Université de Nice - Sophia Antipolis **2012/2013**
L3MA - Calcul Différentiel **Semestre 1**

Feuille d'exercices n° 4

E.Aubry

Exercice 1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en x_0. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\nabla_{x_0} f \in \mathbb{R}^n$ tel que $d_{x_0} f(u) = \langle \nabla_{x_0} f, u \rangle$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. Calculer ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. On pose $\gamma(t) = x_0 + tu$. Calculer la dérivée de $f \circ \gamma$ en 0 en fonction de u et $\nabla_{x_0} f$. Quelle propriété particulière a la direction $\nabla_{x_0} f$?
3. On suppose maintenant que $\gamma :]-1,1[\to U$ vérifie $\gamma(0) = x_0$ et $f \circ \gamma(t) = f(x_0)$ pour tout $t \in]-1,1[$. Quelle propriété vérifient ∇_{x_0} et $\gamma'(0)$?
4. On cherche les fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifient (E) $\;y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur U. Trouver les courbes $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ et $\gamma'(t) = X \circ \gamma(t)$, où on a posé $X(x, y) = (-y, x)$. Montrer que f est constante le long de ces courbes. En déduire l'existence et l'unicité de la fonction f vérifiant (E) sur $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x, 0) = e^x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction C^1. Montrer que f restreinte à $B'_0(1)$ est Lipschitzienne.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\nabla f(x)$ soit unitaire pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est Lipschitzienne.

Exercice 4. Soit E, F deux espaces normés, U un ouvert convexe de E et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les deux conditions suivantes.

1. pour tout $x \in U$, $\lim f_n(x) = f(x)$,
2. La suite $Df_n : U \to \mathcal{L}^c(E; F)$ converge uniformément vers une fonction $g : U \to \mathcal{L}^c(E; F)$.

On va montrer qu'alors f est différentiable de différentielle $Df = g$.

Soit $R > 0$. En appliquant le TAF à la fonction $f_p - f_q$ entre a et $x \in B_a(R) \cap U$, montrer que f_p converge uniformément sur $B_a(R) \cap U$.

Soit $a \in U$ et $\eta > 0$ tels que $B_a(\eta) \in U$. Montrer que pour tout $h \in B_a(\eta)$ et pour tout $n \in N$, on a

$$\|f(a+h)-f(a)-g(a)(h)\| \leqslant \|f(a+h)-f(a)-f_n(a+h)+f_n(a)\|+\|f_n(a+h)-f_n(a)-d_a f_n(h)\|+\|d_a f_n(h)-g(a)(h)\|$$

En déduire que f est différentiable en a de différentielle $g(a)$.

En déduire que la fonction $e^M = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ est C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Montrer que le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{1}{2} sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2} cos(x-y) \end{cases}$ a une unique solution.

Exercice 6. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Montrer que, pour $a, b \in U$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$ (Indication : Utiliser la fonction $g(t) = f(a+t(b-a))$).

Que se passe-t-il si l'on considère $f : U \to \mathbb{R}^p$, avec $p > 1$.