Sous groupes et actions.

Rappel de notation : diagramme commutatif

1. Exemples important : actions à droite et à gauche

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G

(i) la multiplication à gauche est l'action de H à gauche sur G

$$H\times G \mapsto G \; ; \; (h,g) \mapsto h\cdot g$$

L'orbite de g pour cette action $Hg = \{ h\cdot g \mid h \in H\}$ est une classe à droite

L'espace quotient est noté $H\backslash G$

(ii) la multiplication à droite est l'action de H à droite sur G

$$H\times G \mapsto G \; ; \; (h,g) \mapsto g\cdot h$$

Une orbite $gH = \{ g\cdot h \mid h\in H\}$ est une classe à gauche

L'espace quotient est noté G/H.

Theoreme on suppose que $G \curvearrowright X$, on alors une bijection φ, de G/Stab_x vers l'orbite de $G\cdot x$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g \mapsto g\cdot x"] \arrow[dr] & G\cdot x \\ & G/\mathrm{Stab}_x \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

◀ On consider $f : g \mapsto gx$. Alors $f^{-1} f(g_0) = \{ h \mid hx = g_0 x\}$

$$= \{ h \mid x = h^{-1} g_0 \cdot x\} = \{ h \mid h^{-1} g_0 \in \mathrm{Stab}_x\} = \{ h \mid g_0^{-1} h \in \mathrm{Stab}_x\}$$

$= \{ h \mid h \in g_0 \mathrm{Stab}_x\} = g_0 \mathrm{Stab}_x$. Donc $g \mapsto gx$ est une bijection de $\{ g\cdot \mathrm{Stab}_x\}_{g\in G}$ dans $G\cdot x$ ▶

Proposition si $H < G$ et $G \curvearrowright X$ on a une application $H\backslash X \to G\backslash X$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H\backslash X \arrow[rr] & & G\backslash X \end{tikzcd}$$

commutatif.

Application

Formules orbitales

On suppose X et G fini alors

$$(i)\ \# G\cdot x = \# G / \# \mathrm{Stab}_x$$ Formules des classes

$$(ii)\ \# X = \sum_{y \in G\backslash X}' \# G / \# \mathrm{Stab}[y]$$

$$(iii)\ \# G\backslash X = \frac{1}{\# G}\Big(\sum_{x\in X}' \# \mathrm{Stab}_x \Big)$$

◀ Pour (iii) On écrit

$$\sum_{x\in X}' \# \mathrm{Stab}_x = \sum_{y\in G\backslash X}' \Big(\sum_{x \in [y]}' \mathrm{Stab}_x \Big) = \sum_{y\in G/X}' \big(\# G\cdot x \cdot \# \mathrm{Stab}_x \big) = \# G \cdot \#_{X\backslash G}$$

là on a utilisé le fait que $\mathrm{Stab}_{gx} = g\, \mathrm{Stab}_x\, g^{-1}$ et donc

$$\# \mathrm{Stab}_{gx} = \# \mathrm{Stab}_x \ (\text{cf (ii)})$$ ▶

Application :

Theoreme de Lagrange

Si $H < G$ alors $\# H$ divise $\# G$.

Proposition On suppose $\# G/H < \infty$, alors $\# G/H = \# H\backslash G$

◀ On choisit pour tout élément $f_i \in G/H$ un representant g_i de telle sorte que $f_i = g_i H$. On pose $\Psi : G/H \to H\backslash G$ donné par

$$\Psi(f_i) = H g_i^{-1}$$

Alors si $\Psi(f_0) = \Psi(f_1)$, On a $H g_0^{-1} = H g_1^{-1}$ donc $H g_1^{-1} g_0 = H$

donc $g_1^{-1} g_0 = h \in H$ donc $g_0 = g_1 h$; donc $g_0 H = g_1 H$

On a ainsi une injection de G/H dans $H\backslash G$ et réciproquement une injection de $H\backslash G$ dans G/H. Le résultat suit ▶

Remarque : l'hypothèse $\#G/H < \infty$ n'est pas nécessaire, mais on a alors besoin de plus de théorie des ensembles.

Définition Si $\#G/H < \infty$ (ou $\# H\backslash G$) fini on dit que H est d'indice fini dans G et on pose que l'indice de H dans G est $[G:H] = \# G/H = \# H\backslash G$

Sous groupes distingués.

1. Conjugaison, sous groupes distingués

Deux éléments g_1 et g_2, ou deux sous-groupes H_1 et H_2 sont conjugués, si il existe $h \in G$ tel que $g_1 = h g_1 h^{-1}$ (ou $H_1 = h H_2 h^{-1}$)

Un sous-groupe H de G est distingué (ou normal) si $\forall g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

NOTATION $H < G$ veut dire H sous groupe de G ; $H \lhd G$ veut dire de plus H distingué.

R : (i) tout sous groupe d'un groupe commutatif est distingué.

(ii) l'intersection de deux sous groupes distingués est distingué.

(iii) Si H est distingué alors $xH = Hx$, on a donc une bijection entre $H\backslash G$ et G/H qui rend le diagramme
$$\begin{tikzcd} & G/H \arrow[d, leftrightarrow] \\ G \arrow[ur] \arrow[r] & H\backslash G \end{tikzcd}$$
commutatif.

L'application : $G\times G \to G$; $g,h \mapsto ghg^{-1}$ definit une action appelée action par conjugaison. Dans le langage des actions de groupe $H<G$ est distingué si il est un sous-ensemble stable par l'action par conjugaison.

prop : Soit ϕ morphisme $G\to F$; $H<G \Rightarrow \phi(H)<F$; $H<F \Rightarrow \phi^{-1}(H)<F$

$H\triangleleft G \Rightarrow \phi(H)\triangleleft\phi(G)$; $H\triangleleft F \Rightarrow \phi^{-1}(H)\triangleleft F$

Applications et exemples : (i) $\{e\}\triangleleft G$; (ii) $G\triangleleft G$.

(iii) si φ morphisme de $G\to F$ alors $\mathrm{Ker}\,\varphi \triangleleft G$ (En effet $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}\{e\}$.

3. Groupes quotients

Théorème si H est distingué alors

$$\forall y \in Hy_0,\ \forall x\in Hx_0,\ xy \in H\cdot(x_0 y_0)$$

Corollaire, il existe une structure de groupe sur $H\backslash G$ telle que

$\pi : x \mapsto [x]$ est un morphisme de groupe.

Et alors $\mathrm{Ker}(\pi) = H$

Corollaire si N est distingué dans G, alors pour tout sous groupe H ;
HN est un sousgroupe de G

4. les trois théorèmes d'isomorphismes d'Emmy Noether

Théorème 1. Si f est un morphisme $G \to F$, alors on a un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f)\backslash G \to f(G)$, telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F \\ \mathrm{Ker}(f)\backslash G \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

En particulier, si G est fini, on a $\#f(G)\cdot\#\mathrm{Ker}(f) = \#G$.

Examples

Tout groupe engendré finiment est un quotient d'un groupe libre F_n où $n \in \mathbb{N}$

Théorème 2. Soit G un groupe, N un sous groupe distingué, H un groupe. Alors

(i) $N \cap H$ est un sous groupe distingué de H

et $H/_{H\cap N} \simeq HN/_N$

◀ On considère $H \xrightarrow{\phi} G/_N \xleftarrow{\psi} HN$; les images de ces deux morphismes sont les mêmes ; or $\mathrm{Ker}(\phi) = H\cap N$; $\mathrm{Ker}(\psi) = N$ ▶

Théorème 3. Soit G un groupe, $N \lhd G$; $M \lhd G$ et $M < N$; alors

$$N/_M \lhd G/_M \text{ et } (G/_M)/(N/M) = G/_N$$

◀ Mq $N/_M \lhd G/_M$; On considère $\pi : G \to G/_M$, alors

$\pi(N) \lhd \pi(G) = G/_M$ or $\pi(N) = N/_M$.

Par ailleurs on peut considerer $G/_M \to G/_N$ son noyau est $N/_M$

et elle est surjective ▶