Géométrie Affine

Exercice 1. [Applications affines et barycentres]

(1) Montrez que l'image par une application affine $\mathcal{L}$ du barycentre des points $p_1, \ldots p_m$ affectés des poids $\lambda_1, /ldots, \lambda_m$ est le barycentre des points $\mathcal{L}(p_1), \ldots \mathcal{L}(p_m)$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

(2) Montrez que reciproquement si l'image par une application $\mathcal{L}$ du barycentre des points $p_1, \ldots p_m$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ est le barycentre des points $\mathcal{L}(p_1), \ldots \mathcal{L}(p_m)$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (pour tous $p_1, \ldots p_m$ affectés des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$) alors $\mathcal{L}$ est affine : il suffira de le montre quand $m = 2$.

Exercice 2. [Parallélogrammes] Un *parallélogramme* est la donnée de quatre points a, b, c, d tels que $b - a = c - d$. On note $(a, b,)$ la droite affine passant par les points a et b.

(1) Montrez que a, b, c, d est un parallélogramme si et seulement si $\frac{a+d}{2} = \frac{c+b}{2}$,

(2) Montrez que si a, b, c, d est un parallélogramme alors b, c, d, a st un parallélogramme,

(3) Montrez que a, b, c, d et un parallélogramme si et seulement si les doites (a, b) et (c, d) sont parralléles ainsi que les droites (a, c) et (b, d).

Exercice 3. [Sous-espaces affines] Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace vectoriel tangent E. Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$

(1) Montrez que $\mathcal{H}$ est un sous espace-affine si et seulement si tous les barycentres de points de $\mathcal{H}$ sont dans $\mathcal{H}$.

(2) Soit $p_1, \ldots, p_m$ des points de $\mathcal{E}$ montrez que l'ensembles de barycentres de $p_1, \ldots, p_m$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$

(3) Montrez que si $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine alors son image par une application affine $\mathcal{L}$ (d'application tangente L) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ de est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.

Exercice 3. [Médianes et centre de gravité] On se donne un triangle T , c'est-à-dire trois points a_0, a_1, a_2. Les *médianes* de T sont les droites $(a_i, \frac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i+2})$ Montez que les trois médianes se coupent au point $\frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_2)$.

Exercice 4. [Théorème de Menelaüs] Soit a, b, c un triangle et A, B, C des points de (b, c), (a, c), (a, b). Montrez que A, B et C sont alignés, si et seulement si

$$\frac{Ab}{Ac} \cdot \frac{Bc}{Ba} \cdot \frac{Ca}{Cb} = 1.$$

On pourra utiliser l'homothétie de centre C qui envoie b sur a *etc.*, ou un repère adapté, ou les barycentres...

Exercice 5. [Groupe des transformations affines] Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace vectoriel associé E. Soit G le groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$. Soit m un point de $\mathcal{E}$.

(1) Montrez que l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{E}$ préservant m est isomorphe à $\mathsf{GL}(E)$.

(2) Soit T l'ensemble des translations. Montrez que T est distingué dans G et est isomorphe à E. Quelle est alors l'action de $\mathsf{GL}(E)$ sur T ?

(3) Montrez que $\mathsf{G} = T \rtimes \mathsf{GL}(E)$.