  $(\langle e_i | x \rangle, i \in I)$  est de carré sommable et

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Réciproquement, considérons un vecteur  $x$  de  $E$  : on a l'inégalité de Bessel. Si c'est une égalité, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ensemble fini  $J \subset I$  tel que

$$\|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\langle e_i | x \rangle|^2 < \epsilon.$$

Mais  $\sum_{i \in J} |\langle e_i | x \rangle|^2$  est le carré de la norme de la projection orthogonale  $\pi_J(x)$  de  $x$  sur  $\text{Vect}(e_i, i \in J)$ . D'après le théorème de Pythagore

$$\|x - \pi_J(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi_J(x)\|^2 < \epsilon.$$

On conclut que  $x$  est dans  $F$ , adhérence du sous-espace vectoriel engendré  $\text{Vect}(e_i, i \in I)$ .

Si maintenant  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de  $F$ , le produit scalaire  $\langle x | y \rangle$  s'exprime à l'aide des normes de  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $x + iy$ ,  $x - iy$ . Par ailleurs, le module est une norme hermitienne sur  $\mathbf{C}$ , il vérifie donc des identités similaires. On déduit donc, à partir de l'égalité de Parseval :

$$\sum_{i \in I} \overline{\langle e_i | x \rangle} \langle e_i | y \rangle = \langle x | y \rangle.$$

On a donc montré

**Théorème 14.9** (Bessel-Parseval). *Soit  $E$  un espace préhilbertien et une famille orthonormale  $(e_i, i \in I)$  de vecteurs de  $E$ . On désigne par  $F$  l'adhérence dans  $E$  de l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_i, i \in I)$ .*

a) *Pour tout  $x$  de  $F$ , la famille  $(\langle e_i | x \rangle e_i, i \in I)$  de vecteurs de  $E$  est sommable dans  $F$  de somme  $x$ , ce qui signifie : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un sous-ensemble fini  $J \subset I$  tel que*

$$\left\| x - \sum_{i \in J} \langle e_i | x \rangle e_i \right\| < \epsilon.$$

*La famille de complexes  $(\langle e_i | x \rangle, i \in I)$  est de carré sommable et on a l'égalité de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2.$$

b) *Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $F$ , la famille de complexes  $(\overline{\langle e_i | x \rangle} \langle e_i | y \rangle, i \in I)$  est sommable et on a :*

$$\sum_{i \in I} \overline{\langle e_i | x \rangle} \langle e_i | y \rangle = \langle x | y \rangle.$$

c) *Pour tout  $x$  de  $E$ , la famille de complexes  $(\langle e_i | x \rangle, i \in I)$  est de carré sommable et on a l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

*avec égalité si et seulement si  $x$  est dans  $F$ .*

**Exemple 14.9.1.** Une conséquence du théorème de Dirichlet, voir exercice 13.4, est que la famille  $(\exp(int), n \in \mathbf{Z})$  est totale dans l'espace  $E$  des fonctions continues, de classe  $C^1$  par morceaux, périodiques de période  $2\pi$ , à valeurs complexes.

Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . Pour une telle fonction  $f \in E$ , le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  est le produit scalaire

$$c_n(f) := \langle \exp(int) | f \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int) f(t) dt.$$

Pour cet exemple, le théorème de Bessel-Parseval affirme que la famille  $(c_n(f) \exp(int), n \in \mathbf{Z})$  est sommable dans

$E$ , de somme  $f$ . On dit que la série de Fourier *converge en moyenne quadratique* vers  $f$ . Comparer avec l'énoncé du théorème de Dirichlet.

La famille de complexes  $(c_n(f), n \in \mathbf{Z})$  est de carré sommable et l'égalité de Parseval se traduit par :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2.$$

**EXERCICE 14.10.** Reprendre la fonction de l'exercice 13.4.(e). Dédurre de l'égalité de Parseval la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

## 15. ESPACES DE HILBERT

Dans un espace préhilbertien  $E$ , on n'a pas, en général, de critère qui permette de dire qu'une suite ou une série est convergente dans  $E$ .

**Exemple 15.0.1.** Considérons à nouveau l'espace  $E := \mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  avec son produit scalaire hermitien. Donnons-nous une famille  $(c_n, n \in \mathbf{N})$  de complexes de carré sommable. On a la relation suivante

$$\left\| \sum_{n=p}^{p+q} c_n e^{int} \right\|^2 = \sum_{n=p}^{p+q} |c_n|^2$$

qui montre que la série  $\sum_{n \geq 0} c_n e^{int}$  est de Cauchy dans  $E$  pour la distance induite par la norme hermitienne. Mais il existe, dans l'espace  $E$ , des séries de Cauchy qui ne convergent pas vers un élément de  $E$ , autrement dit,  $E$  n'est pas complet pour la distance induite par la norme hermitienne.

**Définition 15.1.** *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.*

On rappelle qu'un espace métrique  $E$  est *complet* lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de  $E$  converge dans  $E$ . Un sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

**Exemple 15.1.1.** L'espace  $\ell^2(\mathbf{C})$  est complet. Considérons une suite de Cauchy  $(u^n, n \in \mathbf{N})$  d'éléments de  $\ell^2(\mathbf{C})$ . Ceci signifie que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour  $p > N$  et  $q > 0$ ,

$$\|u^p - u^{p+q}\| < \epsilon.$$

Comme  $\|u^p - u^{p+q}\|^2 = \sum_{i \in \mathbf{N}} |u_i^p - u_i^{p+q}|^2$ , on en déduit que, pour tout entier  $i$ ,

$$|u_i^p - u_i^{p+q}| < \epsilon.$$

En résumé, pour tout entier  $i$ , la suite de complexes  $(u_i^n, n \in \mathbf{N})$  est de Cauchy donc converge vers une limite  $u_i \in \mathbf{C}$ . Considérons alors la suite de complexes  $u := (u_i, i \in \mathbf{N})$ .

Comme la suite  $(u^n, n \in \mathbf{N})$  est une suite de Cauchy de  $\ell^2(\mathbf{C})$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour  $p > N$ ,  $q > 0$  et tout entier  $m$

$$\sum_{n=0}^m |u_n^p - u_n^{p+q}|^2 \leq \|u^p - u^{p+q}\|^2 < \epsilon^2.$$

En passant à la limite quand  $q \rightarrow \infty$ , on obtient, pour  $p > N$  et tout entier  $m$

$$\sum_{n=0}^m |u_n^p - u_n|^2 \leq \epsilon^2,$$

ce qui prouve que  $u^p - u$  est de carré sommable, donc dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ , que  $u = u^p - (u^p - u)$  est aussi dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ , enfin que  $\|u^p - u\| \leq \epsilon$  pour  $p > N$ . On a donc finalement que  $(u^n, n \in \mathbf{N})$  converge dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ .

Un sous-ensemble  $F$  d'un espace vectoriel réel ou complexe  $E$  est dit *convexe* si pour tous  $x$  et  $y$  de  $F$  et tout nombre réel  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , le vecteur  $(1-t)x + ty$  appartient à  $F$ . Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel ou complexe est convexe.

**Théorème 15.2.** *Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-ensemble non vide convexe et complet de  $E$ . Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . Il existe un unique élément  $x'$  de  $F$  tel que,*

$$\forall y \in F \quad \|x - x'\| \leq \|x - y\|.$$

*On appellera  $x'$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ . Cette projection orthogonale est également caractérisée par la propriété suivante :*

$$\forall y \in F \quad \Re(\langle x - x' | y - x' \rangle) < 0.$$

*Démonstration.*  $x$  étant donné dans  $E$ , la fonction  $y \mapsto \|x - y\|$ , définie sur  $F$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  est minorée par 0. Soit  $d \geq 0$  sa borne inférieure. L'assertion du théorème équivaut à :  $d$  est atteinte en un unique point de  $F$ . Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $F$  et  $c$  leur demi-somme. En notant que  $a = c + \frac{1}{2}(a - b)$  et  $b = c - \frac{1}{2}(a - b)$ , montrer l'identité du parallélogramme :

$$\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2 = 2\|x - c\|^2 + \frac{1}{2}\|a - b\|^2.$$

Comme  $F$  est convexe, le vecteur  $c = \frac{1}{2}(a + b)$  est aussi dans  $F$ . On a donc  $\|x - c\| \geq d$  et l'inégalité

$$(*) \quad \|a - b\|^2 \leq 2\|x - a\|^2 + 2\|x - b\|^2 - 4d^2.$$

Unicité : supposons que  $a$  et  $b$  sont deux points de  $F$  tels que  $\|x - a\| = \|x - b\| = d$ . De l'inégalité (\*) on déduit  $a = b$ .

Existence : Comme  $d$  est la borne inférieure de la fonction  $y \mapsto \|x - y\|$ , pour tout  $n$  entier positif, il existe un élément  $y_n \in F$  tel que

$$d \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Pour  $p > 0$  et  $q > 0$  entiers, on a donc, toujours d'après l'inégalité (\*) :

$$\begin{aligned} \|y_p - y_{p+q}\|^2 &\leq 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_{p+q}\|^2 - 4d^2 \\ &\leq 2(d + \frac{1}{p})^2 + 2(d + \frac{1}{p+q})^2 - 4d^2 \\ &= 4d(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+q}) + 2(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+q)^2}) \\ &\leq \frac{2d}{p} + \frac{4}{p^2} \leq \frac{1}{p}(2d + 4). \end{aligned}$$

La suite  $(y_n, n \geq 1)$  est donc une suite de Cauchy de  $F$ . Elle converge donc vers un point  $x'$  de  $F$ . Comme la fonction  $y \mapsto \|x - y\|$  est continue, on a  $\|x - x'\| = d$ .

Montrons la seconde partie du théorème. Comme  $F$  est convexe, si  $x'$  et  $y$  sont deux éléments de  $F$ ,  $(1-t)x' + ty$  est aussi dans  $F$  pour tout réel  $t$ ,  $0 < t \leq 1$ . Calculons le signe de la différence

$$\begin{aligned} \|x - ((1-t)x' + ty)\|^2 - \|x - x'\|^2 \\ = \|x - x' - t(y - x')\|^2 - \|x - x'\|^2. \end{aligned}$$

En développant et en divisant par  $t$ , c'est celui de

$$-2\Re(\langle x - x' | y - x' \rangle) + t\|y - x'\|^2.$$

Le vecteur  $x'$  est la projection orthogonale si et seulement si cette fonction affine est positive ou nulle pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$\Re(\langle x - x' | y - x' \rangle) \leq 0.$$

□

**Théorème 15.3.** *Soit  $E$  un espace préhilbertien. Tout sous-espace vectoriel complet de  $E$  a un supplémentaire orthogonal dans  $E$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ . Il est donc à la fois convexe et complet. Soit  $x \in E$ . Le théorème précédent montre qu'il a une projection orthogonale sur  $F$  que nous notons  $x'$ . De plus, pour tout vecteur  $y$  de  $F$ ,  $y + x'$  est aussi dans  $F$  et on a :

$$\Re(\langle x - x' | y \rangle) \leq 0.$$

Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , il est stable par multiplication par  $-1$ . On en déduit que  $\Re(\langle x - x' | y \rangle) = 0$ , pour tout  $y$  de  $F$ . Il est aussi stable par multiplication par  $i$  : on en déduit que  $\langle x - x' | y \rangle = 0$ , pour tout  $y$  de  $F$ , ce qui caractérise  $x'$ .

On vient de prouver que tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit

$$x = x' + (x - x')$$

avec  $x' \in F$  et  $(x - x') \in F^\perp$  ce qui montre que  $E = F \oplus F^\perp$  puisqu'on a toujours  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . □

**Corollaire 15.4.** Soit  $E$  un espace de Hilbert. Tout sous-espace vectoriel fermé de  $E$  a un supplémentaire orthogonal dans  $E$ .

**Corollaire 15.5.** Soit  $E$  un espace de Hilbert. La famille de vecteurs  $(e_i, i \in I)$  est totale si et seulement si le seul vecteur de  $E$  orthogonal à tous les vecteurs de la famille est le vecteur nul.

*Démonstration.* Désignons par  $F$  l'adhérence dans  $E$  de l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_i, i \in I)$ . Il a un supplémentaire orthogonal  $F^\perp$ . La famille est totale si et seulement si  $F = E$ , c'est-à-dire si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .  $\square$

On appelle *base hilbertienne* une famille orthonormale et totale dans un espace de Hilbert.

**Exemple 15.5.1.** L'espace  $L^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  des classes de fonctions  $2\pi$ -périodiques, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , est un espace de Hilbert. Une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass est que la famille des  $(\exp(int), n \in \mathbf{Z})$  en est une base hilbertienne.

**EXERCICE 15.6.** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  de  $E$  qui est impaire et qui est constante égale à 1 sur  $]0, \pi[$ .

Déduire de l'égalité de Parseval la valeur de la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .

**Corollaire 15.7.** Soit  $E$  un espace de Hilbert. Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une famille orthonormale et totale dans  $E$ . Tout espace de Hilbert a donc au moins une base hilbertienne.

*Démonstration.* La preuve de ce corollaire repose sur le lemme de Zorn. On dit qu'une famille orthonormale est maximale si la seule famille orthonormale qui la contient est elle-même. Une famille orthonormale maximale dans un espace de Hilbert est totale : en effet, désignons par  $F$  l'adhérence dans  $E$  de l'espace vectoriel qu'elle engendre. Si  $F \subsetneq E$ , le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$  a au moins un vecteur de norme 1 que l'on peut ajouter à la famille pour contredire sa maximalité.

Il reste à prouver l'existence de telles familles maximales : c'est justement ce que fait le lemme de Zorn.  $\square$

Attention! une base hilbertienne n'est pas une base! L'exemple suivant le montre.

**Exemple 15.7.1.** Dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ , la famille  $(e^i, i \in I)$  est orthonormale et totale. C'est une base hilbertienne de  $\ell^2(\mathbf{C})$ .

Considérons maintenant la suite  $(e^i, i \in \mathbf{N})$  dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ . Pour tout  $j \in \mathbf{N}$ , la suite de complexes  $(\langle e^j | e^i \rangle, i \in \mathbf{N})$  converge vers 0. Autrement dit, les "coordonnées" de  $e^j$  sur la base hilbertienne tendent toutes vers 0 quand  $i \rightarrow \infty$ . Cependant, pour tout  $i \in \mathbf{N}$ ,  $\|e_i\| = 1$ . Donc la suite  $(e^i, i \in \mathbf{N})$  ne tend pas vers 0 dans  $\ell^2(\mathbf{C})$ .

**EXERCICE 15.8.** Dans un espace de Hilbert  $E$ , on considère un vecteur  $x$  et une suite de vecteurs  $(x_n, n \in \mathbf{N})$  tels que

$$(1) \|x_n\| \rightarrow \|x\| \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

$$(2) \forall a \in E \quad \langle a | x_n \rangle \rightarrow \langle a | x \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

a) Calculer  $\|x_n - x\|$  et en déduire que  $x_n \rightarrow x$  dans  $E$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

b) On considère une base hilbertienne  $(e_i, i \in I)$  de  $E$ . Montrer que les hypothèses (1) et (2) équivalent à

$$(1) \|x_n\| \rightarrow \|x\| \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

$$(2') \forall i \in I \quad \langle e_i | x_n \rangle \rightarrow \langle e_i | x \rangle \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**Corollaire 15.9.** Soit  $E$  un espace de Hilbert et  $E'$  son dual topologique. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E' \\ x &\longmapsto \langle x | \end{aligned}$$

qui à un vecteur  $x$  associe la forme linéaire "produit scalaire par  $x$ " est une application anti-linéaire bijective.

*Démonstration.* L'application  $\Phi$  est anti-linéaire et injective (9.2). Reste à montrer qu'elle est surjective. Pour cela, considérons une forme linéaire continue non nulle  $f \in E'$  et son noyau  $F = \ker f$ . Comme  $f$  est continue, c'est un sous-espace fermé de  $E$ . Il a donc un supplémentaire orthogonal  $F^\perp$ . L'application  $f$ , de rang 1, induit un isomorphisme de  $F^\perp$  sur  $\mathbf{C}$ , donc  $F^\perp$  est une droite vectorielle.

Choisissons un vecteur  $x$  de norme 1 dans  $F^\perp$ . On a alors  $f = f(x)\langle x |$ . En effet, tout vecteur  $y$  de  $E$  se décompose en  $y' + \lambda x$  avec  $y'$  dans  $F$ , et

$$f(y) = f(y' + \lambda x) = \lambda f(x)$$

tandis que

$$\langle x | y \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda.$$

$\square$

**EXERCICE 15.10.** Soit  $I$  un ensemble.

a) Montrer que l'espace  $\ell^2(I, \mathbf{C})$  des familles de complexes indexées par  $I$  (autrement dit des applications de  $I$  dans  $\mathbf{C}$ ) qui sont de carré sommable peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert complexe.

b) Soit  $E$  un espace de Hilbert et une famille orthonormale et totale  $(e_i, i \in I)$  de vecteurs de  $E$ . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow \ell^2(I, \mathbf{C}) \\ x &\longmapsto (\langle e_i | x \rangle, i \in I) \end{aligned}$$

est une application linéaire bijective qui conserve le produit scalaire.