Sous groupes

1. actions à droite et à gauche

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G

la multiplication à gauche est l'action de H à gauche sur G

$$H \times G \mapsto G \ ; \ (h,g) \mapsto h \cdot g$$

Une orbite $Hg = \{ h \cdot g \mid h \in H \}$ est une classe à gauche

l'espace quotient est noté $H \backslash G$

la multiplication à droite est l'action de H à droite sur G

$$H \times G \mapsto G \ ; \ (h,g) \mapsto g \cdot h$$

Une orbite $gH = \{ g \cdot h \mid h \in H \}$ est une classe à droite

l'espace quotient est noté G/H.

Proposition si $H < G$ et $G \circlearrowright X$ on a une application $H\backslash X \to G \backslash X$ qui

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H\backslash X \arrow[rr] & & G\backslash X \end{tikzcd}$$

mutative.

2. Conjugaison, sous groupes distingues

Deux éléments g_1 et g_2, ou deux sous-groupes H_1 et H_2 sont conjugués, si il existe $h \in G$ tel que $g_1 = h g_1 h^{-1}$ (ou $H_1 = h H_2 h^{-1}$)

Un sous-groupe H de G est distingué (ou normal) si $\forall g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

NOTATION $H < G$ veut dire H sous groupe de G ; $H \lhd G$ veut dire de plus H distingué.

R : (i) tout sous groupe d'un groupe commutatif est distingué.

(ii) l'intersection de deux sous groupes distingués est distingué.

(iii) Si H est distingué alors $xH = Hx$, on a donc une bijection entre $H\backslash G$ et G/H qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G/H \arrow[dd, leftrightarrow] \\ G \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & H\backslash G \end{tikzcd}$$

commutatif.

L'application : $G\times G \to G$; $g,h \mapsto ghg^{-1}$ definit une action appelée action par conjugaison. Dans le langage des actions de groupe $H<G$ est distingué si il est un sous-ensemble stable par l'action par conjugaison.

prop : Soit ϕ morphisme $G\to F$; $H<G \Rightarrow \phi(H)<F$; $H<F \Rightarrow \phi^{-1}(H)<F$

$H\triangleleft G \Rightarrow \phi(H)\triangleleft\phi(G)$; $H\triangleleft F \Rightarrow \phi^{-1}(H)\triangleleft F$

Applications et exemples : (i) $\{e\}\triangleleft G$; (ii) $G\triangleleft G$.

(iii) si φ morphisme de $G\to F$ alors $\mathrm{Ker}\varphi \triangleleft G$ (En effet $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}\{e\}$.

3. Groupes quotients

Théorème si H est distingué alors

$$\forall y\in Hy_0,\ \forall x\in Hx_0,\ xy\in H\cdot(x_0y_0)$$

Corollaire, il existe une structure de groupe sur $H\backslash G$ telle que

$\pi : x \mapsto [x]$ est un morphisme de groupe.

Et alors $\mathrm{Ker}(\pi) = H$

Corollaire si N est distingué dans G, alors pour tout sous groupe H ; HN est un sousgroupe de G

4. les trois théorèmes d'isomorphismes d'Emmy Noether

<u>Théorème 1</u>. Si f est un morphisme $G \to F$, alors on a un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f)\backslash G \to f(G)$, telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & F \\ & \mathrm{Ker}(f)\backslash G \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En particulier, si G est fini, on a $\#f(G) \cdot \#\mathrm{Ker}(f) = \#G$.

Exemples

Tout groupe engendré finiment est un quotient d'un groupe libre F_n où $n \in \mathbb{N}$

Théorème 2. Soit G un groupe, N un sous groupe distingué, H un groupe. Alors

(i) $N \cap H$ est un sous groupe distingué de H

et $H/_{H\cap N} \simeq HN/_N$

◀ On considère $H \xrightarrow{\phi} G/_N \xleftarrow{\psi} HN$; les images de ces deux morphismes sont les mêmes ; or $\mathrm{Ker}(\phi) = H \cap N$; $\mathrm{Ker}(\psi) = N$ ▶

Théorème 3. Soit G un groupe, $N \lhd G$; $M \lhd G$ et $M < N$; alors

$N/_M \lhd G/_M$ et $(G/_M)/(N/M) = G/_N$

◀ Mq $N/_M \lhd G/_M$; On considère $\pi : G \to G/_M$, alors $\pi(N) \lhd \pi(G) = G/_M$ or $\pi(N) = N/_M$.

Par ailleurs on peut considerer $G/_M \to G/_N$ son noyau est $N/_M$ et elle est surjective ▶