Compacité

« On veut généraliser la notion d'intervalle borné »

1. Définition (séquentielle) d'un compact

Soit E un e.v.n (ou plus généralement un espace métrique).

Soit $K \subset E$. L'ensemble K est compact si de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un point de K.

Remarque : un compact est fermé

Exercice : (x_n) admet une sous-suite convergente vers z
[par définition ; $\exists \varphi$ croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \to z$]

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \, \forall n_0, \exists p > n_0 \, ; \; \| x_p - z \| \leqslant \varepsilon$$

Proposition : Soit K compact et F fermé $\subset K$
Alors F est compact

Théorème [admis] [à voir en mesure et topologie]
les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

2. Fonction continue sur un compact

Théorème . Soit K un compact et f continue $K \to E$
Alors $f(K)$ est compact

Corollaire : l'image d'un compact est borné
de plus soit f : continue $K \to \mathbb{R}$
alors il existe $x \in K$ tel que $\forall y \in K$
$f(x) \geqslant f(y)$

◀ Preuve théorème. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tq $z_n \in f(K)$; alors $z_n = f(y_n)$
avec $y_n \in K$. On choisit une sous suite $y_{\varphi(n)}$ convergente vers y
en particulier $f(y_{\varphi(n)}) = z_{\varphi(n)} \to f(y)$ par continuité de f ▶

Theorème : Soit K compact, f continue et bijective de $K \to E$. Alors
f^{-1} est continue de $f(K) \to K$; autrement dit f est un
homéomorphisme

◀ Soit F fermé de K et $g = f^{-1} : f(K) \to K$
Alors $g^{-1}(K) = f(K)$ est compact donc fermé. Ainsi g est continue ▶

2. Application a l'equivalence des normes en dimension finie

Théorème : Soit E de dimension finie, alors toutes les
normes sur E sont équivalentes.

Nous esquissons seulement la preuve. A l'aide d'une base identifions
E à $\mathbb{R}^p$ et munissons le de la norme $\| \ \|_\infty$

⓪ $\|x_n - y\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow \forall i \ \ x_n^i \to y_n$, ou $z = (z^1, \dots, z^p)$

① $B_0^\infty(1) = \{x \mid \|x\|_\infty \leqslant 1\}$ est compact

② $\mathrm{Id} : B_0^\infty(1) \longrightarrow (E, \| \ \|)$ est continue

③ $S_0^\infty(1) = \{x \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est compact

④ il existe a et b tel que $\forall x \in S_0^\infty(1) \quad 0 < a \leqslant \|x\| < b$.

⑤ $a\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant b \cdot \|x\|_\infty$ ▶

4. Espaces vectoriels de dimension finie

Toutes les normes sont equivalents ; la notion de convergence ne depend pas du choix de la norme

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et ecrivons $x = \sum_{i=1}^{p} x^i e_i$

$$x_n \to y \Leftrightarrow \forall i \quad x_n^i \to y^i.$$

Théorème : Soit $(E, \| \|_E)$ de dimension finie, et $(F, \| \|_F)$. Alors toute application linéaire de $E \to F$ est continue

◀ On a vu que le théorème est vrai pour $\| \|_E = \| \|_\infty$. le résultat général suit de l'équivalence des normes en dimension finie ▶

5- Uniforme continuité.

Une application $f : U \subset E \to F$ est **uniformément continue** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in U, \|x-y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Théorème [Heine]

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue

Complétude

1. Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé est **une suite de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, p \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_p\| \leq \varepsilon$

Ex : une suite convegente est de Cauchy

Il existe des suits de Cauchy non convegentes dans un espace métrique.

Ex soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels convegeant vers $x \notin \mathbb{Q}$

Alors (x_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ non convergente (dans $\mathbb{Q}$)

Un e.v.n E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

rque soit $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$ normés ; si $\| \|_1 \sim \| \|_2$

Alors $(E, \| \|_1)$ complet $\Leftrightarrow (E, \| \|_2)$ complet

Théorème (admis) $\mathbb{R}$ est complet

En fait c'est la définition de $\mathbb{R}$!

Théorème : Soit K un compact ; F un e.v.n complet et $C^0(K, F)$ muni de la norme

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$; alors $(C^0(K,F), \| \|_\infty)$ est complet.

▲ Pour tout x, si f_n est une suite de Cauchy alors $f_n(x)$ est une suite de Cauchy.

Posons alors $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x) - f_n(x)\|$$

On choisit n_0 tel que $n, p \geqslant n_0 \Rightarrow \|f_n - f_p\| \leqslant \varepsilon$

Alors $\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon + \|f(x) - f_p(x)\| \quad \forall p \geqslant n_0$

En faisant tendre $p \to \infty$, on obtient

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon .$$

Montrons que f est continue en x

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f(y) - f_n(y)\|$$

$$\leqslant 2\|f - f_n\|_\infty + \|f_n(x) - f_n(y)\|$$

On choisit n tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

puis α (par continuité de f) tel que

$$\|x-y\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f_n(x)-f_n(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Alors $\|x-y\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon$.

Autrement dit f est continue en x, partout x ▶

Un espace vectoriel normé complet est un espace de Banach

Thm [admis]

Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n ; alors il existe $(F, \| \ \|)$ complet

$i : E \to F$ continue, $\|i(x)\| = \|x\|$

Et $\forall g$ continue $E \longrightarrow W$, espace de Banach

il existe g' continue $F \to W$

tel que $g' \circ i = g$

L'e.v.n F s'appelle le complété de E

En fait, le théorème est valable pour tous les espaces métriques

c'est ainsi que l'on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ avec la distance $| \ |$

de même si l'on définit sur $\mathbb{Q}$, la norme p-adique (pour p premier)

$$\left\| p^n \frac{a}{b} \right\|_p = p^{-n} \quad (\text{ou } a, b \text{ premier avec } p)$$

alors $\| \ \|_p$ est une « norme » et $d_p(c,d) = \|c-d\|_p$ est une

distance. Alors $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ par d_p est

l'ensemble des nombres p-adiques.