Produit direct, Produit semi direct

1. Produit direct

Soit H et N deux groupes, le produit direct est l'ensemble $H \times N$ muni de la loi de composition

$$(h, n)(h', n') = (hh', nn')$$

On vérifie alors

$(H \times N, \cdot)$ est un groupe, tel que $H \simeq H \times \{e\}$; $N \simeq \{e\} \times N$ sont distingués.

Théorème. Soit G un groupe, H et N deux sous groupes distingués tel que $H \cap N = \{e\}$, $HN = G$

Alors (i) tout élément x de G s'écrit de manière unique $x = hn$ avec $h \in H, n \in N$

(ii) $\forall h \in H, \forall n \in N$; $hn = nh$

(iii) l'application $\varphi : H \times N \to G$; $(h, n) \mapsto hn$ est un isomorphisme de groupe

2. Produit semi direct

Soit H et N deux groupes et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupe, le produit semi direct $N \rtimes H$ (ou quelque fois $N \rtimes_\psi H$; $H \ltimes N$, $H \ltimes_\psi N$) est l'ensemble $(N \times H)$ muni de la loi de composition

$$(n, h) \cdot (n', h') := (n \psi(h) n', hh')$$

proposition $N \rtimes H$ est un groupe tel que $N \times \{e\}$ est distingué

On rappelle que si $N \lhd G$, alors on a un morphisme $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(N)$; $\lambda \mapsto \lambda_g$ tel que $\lambda_g(n) = gng^{-1}$.

Théorème Soit G un groupe, H et N deux sous groupes tel que $H \cap N = \{e\}$, $HN = G$, $N \lhd G$

Alors (i) tout élément x de G s'écrit de manière unique $x = nh$ avec $h \in H, n \in N$

(ii) l'application $\varphi : N \rtimes_\lambda H \to G$; $(h, n) \mapsto nh$ est un isomorphisme de groupe

Example : (i) Soit σ une symetrie hyperplane $H = \langle \sigma \rangle \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ alors

$$O(n) = SO(n) \rtimes H$$

(ii) Soit τ une transposition $\in \mathfrak{S}_n$; $H = \langle \tau \rangle \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Alors $\mathfrak{S}_n = Alt_n \rtimes H$, où Alt_n est le groupe des permutations de signature 1.