# Convexité et polytopes

*les exercices forment une suite logique.*

**Exercice 1.** [Intérieur d'un convexe] Soit $C$ un convexe. On définit son *intérieur* comme son intérieur topologique dans $\text{Aff}(C)$. On rappelle que $V$ est un voisinage de $x$ dans un espace affine si et seulement si $\{\vec{vx} \mid v \in V\}$ est un voisinage de zero dans l'espace vectoriel tangent.

(1) On suppose que $\dim \text{Aff}(x_0, \ldots, x_n)) = n$. En utilisant un repère montrez que $\text{int}\,\text{Env}(x_0, \ldots, x_n) \neq \emptyset$
(2) Montrez que l'intérieur d'un convexe fermé est non vide.
(3) Montrez que l'intérieur que si $a \in C$, $b \in \text{int}(C)$ alors pour tout $t \in ]0, 1[$, $tb + (1-t)a \in \text{int}(C)$. En déduire que de $\text{int}(C)$ est convexe.
(4) Soit $H$ un hyperplan. Soit $x \in H \cap \text{int}(C)$. Montrez que $\dim(H \cap C) = \dim(H)$ et que $x \in \text{int}(H \cap C)$

**Exercice 2.** [Structure d'un polytope] Soit $P = \cap_{i \in I} H_i^+$, où les $H_i^+$ est un demi-espace de bord $H_i$. On suppose que l'écriture est minimale, c'est-à-dire que $P \neq P_j := \cap_{i \in I, i \neq j} H_i^+$ pour tout $j$ de $I$.

(1) Soit $x \in P_j \setminus P$. Montrez que $H_j$ sépare $x$ de $P$.
(2) Soit $a \in \text{int}(P)$. Montrez qu'il existe $z \in H_j \cap [a, x]$.
(3) En déduire que
 (a) $\text{Aff}(H_j \cap P) = H_j$.
 (b) $H_i$ est un hyeprplan d'appui de $P$
 (c) $F_j := H_j \cap P$ est une face de codimension 1 de $P$.
 (d) $F_j \cap \text{int}(P) = \emptyset$.
(4) Soit $x \in \partial P := P \setminus \text{int}(P)$. Soit $a \in \text{int}(P)$.
 (a) Montrez que pour tout $t > 1$, $x_t := tx + (1-t)a \notin P$. Soit alors $i_t$, tel que $x_t \notin H_{i_t}^+$.
 (b) Montrez qu'il existe $j$ tel que $x \in F_j$.
 (c) En déduire que
$$P = \text{int}(P) \sqcup \bigcup_{i \in I} F_i.$$

**Exercice 3.** [Faces] Soit $P$ un convexe et $\mathcal{F}$ l'ensemble de faces de $P$.

(1) Montrez $\text{Aff}(F) \cap P = F$. (on utilisera l'exo 1).
(2) Montrez que si $F, G$ sont deux faces telles que $F \subset G$ alors, soit $F = G$ soit $\dim F < \dim G$.
(3) Soit $F$ une face de codimension 1, Montrez que $\text{Aff}(F)$ est un hyperplan d'appui. (on utilisera 2)

**Exercice 4.** [Dual d'un convexe] Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $P$ un convexe fermé de dimension $n$ tel que 0 appartient à l'intérieur de $P$

(1) Soit $P^*$ l'ensemble des formes linéaires $f$ de $E$, tel que $P \subset \{x \mid f(x) \leqslant 1\}$. Montrez que $P^*$ est un convexe fermé.
(2) Montrez que $(P^*)^* = P$.
(3) Montrez que si $P$ est l'enveloppe d'un nombre fini de points, alors $P^*$ est un polytope.
(4) En déduire que si $P$ est un polytope alors $P^*$ est un polytope, puis que l'enveloppe d'un nombre fini de points est un polytope.