Difféomorphismes
et théorème d'inversion locale

1. Difféomorphismes

Soit E et F des e.v.n, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, V un ouvert de F

Alors $f : \mathcal{U} \to F$ est un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur V si

(i) f est une bijection de $\mathcal{U}$ sur V, d'inverse $f^{-1} =: g$

(ii) f est différentiable en tout $x \in \mathcal{U}$;

(iii) g est différentiable en tout y de V

Remarques

a) f difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $V \Rightarrow g$ difféomorphisme de V sur $\mathcal{U}$

b) f difféo $\mathcal{U} \to V$, g difféo $V \to W \Rightarrow g \circ f$ difféo $\mathcal{U} \to W$

Exemples

a) Si A linéaire continue inversible et d'inverse A^{-1} continue, alors A est un difféo de $E \to F$

b) $(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféo de

$$\mathbb{R}_{>0} \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x < 0\}$$

c) Soit f dérivable de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ;\ (x,y) \mapsto (x + f(y), y)$ est un difféo de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

d'inverse $(x,y) \mapsto (x - f(y), y)$.

Proposition [Différentielle de l'inverse]

Soit f un difféo de $\mathcal{U}$ sur V d'inverse g. Soit $x \in \mathcal{U}$ et $y \in V$

Alors (i) $D_x f$ est inversible de $E \to F$ d'inverse continue

(ii) $D_y g = \left(D_{g(y)} f\right)^{-1}$

◀ Puisque $f \circ g = \mathrm{Id}$, la formule de composée des dérivées donne

$$(1) \quad D_{g(y)} f \circ D_y g = \mathrm{Id}$$

De même $g \circ f = id$ donne $D_{f(x)} g \circ D_x f = \mathrm{Id}$ et donc en prenant $y = f(x)$

$$(2) \quad D_y g \circ D_{g(y)} f = \mathrm{Id}$$

Le résultat suit de (1) et (2) ▶

Corollaire 1 : Si il existe un difféo de $U \subset E$ dans $V \subset F$ alors $\dim E = \dim F$

Corollaire 2 : On suppose E et F espaces de Banach (e.v.n complet, par exemple de dimension finie

Si f est un difféomorphisme de classe C^k, alors f^{-1} est de classe C^k

◀ traitons tout d'abord le cas $k = 1$; on a alors

① $\Psi_1 : x \mapsto g(x)$ est continue (car différentiable en tout point)

② $\Psi_2 : U \to L(E,F)$; $x \mapsto D_x f$ est continue (car f est C^1)

③ $\mathcal{O} = \{A \in L^c(E,F) \mid A$ inversible et A^{-1} continue$\}$ est un ouvert de $L^c(E,F)$ et de plus $\Psi_3 : \mathcal{O} \to L^c(F,E) : A \mapsto A^{-1}$ est C^∞

[facile en dimension finie, voir exercice en dim. ∞]

Alors $y \mapsto D_y g = \Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1 (y)$ est continue car composée de fonctions continues.

Une petite récurrence donne le cas général. ▶

2. Difféomorphisme local

Soit $f : U \subset E \to F$, f est un difféomorphisme local en x, où $x \in U$, s'il existe $G \ni x$ un ouvert tel que

(i) $f(G)$ est ouvert

(ii) f difféo de G sur $f(G)$.

L'application f est un difféomorphisme local si c'est un difféo en tout x de U

<u>Remarque</u>

(i) f difféo local en x, g difféo local en $f(x) \Rightarrow g \circ f$ difféo local en x [exercice]

<u>Proposition</u> Soit f un difféo local : $U \to F$; alors $f(U)$ est ouvert. Si de plus f est injective ; f est un difféo de U sur $f(U)$.

◀ On sait que pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $x \in G_x \subset U$, tel que $f(G_x)$ est un ouvert et f difféo de G_x sur $f(G_x)$ d'inverse g_x. Alors

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f(G_x) \text{ est ouvert comme réunion d'ouvert.}$$

Si de plus, f est injective soit g son inverse : $f(U) \to U$. On a $g = g_x$ sur l'ouvert $f(G_x)$. Donc g est différentiable en tout $f(x)$. ▶

3. Le théorème d'inversion local

Théorème [inversion locale] Soit E, F des espaces de Banach. Soit U un ouvert de E

Soit $f : U \to F$, et $x_0 \in U$. On suppose

(i) f différentiable en tout point de U

(ii) $D_{x_0} f$ inversible et d'inverse continue

Alors f est un difféo local en x_0.

Remarques et exemples

(i) l'énoncé est plus simple en dimension finie : en effet tout espace de dimension finie est complet (donc de Banach) ; et toute application linéaire est continue.

(ii) $\Psi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféo local de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

En effet $J_{(r,\theta)}(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$; donc $|J_{r,\theta}(\Psi)| = r \neq 0$.

3.A une proposition préliminaire

On dit que $h : U \subset E \to F$ est k-lipschitzienne (où $k \in \mathbb{R}$) si $\forall\, x,y \in E$; $\|h(x) - h(y)\| \leqslant k \cdot \|x-y\|$.

la proposition suivante est indépendante du cours de calcul différentielle

proposition (3.1.)

Soit E un espaces de Banach $f : B(a,R) \mapsto F$ telle que $f(x) = x + \varphi(x)$ avec φ $\frac{1}{2}$ lipschitzienne. Alors

(i) f est injective.

(ii) $f(B(a,r)) \supset B(b, 2r)$ [où $b = f(a)$]

(iii) l'inverse g de f est 1-lipschitzienne sur $B(b, \frac{r}{2})$

◀ On a $f(x) - f(y) = (x-y) + (\varphi(x) - \varphi(y))$ donc

$$\| f(x) - f(y)\| \geqslant \|x-y\| - \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x-y\|$$

Nous en déduisons que f est injective ($f(x) = f(y) \Rightarrow \|x-y\| = 0$)

et que l'inverse de f est 2-lipschitzienne de $f(B(a,r)) \longrightarrow B(a,r)$.

la difficulté est de montrer (ii). Si $y \in B(b, 2r)$ on cherche une solution de l'équation (en x). $y = f(x) = x + \varphi(x)$ si $y \in B(b, \frac{r}{2})$

Pour cela on construit par récurrence la suite définie

par $x_0 = a$, $x_{n+1} = y + \varphi(x_n)$; pour que cette suite soit

bien définie, il faut que $\|x_n - a\| \leqslant r$

Nous allons montrer par récurrence [on posant $r_0 = 2\|y-b\| < r$

$$\begin{cases} \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} r_0 & (1) \\ \|x_n - a\| \leqslant \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] r_0 & (2) \end{cases}$$

■ On a $\|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|$

Comme $x_1 = y - \varphi(a)$; $x_1 - x_0 = y - b$;

donc $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \|y - b\| \leqslant r_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ Ceci démontre (1).

Pour (2), par récurrence on obtient

$$\|x_{n+1} - a\| \leqslant \|x_n - a\| + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leqslant \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] r_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} r_0 = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) r_0 \ ■$$

Nous en déduisons donc

(3) la suite x_n est définie pour tout n et appartient à $B(a, r_0)$

(4) la suite x_n est de Cauchy : en effet

$$\|x_n - x_{n+p}\| \leqslant \sum_{q=0}^{p-1} \|x_{n+q} - x_{n+1+q}\| \leqslant \sum_{q=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q} r_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

L'espace E étant complet x_n converge vers $z \in \overline{B(a, r_0)} \subset B(a, r)$

de plus comme $x_{n+1} = y + \varphi(x_n)$, nous obtenons par continuité de φ

$z = y + \varphi(z)$. ▶

Nous avons une amélioration,

proposition 3.2 Si de plus φ est différentiable en a de différentielle nulle

Alors g est différentiable en b.

◀ En effet si $D_a\varphi = 0$; alors $\forall \varepsilon$; $\exists r$ tel que

$\|x-a\| < r \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(a)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x-a\|$

$\Rightarrow \|f(x) - b \quad -(x-a)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x-a\|$

Supposons alors $\|z-b\| < \frac{r}{2}$; alors $\|g(z) - a\| < r$ (car g 2-lipschitzienne)

et donc $\|f(g(z)) - b \quad - (g(z) - a)\| \leqslant \quad \varepsilon \cdot \|g(z) - a\| \leqslant 2\varepsilon \, \|z-b\|$

Autrement dit $\quad \|z - b - (g(z) - g(b)\| \leqslant \varepsilon \|z-b\|$

Nous venons de demontrer que $\quad g(b+h) - g(b) - h \in o(\|h\|)$.

En particulier g est différentiable de différentielle identité ▶

3.B un theorème restreint

<u>proposition</u> Soit $f : 0 \in U \subset E \rightarrow F$ On suppose

(i) f C^1

(ii) $f(0) = 0$ et $D_0 f = Id$

Alors il existe des ouverts V et W contenant 0 tels que

(i) $V \subset U$ et $W \subset f(V)$

(ii) f est injective restreinte à V

(iii) $g = f^{-1}$ est definie sur W et différentiable en 0

◀ Posons $\varphi(x) = f(x) - x$; alors $D_0\varphi = 0$. En particulier

il existe $r > 0$, tel que $\forall x \in B(0,r)$ on a $\|D_x\varphi\| \leqslant \frac{1}{2}$.

En particulier, comme $B(0,r)$ est convexe, le théorème des accroissements finis nous assure que φ est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne sur $B(0,r)$. les propositions 3,1 et 3.2 s'appliquent alors et nous donnent le résultat avec $V = B(0,r)$; $W = B(0,\frac{r}{2})$. ▶

3.C Une conséquence

Nous montrons

Soit $f : U \subset E \to F$, Soit $x_0 \in U$, tel que $D_{x_0} f$ est inversible. Alors il existe des ouverts $V \subset E$ et $W \subset F$ tels que $x_0 \in V$ et

(i) f est une bijection de V sur W

(ii) $g = f^{-1}$ est différentiable en $f(x_0)$.

◀ On considère $\varphi_1 : x \longrightarrow x + x_0$; $\varphi_2 : y \longmapsto A^{-1}(y - f(x_0))$, où $A = D_{x_0} f$

Alors par construction, φ_1 et φ_2 sont des difféomorphismes (exercice : donner leurs inverses) et si $h = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1$, on a $h(0) = 0$; $D_0 h = D_{x_0} f \circ A^{-1} = Id$, et enfin h, C^1. Il existe alors V_0 et W_0 ouverts contenant 0 tels que

(i) h bijective de V_0 sur W_0

(ii) h^{-1} diffentiable en 0.

On en déduit que $f = \varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1^{-1}$ est injective de $V = \varphi_1(V_0)$ sur $W = \varphi_2^{-1}(W_0)$ et que son inverse $f^{-1} = \varphi_1 \circ h^{-1} \circ \varphi_2$ est différentiable en $f(x_0)$. ▶

3.D Le théorème en toute généralités.

Soit donc f, C^1 sur un ouvert $U \subset E$ et $x_0 \in U$ tel que $D_{x_0} f$ inversible.

L'ensemble des applications linéaires continues inversible formant un ouvert [facile en dimension finie]. On peut supposer que $\forall y \in U$, on a $D_y f$ inversible, en remplaçant au besoin U par un ouvert plus petit.

En utilisant la proposition précédente et en remplaçant U au besoin par un ouvert plus petit on peut supposer que f est injective de U sur $f(U)$.

Par ailleurs pour tout $y \in U$, il existe un ouvert U_y avec $y \in U_y \subset U$ tel que (i) $f(U_y)$ est ouvert

(ii) f^{-1} est differentiable en $f(y)$.

Ceci est une conséquence de 3.C.

On en deduit

a) $f(U) = \bigcup_y f(U_y)$ est ouvert

b) f^{-1} est différentiable en tous points de $f(U)$

Nous avons terminé la preuve du théorème d'inversion locale ▶