Feuille d'exercices n° 3

E.Aubry

Exercice 1. Soit $p, q > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $p + q > 2$.
2. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $p + q > 3$. Donner la différentielle.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^2 sin(\frac{y}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les points où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues.

Exercice 3. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}{x^4+(x^2+y^2)^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, est différentiable.

Exercice 4. Soit $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $r(x) = ||x||_2$, pour $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le gradient de r^α.

Exercice 5. On note E_n l'espace des polynômes réels à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n. Etudier la différentiabilité des applications suivantes :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & sinP(0) \end{array}, \quad \beta : \begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 (P(t)^3 - P(t)^2)dt \end{array}, \quad \gamma : \begin{array}{ccc} E_2 & \to & E_4 \\ P & \mapsto & P' - P^2 \end{array}.$$

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Etudier la différentiabilité des applications suivantes aux points indiqués entre parenthèses :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & det(u) \end{array} \ (u = id), \quad \beta : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u \circ v \end{array} \ ((u_0, v_0)), \quad \beta : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & Tr(u \circ v) \end{array} \ ((u_0, v_0)).$$

Exercice 7. Soit $F = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(t)|$ et $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(t)| + \sup_{[0,1]} |f'(t)|$. Montrer que l'application $\Phi(f) = f' + f^2$ de E dans F est différentiable en tout point de E.

Exercice 8. Soit $f : U \subset E_1 \times E_2 \to F$ une application différentiable en $(x_0, y_0) \in U$. Montrer que $f_1(x) = f(x, y_0)$ et $f_2(y) = f(x_0, y)$ sont différentiables en x_0 et y_0 respectivement, calculer leur différentielles et montrer que $d_{(x_0,y_0)} f(h_1, h_2) = d_{x_0} f_1(h_1) + d_{y_0} f_2(h_2)$.

Exercice 9. Soit $f : U \to F$ une application $\mathcal{C}^1$ et $x_0 \in U$. On pose $g(t) = f(x_0 + th)$. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(0)$.

Exercice 10. Soit $f : \Omega \subset R^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en x. Exprimer la matrice de $d_x f$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\sin(x^2+y^2), xy)$. Calculer le rang de $d_{(x,y)} f$ en fonction de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que les fonctions $q_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,x) \end{array}$ et $q_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,-x) \end{array}$ sont dérivables. Calculer leur dérivée.

Exercice 13. Calculer la dérivée de la fonction $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$ en fonction de celles de a, b et de f.

Exercice 14. Soit $f : U \to V$, $g : V \to W$ et $h : W \to Z$ des applications différentiables en x, $f(x)$ et $g \circ f(x)$ respectivement. Montrer que $h \circ g \circ f$ est différentiable en x et calculer $d_x(h \circ g \circ f)$.

Exercice 15. Soit $F : E \to F$ une application différentiable et G un sous-espace de E. On note $f = F_{|G}$ la restriction de F à G. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celle de F.

Exercice 16. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)/x \leqslant 0\} \\ (r,\theta) & \mapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

est C^1. A toute fonction $f(x,y)$ en coordonnées cartésiennes, on associe une fonction en coordonnées polaires $g(r,\theta)$ par la formule $g(r,\theta) = f \circ \Phi(r,\theta)$. Exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 17. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, et $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Calculer la différentielle de la fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(x) = \langle Mx, x\rangle + \|x - k(x)\|^2.$$

en fonction de dk.

Exercice 18. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et que la fonction $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par,

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = M^{-1},$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $GL_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle (déterminer comment les coefficients de M^{-1} dépendent des coefficients de M, puis calculer la différentielle de f en différentiant l'égalité $M \times f(M) = I_n$).

Exercice 19. Soit f une application C^1 en x_0 et g une application C^1 en $f(x_0)$. Montrer que $g \circ f$ est C^1 en x_0.

Exercice 20. On considère $\mathbb{R}^n$ munit de la norme euclidienne canonique. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}$$

1. Calculer la matrice jacobienne de f.
2. Montrer que $Df(x)x = 0$. Peut-on trouver ce résultat sans calcul ?
3. Calculer le déterminant Jacobien de f.

Exercice 21. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est homogène de degré k si on a $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ pour tout x et tout $\lambda > 0$. On suppose que f est différentiable en x_0, montrer qu'on a $d_{x_0}f(x_0) = kf(x_0)$ (identité d'Euler).

Exercice 22. Soit $f : \Omega \subset R^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en x.

1. On note $G = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^p / \, y = f(x)\}$ le graphe de f. On appelle espace tangent au graphe de f en $(x, f(x))$ l'ensemble $T_{(x,f(x))}G = (x, f(x)) + \{\gamma'(0) / \, \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G \text{ est } C^1, \gamma(0) = (x, f(x))\}$. Montrer que $T_{(x,f(x)}G = (x, f(x)) + \{\big(v, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\big) / \, v \in \mathbb{R}^p\}$. En déduire une base du plan tangent au graphe de $f(x,y) = xy + x^3$ au point $(1,-1,0)$.
2. Montrer que $(v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_p) \in T_{(x,f(x))}G$ ssi $w - f(x) = d_xf(v - x)$. En déduire une équation Cartésienne du plan tangent au graphe de $f(x,y) = xy + x^3$ au point $(1,-1,0)$.