Représentations

I Premières définitions et exemples

Une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel V (sur $\mathbb{K}$) est un morphisme ρ de G dans $GL(V)$

si ρ est une représentation de G sur V_0, si $g \in \mathrm{Iso}(V_0, V_1)$

$$\rho_g : \gamma \longmapsto g\rho(\gamma)g^{-1}$$

est une représentation de G sur V_1 dite conjuguée ou isomorphe à ρ

Exemple :

1) $G = \mathfrak{S}_n$ $\quad \rho$: G sur $\mathbb{K}^n$

$$\rho(\sigma)(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots\dots x_{\sigma^{-1}(n)})$$

2) $G = S^1$ $\quad \rho$: G sur $\mathbb{C}$

$$\rho_n(e^{i\theta}).u = e^{in\theta}.u$$

3) $V_n = \{\text{Polynome homogène à 2 variables de degre } n-1\}$

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i Y^{n-i+1} \quad ; \quad \dim V_n = n \quad ; \quad V_n \subset C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$G = SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$$

On a une représentation de G sur V_n donnée par

$$\rho(A).P = P \circ A^{-1} \; ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(X^i Y^{n-1}) = (dX - cY)^i(-bY + aX)^{n-i}$$

II Représentations unitaires et irréductibles

prop : Une representation de G sur V definit une action de G sur V : $(g, v) \longmapsto \rho(g).v$

Un sous espace vectoriel $W \subset V$ est stable par la representation si il est stable par l'action, c'est à dire:

$$\forall g \in G, \forall w \in W, \ \rho(g)w \in W$$

En particulier, $g \mapsto \rho(g)|_W$ est une représentation de G sur W dite sous représentation de V (ou ρ)

Exemple: Soit $A \in GL(V)$; Un sous-espace propre de A est stable par la representation de $\mathbb{Z}$ donné par A.

prop si $v \in V$, $\langle G.v \rangle = \text{Vect}\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ est une sous representation de ρ.

Une representation est irreductible si il n existe pas de s.e.v stables autre que $\{0\}$ ou l'espace total. Une representation est completement reductible si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ ou les W_i sont stables et irreductibles

Exemple : La representation de $\mathfrak{S}_n$ est-elle irreductible ?

Theorème
Toute representation irreductible d'un groupe fini est de dimension finie

Une represensation ρ est unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et il existe une metrique hermitienne h sur V telle que

$$h(\rho(u), \rho(v)) = h(u,v)$$

Theorème. Toute representation unitaire de dimension finie est complètement réductible.

◀ Si ρ est unitaire, on montre tout d'abord que si $W_0 \subset V$ est un un sous espace stable, alors $W_0^\perp$ est egalement stable.

On raisonne par récurrence sur la dimension : si $\rho : G \curvearrowright V$ est unitaire et non irreductible alors il existe un sous espace W_0 stable. Alors $V = W_0 \oplus W_0^\perp$ avec $\dim W_0$ et $\dim W_0^\perp < \dim V$, et $W_0, W_0^\perp$ stable. Ensuite, l'hypothese de recurrence pemet d'ecrire $W_0 = W_1 \oplus \cdots W_p$, $W_0^\perp = W_{p+1} \oplus \cdots \oplus W_q$ avec W_i stable et $\rho|_{W_i}$ irreductible ▶

Theoreme Toute representation d'un groupe fini est unitaire

◀ Soit ρ une représentation de G avec $\# G < \infty$ sur V.

Soit h une metrique hermitienne sur V. Pour chaque g de G posons

$$h_g : (u,v) \mapsto h(\rho(g)u, \rho(g)v)$$

On vérifie alors que h_g est hermitienne, et que

$$h_{gh}(u,v) = h_g(\rho(h(u)), \rho(h(v)))$$

Posons alors $H(u,v) = \sum_{g \in G}' h_g(u,v)$.

Alors $H(\rho(h)u, \rho(h)v) = \sum_{g \in G}' h_g(\rho(h)u, \rho(h)v) = \sum_{g \in G}' h_{gh}(u,v)$

Or l'application $g \mapsto g' = gh$ est une bijection donc

$$H(\rho(h)u, \rho(h)v) = \sum_{g' \in G}' h_{g'}(u,v) = H(u,v)$$ ▶

III Description des representations unitaire d'un groupe fini

1) La representation reguliere

Soit G un groupe fini on note

$$L^2(G) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \}$$

muni de la métrique hermitienne

$$\langle f | g \rangle = \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

On considère $\lambda : G \curvearrowright L^2(G)$ définie par

$$\lambda(y) f \ : \ x \longmapsto f(y^{-1} x)$$

Proposition : λ est une representation unitaire de G sur $L^2(G)$ dite représentation régulière (à gauche)

◀ On a $\lambda(yz) f(x) = f(z^{-1} y^{-1}(x)) = (\lambda(z) f)(y^{-1} x) = \lambda(y)[\lambda(z) \cdot f](x)$

De plus $\langle \lambda(y) f | \lambda(y) g \rangle = \sum_{x \in G} (\lambda(y) f)(x) \cdot \overline{(\lambda(y) g)(x)}$

$$= \sum_{x \in G} f(y^{-1} x) \overline{g(y^{-1} x)} = \sum_{x' \in G} f(x') \overline{g(x')} = \langle f | g \rangle \ ▶$$

Soit pour tout $x \in G$ la fonction δ_x sur G telle que $\delta_x(x) = 1$, $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Alors

proposition $(\delta_x)_{x \in G}$ forme une base orthonormale de $L^2(G)$

De plus $\lambda(y) \delta_x = \delta_{yx}$, $\langle f | \delta_x \rangle = f(x)$

◀ On a $f = \sum_{x \in G} f(x) \delta_x$; le reste se vérifie aisément ▶

2) Representations irreductible

Proposition : Soit ρ une representation irreductible de G sur W

Alors il existe $\Psi : W \to L^2(G)$ injective telle que

$$\Psi \circ \rho(g) = \lambda(g) \circ \Psi$$

Corollaire toute representation irreductible de G est isomorphe à une sous-representation de la representation regulière de G.

◀ Soit ρ une représentation irréductible de G sur W. Soit $\langle , \rangle$ une metrique hermitienne sur W preservée par g. Soit w_0 un vecteur non nul de W.

On construit l'application

$$\Psi : \quad W \longrightarrow L^2(G)$$
$$w \longmapsto f^w, \quad f^w(x) = \langle w \mid \rho(x) w_0 \rangle$$

Cette application est lineaire et verifie

$$\lambda(g) f^w(x) = f^w(g^{-1}x) = \langle w \mid \rho(g^{-1}x) w_0 \rangle$$
$$= \langle w \mid \rho(g^{-1}) \rho(x) w_0 \rangle = \langle \rho(g) w \mid \rho(x) w_0 \rangle = f^{\rho(g) w}(x)$$

Donc $\Psi(\rho(g) w) = f^{\rho(g) w} = \lambda(g) f^w = \lambda(g) \Psi(w)$

En particulier ...

a) $\mathrm{Ker}\,\Psi$ est stable par $\rho(g)$. Comme $\rho(g)$ est irréductible et $\Psi \neq 0$ On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\Psi = \{0\}$.

b) Donc Ψ est injective et bijective sur son image $\Psi(W)$ qui est stable par λ et ireductible. [= preuve du corollaire] ▶

IV | Représentations des groupes abéliens.

le cas des groupes abeliens :

Théoreme : Toute representation irréductible d'un groupe abelien est de dimension 1.

Théorème [vu en exercice]

Toute representation de dimension finie de S^1 est unitaire.

Toute representation ireductible de S^1 est isomorphe à l'un des ρ_n

VI La représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.

On considere $\mathfrak{S}_n \circlearrowright \mathbb{R}$: $\rho(\sigma)(x_1,\dots,x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)},\dots x_{\sigma^{-1}(n)})$

Cette representation se decompose en deux sous representations

$$\mathbb{R}^n = \Delta \oplus H$$

$$\Delta = \langle 1,\dots\dots,1\rangle$$

$$H = \{(x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

Si $X = (x_1,\dots,x_n)$; $Y = (y_1 \dots y_n)$ et $\langle X|Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Alors $\langle\sigma(X)|\sigma(Y)\rangle = \langle X|Y\rangle$

La representation de σ restreinte à H est la représentation standard

Théorème la representation standard est irreductible

1. Proposition : Soit f une symetrie $\perp$ par rapport à un hyperplan P
Alors si Q est stable par f : $Q = Q\cap P \oplus Q\cap P^{\perp}$

2. Proposition : $\mathfrak{S}$ agit transitivement sur $\{(i,j),\ i\neq j\}$

◀ Soit $X = \{(i,j) \mid i\neq j\}$

$$\operatorname{stab}_{(i,j)} = \{\sigma \mid \sigma(i)=i,\ \sigma(j)=j\} ;\ \# \operatorname{stab}_{ij} = \# \mathfrak{S}_{n-2}$$

$$\frac{\# \mathfrak{S}_n}{\# \mathfrak{S}_{n-2}} = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = \# X$$

donc $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur X ▶

◀ On remarque tout d'abord que $\rho(\tau_{ij})$ est la symétrie par rapport au plan H_{ij} d'équation $x_i = x_j$.

On remarque que $\rho(\sigma) H_{ij} = H_{\sigma(i)\sigma(j)}$, donc $\rho(\sigma)\Delta_{ij} = \Delta_{\sigma(i)\sigma(j)}$

où $\Delta_{ij} = H_{ij}^{\perp}$

Maintenant si V est stable par ρ on en deduit que $V = (H_{ij}\cap V) \oplus (V\cap \Delta_{ij})$

1) Soit $F = \{ (i,j) \mid \Delta_{ij} \subset V \, , \, i \neq j \}$ alors si $F \neq \emptyset$, comme $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \setminus$ diagonale

Alors $F = [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \setminus$ diagonale

Donc $\forall i,j \quad \Delta_{ij} \subset V$ or $\mathrm{Vect}(\Delta_{ij} \, , i \neq j) = H$, donc $H \subset V$

2) Si F est vide, alors $V = V \cap H_{ij} \subset H_{ij}$ et donc $V \subset \bigcap_{i,j} H_{ij} = \Delta$ ▶