FEUILLE 5; EXTREMA LIÉS, FONCTIONS IMPLICITES ET INVERSION LOCALE . **=plus difficile*

A : Fonctions implicites

Exercice 1. Montrez que l'équation $\cos(x+y) = 1 = x + 2y$ definit implicitement au voisinage de $(0,0)$ unf contion ϕ de classe C^1 telle que

$$\cos(x + \phi(x)) = 1 + x + 2\phi(x).$$

Calculez $\phi'(0)$.

Exercice 2. On considère le système de 2 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 &= 1 \\ x^3 - y^3 + z^3 &= 1. \end{cases}$$

1– Montrez que $(2, -1, -2)$ est solution.

2– Montrez qu'il existe deux solutions ϕ et ψ, de classe C^1, définies dans un voisinage de -2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que pour tout z dans ce voisinage

$$\begin{cases} \phi(z)^2 + \psi(z)^2 - z^2 &= 1 \\ \phi(z)^3 - \psi(z)^3 + z^3 &= 1. \end{cases}$$

3– Calculez $\phi'(0)$ et $\psi'(0)$, ainsi que $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ en fonction de $\phi(z)$ et $\psi(z)$.

Exercice 3. On considère le système de 2 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = t^3 &= 0. \end{cases}$$

1– Montrez que $(0, -1, 1, 0)$ est solution.

2– Montrez qu'il existe trois fonctions solutions x, y et z, de classe C^1, définies dans un voisinage de 0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que pour tout t dans ce voisinage

$$\begin{cases} x(t) + y(t) + z(t) + t &= 0 \\ x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 + t^2 &= 2 \\ x(t)^3 + y(t)^3 + z(t)^3 = t^3 &= 0. \end{cases}$$

3– Calculez $x'(0)$, $y'(0)$ et $z'(0)$, ainsi que $x'(t)$, $y'(t)$ et $z'(t)$ en fonction de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

B : Points critiques et leur nature

Exercice 4. Pour les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminez les points critiques et leur nature

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \\ f_2(x,y) &= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y} \\ f_3(x,y) &= x^3-3x+xy^2. \\ f_4(x,y) &= \sin^2(x)-\sinh^2(y). \\ f_5(x,y) &= y^2-3x^2y+2x^4. \\ f_6(x,y) &= x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^3. \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z)=2x^2+4xy-6xz+y^4-2y^3+3y^2-6yz+5z^2.$$

Déterminez ses points critiques et leur nature.

C : Extrema liés

Exercice 6. *Diagonalisation des matrices symétriques réelles* Soit A une matrice symétrique réelle $n\times n$. Soit $\Sigma=\{(x_1,\dots x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2=1$. Soit

$$f(u)=\langle A(u)|u\rangle\,.$$

1– Montrez que Σ est compact et que f y admet un maximum.

2– Montrez que u est un point critique de f restreinte à Σ si et seulement si u est vecteur propre. Que vaut le multiplicateur de Lagrange en ce point critique ?

3– En déduire que A admet un vecteur propre. (Etape cruciale de la démonstration)

Exercice 7. Trouvez les points critiques et les extrema globaux de la fonction $f(x,y,z)=y^2(x^2-z^2-1)$ sur la sphère $\Sigma=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$.

Exercice 8. Trouvez les points critiques et les extrema globaux de la fonction $f(x,y,z)=y(x^2-z^2+1)$ sur la sphère $\Sigma=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$.

Exercice 9. Trouvez les points critiques et extrema sur le bord et à l'intérieur des fonctions suivantes

$g_1(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$, sur $U=\{x^2+y^2\leqslant 2\}$.

$g_3(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$, sur $U = \{x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 10*. Trouvez le volume maximum d'une boite parallélépipédique rectangles dont les sommets appartiennent à la sphère de rayon R^2.