Théorème de Sylow

1. Quelques groupes et sous-groupes importants

a) le groupe $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}\{1, \dots, n\}$

prop : tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$

◀ $G \to \mathrm{Bij}(G)$; $g \mapsto \phi_g$ où $\phi_g(h) = gh$. l'application ϕ est injective !

Si $\phi_g = \mathrm{Id}$; alors $g = g \cdot e = \phi_g(e) = e$. ▶

b) le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ pour un corps $\mathbb{K}$ de cardinal k

proposition : $\# GL_n(\mathbb{K}) = k^{n-1}(k^n - 1) \# GL_{n-1}(\mathbb{K})$

◀ Application de la formule des classes, vue en exercice ▶

proposition : il existe une injection de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{K})$

◀ $\sigma \in \mathfrak{S}_n \Rightarrow$ l'endomorphisme ϕ_σ tel que $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, où

$(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ ▶

Corollaire : Pour tout Groupe fini G d'ordre n, pour tout corps $\mathbb{K}$, il existe une injection de G dans $GL(n, \mathbb{K})$

« Pour tout corps, $\mathbb{K}$ un groupe d'ordre n est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ »

c) le groupe $B_n(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < GL_n(\mathbb{K})$

◀ Groupe : $g(e_1) = e_1$; $g(e_j) = e_j + u_j$ avec $u_j \in P_{j-1} = \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$

$\Rightarrow$ Si $g, h \in P_j$ alors $g \cdot h \in B_n(\mathbb{F}_p)$

Inverse $g(g^{-1}(e_j)) = e_j$; donc $g^{-1}(e_j) \in P_j$

écrivons $g^{-1}(e_j) = \alpha \cdot e_j + u_j \Rightarrow \alpha e_j + \underbrace{g(u_j) + u_j}_{\in P_{j-1}} = e_j \Rightarrow \alpha = 1$

2. Sous groupes de Sylow

Soit G un groupe d'ordre n, Soit p un nombre premier et supposons $n = p^\alpha q$ avec q premier avec p

Un p groupe de G est un sous groupe d'ordre p^m avec p premier

Un p-groupe de Sylow est un sous groupe de G d'ordre p^α

Example :

$G = GL_n(\mathbb{F}_{p^m})$ les matrices triangulaires superieures forment un p-groupes de Sylow.

◀ Si $\mathbb{F}$ est de cardinal $k = p^m$, alors on a vu que $\# GL_n(F) = k^{n-1}(k^n - 1) \# GL_{n-1}(k)$; On peut supposer par recurrence que $\# GL_n(F) = k^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot q_n$ avec q_n premier avec p. Alors

$$\# GL_{n+1}(F) = k^{n+1+\frac{(n+1)(n}{2}} \cdot q_n \cdot (k^{n+1} - 1).$$

Comme $n + \frac{(n(n-1))}{2} = \frac{1}{2}(n(n+1))$ et $(k^{n+1} - 1) \equiv 1 \, [p]$, le resultat est démontré par recurrence. Maintenant $\# \mathbb{B}_n(\mathbb{F}) = k^{\frac{n(n-1)}{2}}$. le resultat suit ▶

Remarque : si H est un p-groupe, ou un p-groupe de Sylow tout conjugué de H est un p-groupe (de Sylow)

◀ Si $\alpha \in G$, la conjugaison $u \mapsto \alpha u \alpha^{-1}$ est une bijection ▶

3. le Théorème de Sylow

Théorème : Si G est d'ordre $p^\alpha q$ avec p premier et q premier avec p alors

(i) G contient un p-groupe de Sylow

(ii) tout les p-groupes de Sylow sont conjugués

(iii) tout p-groupe est inclus dans un groupe de Sylow

(iv) le nombre n_p de p-Sylow est $\equiv 1[p]$ et divise q

On commence par

(2) Soit F un groupe ayant S comme p groupe de Sylow, Soit $G<F$, alors il existe α tel que $G \cap \alpha S \alpha^{-1}$ est un p-groupe de Sylow de G

◀ On considère $X = F/S$, par construction si $\#F = p^\alpha q$ avec q premier avec p alors $\#X = q$; On fait agir G à gauche sur F/S

$$(h, xS) \mapsto hxS$$, il s'agit bien d'une action

$$\mathrm{Stab}(xS) = \{h \mid hxS = xS\} = \{h \mid x^{-1}hxS = S\} = \{h \mid x^{-1}hx \in S\}$$

$$= G \cap x^{-1}Sx \text{ est un } p\text{-groupe de } G$$

Si $\mathrm{Stab}(xS)$ n'est <u>pas</u> un p-groupe de Sylow alors

$p \mid \#G(xS)$. Nous pouvons raisonner par contradiction : si

$G \cap xSx^{-1}$ n'est jamais un p-Sylow, alors p divise le cardinal de touts les orbits et donc

$p \mid \#X$ et la contradiction ▶

Demonstration de (i) : on applique le lemme à l'injection de $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$ qui possède un p-Sylow.

Demonstration de (ii) et (iii) Soit $H < G$ un p-groupe ; Soit S un p-Sylow de G

On sait qu'il existe x tel que $H \cap xSx^{-1}$ est un p-Sylow de H, or

H est son propre p-Sylow donc $H \subset xSx^{-1}$.

En particulier si S' est un autre p-Sylow $S' \subset xSx^{-1}$ et comme

S' et xSx^{-1} ont le m̂ cardinal, ils sont egaux.

Demonstration de (iv). Soit $X = \{\text{p-Sylow}\}$; alors on fait agir G par

conjugaison sur X. Il n'y a qu'une seule orbite de donc

$$\#X = \#G / \# \mathrm{Stab}(S_0)$$

Mais $\mathrm{Stab}(S_0) > S_0$ donc $\mathrm{Stab}(S_0) = q'p^\alpha$ On obtient donc $n_p q' = q$: n_p divise q

Remarquons maintenant que par construction $S_0 \triangleleft \mathrm{Stab}(S_0)$. Donc $\mathrm{Stab}(S_0)$

a un unique p-Sylow S_0 et en particulier $\mathrm{Stab}(S) \cap S_0$ est un sous groupe stricte de S_0

sauf si $S = S_0$. On fait agir $S_0 \curvearrowright X$ par conjugaison, le stabilisateur de S par cette

action est $\mathrm{Stab}(S) \cap S_0$. On vient de montrer que X a une seule orbite triviale donc

$$\#X \equiv 1 \, [p]$$

On fait maintenant agir S_0 par conjugaison sur X.

si $S \neq S_0$, alors $\mathrm{Stab}(S) \cap S_0 \neq S_0$. Sinon $S_0 < \mathrm{Stab}(S)$ et donc S et S_0

seraient tous les deux des p-sylow de $\mathrm{Stab}(S)$, donc il existe $x \in \mathrm{Stab}(S)$ tel que

$xSx^{-1} = S_0$ or $xSx^{-1} = S$ car $x \in \mathrm{Stab}(S)$.

On en deduit que S_0 a une et une seule orbite triviale sur X ; donc $n_p \equiv 1 \, [p]$

En effet p divise $\#S_0 / (\#(S_0 \cap \mathrm{Stab}(S)))$ = cardinal d'une orbite non triviale.