Permutations

1. Premières définitions

Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E. On note $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}\{1, \dots, n\}$, On note $\mathfrak{S}(E)$, $\mathrm{Bij}(E)$, $\mathrm{Per}(E)$ l'ensemble permutation de E, muni de la loi de composition, c'est un groupe. $\#\mathfrak{S}(E) = \#E!$ appelé groupe symmetrique.

On note une permutation σ sous la forme d'un tableau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) \cdots & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ autrement dit

Une notation abrégée (à ne pas confondre avec la notation canonique) est $\sigma = [\sigma(1) \cdots\cdots \sigma(n)]$

Si φ est une bijection de $E \to F$, $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$, alors $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} := \varphi^*_\sigma$ est une bijection de E.

proposition : $\varphi^* : \mathfrak{S}(E) \to \mathfrak{S}(F)$ est un isomorphisme de groupe

Corollaire si $\#E = n$, alors $\mathfrak{S}(E) \approx \mathfrak{S}_n$

proposition : Si V est un e.v de dim n sur $\mathbb{K}$, de base $\{e_1, \dots, e_n\}$

On a un morphisme injectif : $\mathfrak{S}_n \to GL(V)$ donné par

$\sigma \mapsto \phi_\sigma$ où $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$

2. Quelques examples et signature

(i) permutation triviale

(ii) transposition : $\tau_{ij} \in \mathfrak{S}_n$

Def : Soit σ une transposition, On definit

$$\nu(\sigma) = \#\{(i,j) \mid i>j \text{ et } \sigma(i)<\sigma(j)\} \quad [2]$$

Proposition : si τ est une transposition $\nu(\tau) \equiv 1 \, [2]$

Proposition : $\nu(\sigma \circ \tau) + \nu(\sigma) + \nu(\tau) \equiv 0 [2]$

Corollaire : $\nu : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupe appelé signature

Ex : si $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ alors $\nu(\sigma) = k \, [2]$

⚠ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \{(-1, 1), \times\}$

$n \longmapsto (-1)^n$

On note quelque fois $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$; $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$

Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est le noyau de la signature.
c'est un sous groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$

3. Support d'une permutation, cycles et transposition

Def Si $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$, le support de σ est

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in E \,/\, \sigma(x) \neq x\}$$

Proposition le support de σ est stable par σ

si $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\tau) = \emptyset$ alors $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$

Def : Une permutation est cyclique si le support de σ est réduit à une seule orbite. On note alors

$$\sigma = (x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{n-1}(x)) \quad \text{où } n = \# \mathrm{Supp}(\sigma)$$

Il s'agit de la notation canonique d'une permutation cyclique

On dit aussi cycle ou permutation circulaire.

Exemple $(2\ 3\ 5\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = [1, 3, 5, 6, 2]$

Proposition Tout cycle d'ordre p est le produit de p-1 transpositions

$$(a_1, \dots\dots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{p-1}, a_p)$$

Corollaire Si σ est un cycle d'ordre p sa signature est $p-1$ [2]

Proposition : toute permutation est le produit de permutations cycliques de support disjoint

◀ On écrit $E = \bigsqcup_{i=1,\dots p} X_i$ où les X_i sont des orbites de σ

$J = \{ i / \# X_i > 1 \}$

si $j \in J$ on considère la permutation σ_j donnée par

$\sigma_j(x) = x$ si $x \notin X_j$; $\sigma_j(x) = \sigma(x)$ si $x \in X_j$

Alors $Supp(\sigma_j) = X_j$ et X_j est une orbite de σ_j

Par définition chaque σ_j est une permutation cyclique

de plus soit $\nu = \prod_{j=1}^{n} \sigma_j$

Alors $\nu(x) = \sigma(x)$ pour tout x de E ▶

⚠ l'unicité de la décomposition est un peu plus délicate à écrire...

Comment trouver la décomposition canonique de σ ?

(i) on prend l'orbite de 1 $\to X_1$

(ii) supposons $X_1, \dots, X_p$ connu on prend alors

$x_{p+1} = \operatorname{Inf} \{ x / x \notin X_i , i \in \{1, \dots, p\} \}$ puis on prend l'orbite de x_{p+1}

$\rightsquigarrow$ $E = \bigsqcup_{i=1}^{q} X_i$; $X_i = \{ x_i, \sigma(x_i), \dots\dots \sigma^{n_i - 1}(x_i) \}$

On ne garde que les i tel que $n_i > 1$, $J = \{ i \mid n_i > 1 \}$

$$\sigma = \prod_{j \in J} (x_j, \sigma(x_j), \dots, \sigma^{n_j - 1}(x_j))$$

Ex : On prend $(1\ 4\ 5)(5\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 6)$

Theoreme les transpositions élémentaires $\nu_i = \tau_{i\ i+1}$ $i \in \{1, \dots n-1\}$ engendre $\mathfrak{S}_n$

◀ On observe

$$(i, i+1)(i+1, j)(i, i+1) = (i, j) \text{ avec } j > i+1$$

En particulier si $T_p = \{ \tau_{i,j} \text{ avec } |i-j| < 1 \}$

Alors $\forall \nu \in T_p$ il existe $\sigma \in T_1$ telle que

$$\nu = \sigma \xi \sigma \quad \text{où } \xi \in T_{n-1}$$

Donc par recurrence toute transposition est le produit de transpositions élémentaires. Comme toute permutation est un produit de cycle et tout cycle en produit de transposition, on en deduit que toute transposition est le produit de transpositions elementaires ▶

4. Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$

Si G est un groupe une classe de conjugaison est une orbite sous l'action de conjugaison :

$$[g] = \{ hgh^{-1} \mid h \in G \}$$

Deux éléments de la même classe de conjugaison sont dits conjugués .

Proposition $hg = \xi h$ alors $hg^n = \xi^n h$

Proposion si $\sigma = \phi \eta \phi^{-1}$, Alors l'image par ϕ d'une orbite de η est une orbite de σ :

◀ Soit x telle que $\eta^{q+1}(x) = x$; $\phi \eta^n(x) = \sigma^n \phi(x)$, et par recurrence

$$\phi(x, \eta(x), \dots, \eta^q(x)) = (\phi(x), \phi(\eta(x)), \dots \phi(\eta^n(x)))$$
$$= (\phi(x), \sigma(\eta(x)), \dots, \sigma^n(\phi(x)))$$

Une partition de n est un ensemble d'entiers (avec repetition)

$$\text{avec } n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_q \quad \text{et } \sum_{i=1}^{q} n_i = n$$

Partition de 5 : 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.

La partition associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la partition de n donnée par le cardinal des orbites de σ ordonné en sens croissant

Par exemple : $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ donnée par

$$(1,2,3)(5,6,7)(8,9) \rightsquigarrow 3+3+2+\underset{\substack{\downarrow \\ \text{orbite triviale}}}{1} = 9$$

Théorème Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont la même partition associée.

◀ Supposons $\sigma = g \eta g^{-1}$ alors $g : E \to E$ donne une bijection entre les orbites de σ et celle de η. Comme la partition ne depend que du cardinal des orbites, σ, η ont la même partition associees.

Supposons maintenant que σ et η ont la même partition associée. Ecrivons alors $X = \{1, \dots, n\}$

$$X = X_1 \sqcup \cdots X_q \quad ; \quad X_i \text{ orbites de } \sigma \qquad \# X_i \geq \# X_{i+1}$$

$$Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_{q'} \quad , \quad Y_j \text{ orbite de } \eta \qquad \# X_j \geq Y_{j+1}$$

Par hypothèse $\# X_i = \# Y_i$, $q = q'$

Ecrivons ensuite $X_i = \langle \sigma \rangle x_i$ $\quad Y_i = \langle \eta \rangle y_j$

Alors x_i et y_i ont le même ordre, et on peut definir $\phi(\sigma^p(x_i)) = \eta^p(y_i)$ sans ambiguite

Alors $\phi \sigma = \eta \phi$ donc σ et η sont conjuguées ▶