Groupes agissant sur un ensemble

1. Définitions

Soit G un groupe et E un ensemble. Une action à gauche de G sur E est donné par une application (application orbitale)

$$G \times X \to G \; ; \; (g,x) \mapsto g\cdot x$$

telle que

$$\begin{cases} h\cdot(g\cdot x) = (h\cdot g)\cdot x & (*) \\ e\cdot x = x \end{cases}$$

On note $G \curvearrowright X$ pour dire « le groupe G agit sur l'ensemble X »

Proposition (i) $\forall g$ l'application $\varphi(g) : x \to g\cdot x$ est une bijection d'inverse $\varphi(g^{-1})$.

(ii) L'application $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(E)$ est un morphisme de groupe

Réciproquement

Proposition. Soit φ un morphisme $G \to \mathrm{Bij}(E)$, alors l'application

$G \times E \to G : \; (g,x) \mapsto \varphi(g)\cdot x$ definit une action à gauche

On definit également les actions à droite :

$$(g,x) \to x\cdot g \quad \text{où } x\cdot(gh) = (x\cdot g)h$$

Exercice : lien entre action à gauche et action à droite ? Que deviennent les proposition précédents ?

Une action à gauche definit une relation d'équivalence sur x dite équivalence orbitale

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, \; x = g\cdot y$$

la classe d'équivalence d'un point est appelée orbite.

L'orbite de x est donc $G\cdot x$.

le stabilisateur de x est $\quad \mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g\cdot x = x\}$

Proposition (i) $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous groupe de G

(ii) $\mathrm{Stab}\; g\cdot x = g\cdot \mathrm{Stab}(x)\cdot g^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in \mathrm{Stab}_x\}$

On note alors $G\backslash X$ l'ensemble des orbites de l'action à gauche de $G \curvearrowright X$

et X/G " " " " " " droite de $X \curvearrowleft G$

prop : X est une réunion disjointe d'orbites : $X = \bigsqcup_{[y] \in G \backslash X} [y]$

On suppose que $G \curvearrowright X$ (agit).

Soit $Y \in X$, on dit que Y est stable par G si $\forall y \in Y, \forall g \in G \quad g \cdot y \in Y$

proposition : Y est stable si et seulement si Y est une réunion d'orbite

On dit de plus que G agit transitivement sur Y si $\forall (x,y) \in G$

Il existe $g \in G$ tel que $gx = y$. Autrement dit il y a une seule orbite

proposition : Soit $Y \subset X$, et Y non vide on a alors l'équivalence

Y est une orbite de $G \Leftrightarrow Y$ est stable et G agit transitivement sur G

Examples : (i) l'action de G sur lui même $g,h \mapsto gh$

(ii) l'action de G sur lui même par conjugaison

$(g,h) \mapsto ghg^{-1}$

(iii) $GL(E) \times E \to E \quad ; (g,u) \mapsto g \cdot u$

(iv) On considère l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques symétriques sur E, $G = GL(E)$

a) Montrez que $G \times Q(E) \to Q(E)$

$(g,q) \mapsto g^*q$, ou $g^*q(x) = q(g(x))$ est une action à droite

b) Quel est le stabilisateur d'un point

c) Montrez qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites et les caractériser, E sur $\mathbb{R}$

c) Soit A la matrice de q, quelle est la matrice de g^*q

(v) On considère l'action de $GL(E)$ sur $End(E)$; Quelles sont les orbites de cette action ?

(vi) On considère l'action de $O(E)$ sur $Sym(E)$ = matrices symétriques $g \cdot A g^{-1} = g_* A$, montrez qu'il s'agit bien d'une action

a) caractériser les orbites ? b) Si A a toutes ces valeurs propres distinctes, quel est le stabilisateur de A