Barycentre

I Barycentre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_1^1 \lambda_i = 1$ et $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$

Alors les propriets suivants sont equivalents pour $G \in \mathcal{E}$

(i) $\sum_1^1 \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = 0$

(ii) $\exists\, O,\ \sum_1^1 \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OG}$

(iii) $\forall M\ ;\ \sum_1^1 \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{MG}$

G est le barycentre des P_i affectés des poids λ_i. On le note quelque fois

$G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i$. Si $\forall i,j\ \lambda_i = \lambda_j$, on parle d'isobarycentre

Propriétés

3) [Associativité des barycentres]

Soit $M_i = \sum_j^1 \mu_j P_j^i$; Alors

$\sum_1^1 \lambda_i M_i = \sum_{i,j}^{1} \lambda_i \mu_j\ P_j^i$

4) les coordonnées du barycentres sont les barycentres des coordonnées.

Application de 3) : les médianes d'un triangle se coupe dans l'isobarycentre des sommets : $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

II Géometrie affine vu des barycentres

Theoreme 1) Soit A un sous espace affine, alors le barycentre de points de A est dans A

2) Soit $X \subset \mathcal{E}$, si le barycentre de tout ensemble de points de X est dans X alors, X est affine

▲ $O \in A$, $M_1, \dots, M_n \in A$ alors par definition, si $\sum_1^1 \lambda_i = 1$

$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OM_n} \in \vec{A}$ car $\overrightarrow{OM_n} \in \vec{A}$ donc $\overrightarrow{OG} \in \vec{A}$

donc $G \in A$.

Reciproquement. Soit $O \in X$, Considerons $V_0 = \{\vec{OM} \mid M \in X\}$

1) Soit $u \in V_0$, montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in V_0$

On écrit $u = \vec{OM}$ avec $M \in X$

alors Soit M_0 le barycentre de (O, M) avec les poids $(1-\lambda, \lambda)$

Alors $\vec{OM_0} = \lambda \vec{OM} + (1-\lambda)\vec{OO} = \lambda \vec{OM} = \lambda u \quad \in V_0$ car $M_0 \in X$

2) Soit $u, v \in V_0$, montrons que $u+v \in V_0$. On ecrit $u = \vec{OM}$

$v = \vec{ON}$.

Soit P le barycentre de N, O, M avec les poids $(1, -1, 1)$

Alors $P \in X$ et $\vec{OP} = 1 \cdot \vec{ON} - 1 \cdot \vec{OO} + \vec{OM} \cdot 1 = \vec{ON} + \vec{OM} = u + v \quad \in V_0$

Donc V_0 est un espace vectoriel

Theoreme Soit $X \subset \mathcal{E}$ espace affine, alors

$$\mathrm{Aff}(X) = \{ \text{barycentres de points de } X \}$$

◀ Soit $\mathcal{B} = \{$ barycentre de points de $X \}$. Par le theoreme precedent $\mathcal{B} \subset \mathrm{Aff}(X)$.

Par ailleurs, par associativité des barycentres, (et le theorème) précédent, $\mathcal{B}$ est un sous espace affine qui contient X

donc $\mathrm{Aff}(X) \subset \mathcal{B}$ ▶

Théoreme 1) Si A est affine et $B = \sum_1^I \lambda_i M_i$ avec $\sum_1^I \lambda_i = 1$

alors $A(B) = \sum_1^I \lambda_i A(M_i)$

2) Reciproquement si $A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et verifie $A(\sum_1^I \lambda_i M_i) = \sum_1^I \lambda_i A(M_i)$, $\forall M_i, \forall \lambda_i, \sum_1^I \lambda_i = 1$

Alors A est affine.

Convexité

Maintenant $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension fini

1. Définitions et premières propriétés

Si $a,b \in \mathcal{E}$ le segment $[a,b] := \{ ta+(1-t)b \mid t\in[0,1]\}$

Comme $ta+(1-t)b = b+t(a-b)$; $[a,b] \subset (a,b)$

$C \subset \mathcal{E}$ espace affine est convexe si $\forall a,b \in C$, $[a,b]\subset C$.

prop i) l'intersection de convexes est convexe

ii) $\mathcal{C}$ convexe $\Leftrightarrow$

$\sum_1^r \lambda_i = 1$; $\lambda_i \geqslant 0$ $P_i \in \mathcal{E}$ alors $\sum_1^r \lambda_i P_i \in \mathcal{E}$

iii) Si C est convexe, alors son adhérence $\bar{\mathcal{C}}$ est convexe.

Soit $A \subset \mathcal{E}$, alors l'enveloppe convexe de A $\mathrm{Env}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A. C'est le plus petit convexe contenant A.

prop | $\mathrm{Env}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A.

exemple : triangle

la dimension d'un convexe $\mathcal{C}$ est la dimension de $\mathrm{Aff}(C)$

2. Un peu de géométrie des convexes.

Soit H un hyperplan affine, Un demi-espace ouvert (de bord H) est l'une des composantes connexes de $\mathcal{E}\setminus H$. Un demi-espace fermé est le complémentaire d'un demi espace fermé ;

Ex Si $H = \{M \mid f(M-O) = \theta\}$ où f linéaire

les ½ espaces ouverts sont

$$H^{>0} = \{M \mid f(M-O) > \theta\},$$

$$H^{<0} = \{M \mid f(M-O) < \theta\}$$

les demi espaces fermes de bord H sont

$$H^{\leq 0} = \{M \mid f(M-O) \leq 0\}$$
$$H^{\geq 0} = \{M \mid f(M-O) \geq 0\}$$

Un hyperplan H, associé aux deux demis-espaces ouverts H_1 et H_2 sépare X de Y, $X, Y \subset \mathcal{E}$ si $X \subset H_1$ et $Y \subset H_2$

prop Soit C un convexe fermé. Soit $x \in \mathcal{E} \setminus C$. Il existe alors un hyperplan affine H séparant x de $\mathcal{C}$:

◀ On identifie $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que x est à l'origine. Soit alors $\alpha = \inf(\|u\|^2 \mid u \in \mathcal{C})$. Soit $u_n \in \mathcal{C}$, tel que $\|u_n\|^2 \to \alpha$. Alors u_n est une suite

bornée qui converge (aprés extraction de sous-suite) vers u_0. Pour tout $u \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$ on on donc $\|tu + (1-t)u_0\|^2 \geq \|u_0\|^2$. Donc $t^2\|u-u_0\|^2 + t\langle u-u_0 | u_0\rangle \geq 0$ pour tout t.

Donc $\langle u-u_0 | u_0\rangle \geq 0$. Comme $\langle 0-u_0 | u_0\rangle < 0$, l'hyperplan affine

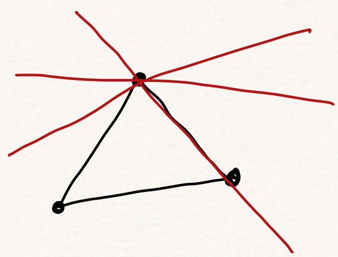
$H = \{u \mid \langle u-u_0 | u_0\rangle = 0\}$ sépare 0 de $\mathcal{C}$. ▶

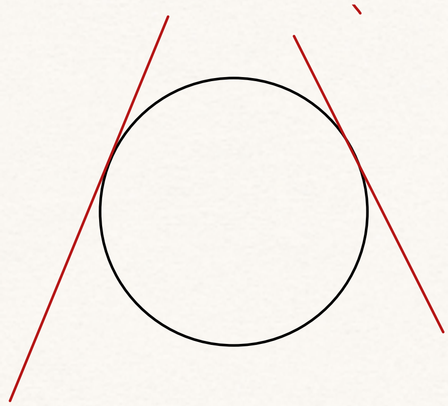
Soit C un convexe, un hyperplan d'appui pour C est un hyperplan tel que

(i) $H \cap C \neq \emptyset$

(ii) $C \subset H_1$, demi espace fermé de bord H

Exemple





Corollaire : si $\alpha \in C$ et $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$ avec $\alpha_n \notin C$, alors il existe un hyperplan d'appui H passant par α.

Un point x de $\mathcal{C}$ est extrêmal si $\forall y, z \in C$ tq $x \in [y,z]$ alors $x = y$ ou $x = z$.

prop Soit H un hyperplan d'appui, si x est un point extremal de $H \cap \mathcal{C}$ alors x est un point extremal de $\mathcal{C}$

◀ En effet, si $[a,b] \subset \mathcal{C}$ et $d \in]a,b[\cap H$ alors $[a,b] \subset H$ ▶

prop : Tout convexe compact possède un point extremal.

◀ Preuve par récurrence sur la dimension ▶

3. Intérieur d'un convexe

Soit C un convexe, alors l'intérieur de C est l'intérieur topologique de C dans $\mathrm{Aff}(C)$

Prop : Soit C un convexe fermé

1) $\mathrm{Int}(C)$ est non vide
2) si $x \in \mathrm{int}(C)$, $y \in C$ alors $\forall t \in]0,1[$ $tx + (1-t)y \in \mathrm{int}(C)$. En particulier $\mathrm{int}(C)$ est convexe
3) Soit $x \in \mathrm{Int}(C)$ et H un hyperplan passant par x alors $x \in \mathrm{Int}(C \cap H)$.

4) Si $x \notin \mathrm{Int}(C)$, alors $x \in H$ = hyperplan d'appui

◀ 1) Soit S l'ensemble des points extremaux de C.

On a $\dim(\mathrm{Aff}(C))$

Il existe donc $x_0, \dots, x_n \in C$ tel que

$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aff}(x_0, \dots, x_n)$$

On considère le repère $(x_0, \overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n})$

l'isobarycentre y de $(x_0, \dots, x_n)$ est de cordonnées $\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$

et tous les points de cordonnees $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_1^n \lambda_i < 1$

sont dans $\mathrm{Env}(x_0, \dots, x_n) \subset C$. Donc $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$.

2) Soit $a \in \mathrm{int}(C)$. Soit $t \in [0,1]$ et $b \in C$

il existe un ensemble ouvert U de vecteur tel que $a + U \subset C$

Alors si $u = tv \in tU$ alors $(at + (1-t)b) + u =$

$(a+v)t + (1-t)\, b \in C$. Ainsi $ta + (1-t)b \in \mathrm{Int}(C)$.

3) En effet si U est un ouvert $U \cap H$ est un ouvert de H

prop : tout convexe fermé est l'intersection de ces demi-espaces d'appui

◀ On peut supposer $\mathrm{Aff}(C) = \mathcal{E}$

Soit $\mathcal{C}_0$ l'intersection des demi espaces d'appui de $\mathcal{C}$. Evidemment $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$. Soit $x \in \mathcal{C}_0 \setminus \mathcal{C}$ (si non vide). Soit $z \in \mathrm{Int}(C)$, soit y dans $\mathcal{C}$, tel que $[z,y] = \mathcal{C} \cap (zx)$, le m raisonnement que précédement produit un hyperplan d'appui H tel que i) H passe par y

ii) $C \subset H_1$, $x \in H_2$, comme $y \in H$, et $z \notin H$ (car interieur) $x \notin H$ et donc $x \notin H_1$ contradiction

4. Enveloppe convexe en dimension finie

Thm Soit C un convexe compact dans un espace affine de dim n.
Alors tout point de C est le barycentre à coefficients positifs de $n+1$ points extrémaux (possiblement confondus)

◀ On utilise une recurrence sur la dimension. C'est vrai pour $n=1$:

Un convexe compact de dimension 1 est un segment $[a,b]$. Ces points extremaux sont a et b. Le résultat suit.

Supposons la propriete vrai pour n, ~~et~~ soit C un convexe dans un espace affine de dimension $n+1$. Soit $x \in C$.

(i) si x est extremal c'est fini

(ii) sinon il existe s extremal, $s \neq x$. On considère alors la droite

$D=(s,x)$. Alors $D \cap C$ est convexe compact. Un convexe compact d'une droite est un segment fermé. Comme s est extremal, s est (par definition) l'une des extremités de ce segment. Soit α l'autre extremité de ce segment. Alors

- $x \in [s,\alpha]$, x est barycentre à coeff $\geqslant 0$ de s,α
- Il existe un hyperplan d'appui H passant par α : en effet $\alpha \in C$ et $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, $\alpha_n \notin C$.

$\alpha \in H \cap C = C_1$ qui est convexe et compact. Par recurrence, α est le barycentre à coefficients $\geqslant 0$ de $n+1$ points extremaux $s_0, \ldots, s_n$ de C_1

Le resultat suit de l'associativite des barycentres. ▶

Corollaire 1 : tout convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux.

Corollaire 2 : L'enveloppe convexe d'un compact est compact en dimension finie

Polytopes.

Un polytope est une intersection non vide d'une famille finie de demi-espaces d'un espace affine de dim n

Si P est un polytope de dim 2, on parle de polygone,

si $\dim P = 3$ on parle de polyèdre, et Aff(P

A partir de maintenant on s'interesse aux polyèdres

On note $\partial P = P \setminus \mathrm{int}(P)$; $P = \bigcap_{i=1}^{n} H_i^+$

un sommet de P = un point extremal de P

une face de P = l'interieur de l'intersection de H_i avec ∂P

une arête de P = segment joignant deux sommets dans le bord d'une face.

On admettra

$$\partial P = \bigsqcup \{faces\} \bigsqcup \{segments\} \bigsqcup \{sommets\}$$

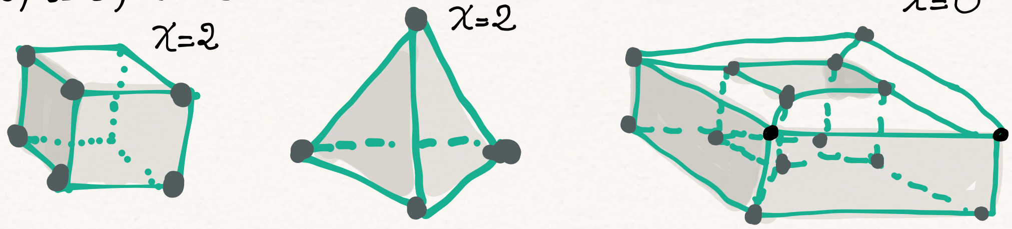
Théorème (Euler)

Soit P un polytope de dimension 3. Soit $f = \#$ faces, $s = \#$sommets ; $a = \#$ arêtes. Alors

$$\chi = f - a + s = 2$$

Exemples et «contrexemples»

$f=6,\ s=8,\ a=12$ $\chi=2$ — $f=4,\ s=4,\ a=6$ $\chi=2$ — $f=16;\ s=16,\ a=32$ $\chi=0$



<u>Première preuve</u>

Nous avons besoin d'un resultat preliminaire. Un graphe planaire (fini, borné) est un ensemble fini de segments bornés ne s'intersectant qu'à leurs extremités. Ces extremités sont appelés sommets, les arcs arêtes, et les faces sont les composants connexes du complementaire de l'union Γ des segments. On supposera Γ connexe ce qui suffit à assurer que chaque face a un bord connexe. Alors

$$\#\text{faces} - \#\text{arêts} + \#\text{sommets} = 2.$$

Notons $A=\{\text{arêts}\}$, $F=\{\text{faces}\}$, $S=\{\text{sommets}\}$

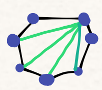
Pour $s\in S$, $f\in F$ telque $s\in\partial f$. On note $\theta(s,f)$

l'angle s θ f. On va calculer

$\text{Ⓗ} = \sum' \theta(s,f)$ de deux manière differentes

a) $\text{Ⓗ} = \sum'_{s}\left(\sum'_{f\,|\,s\in\partial f}\theta(s,f)\right) = \sum'_{s} 2\pi = 2\pi(\#\text{ sommets})$

b) si maintenant f est une face bornée ayant a_f côtés



$$\sum'_{s\in\partial f}\theta(s,f) = \pi(a_f-2)$$

[On découpe en triangles]

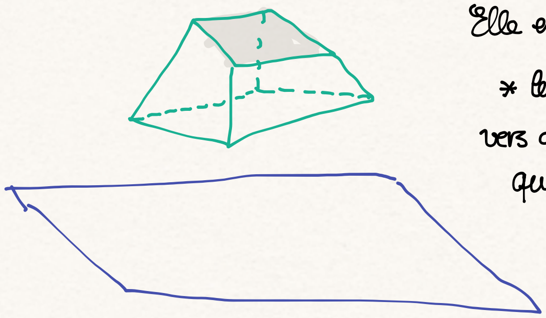
Pour la face f_0 infini on a (en considerons la face complementaire)

$$\sum_{s\in\partial f_0}{}' (2\pi - \theta(s,f)) = \pi(a_{f_0}-2) \text{ et donc } \sum_{s\in\partial f_0}{}' \theta(s,f_0) = \pi(a_{f_0}+2)$$

Ainsi $\sum_{f}{}' \left(\sum_{s\in\partial f}{}' \theta(s,f)\right) = \pi\left(\sum_{f}{}' a_f\right) - 2\pi(\#F-2)$

Or $\sum_{f}{}' a_f = 2\,\#$arêtes. Ai #sommets − #arêtes + # faces = 2 ▶

◀ Soit P un polytope. Soit F une face. Soit H un plan // à cette face et tel que P est compris entre $Aff(F)$ et H. Si y $t(F)$ la projection radiale par rapport à y est un homeo de $\partial P \setminus F$ sur H.



Elle envoie

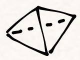
* les arêts de P (autres que celles de F) vers des segments de H (ne s'intersectant) qu'aux extremites. Soit A l'ensemble de ces segments.

* les faces de P (autre que F) sur des composantes connexes du complémentaires de l'union des segments

Si on considère maintenant le polyèdre $P' = P \cap H'$ où H' est un demi espace (dont le bord est // à H) tel que $y \notin H'$.

Alors, on voit que, P' a le même nombre de faces, arêts sommets que P. les arêts de P' s'envoient sur les arêts d'un graphe Γ fini borné connexe. les sommets et faces de P sur les sommets et faces de P'. Le résultat suit alors. ▶

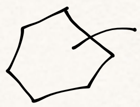
Deuxième méthode : récurrence sur le nombre de sommets

$s=4 \Rightarrow$ tetraèdre  $f=4,\ s=4,\ a=6 \quad f+s-a=2$

On suppose la propriété connue pour un polygone à n sommets.

Soit P de sommets $x_1, \ldots, x_{n+1}$; Soit $Q = \mathrm{Env}(x_1, \ldots, x_n)$

$x_{n+1} \notin Q$; il existe alors une face $F \subset Q$ qui sépare x_{n+1} de Q



On a donc $Q = P \cap H^+$; soit $P' = P \cap H^-$

$\rightsquigarrow$ on montre alors que a) tout sommet de Q et P' est sommet de P

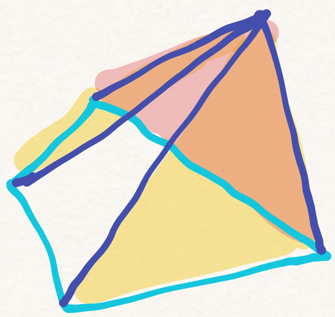
b) toute arête ....

c) toute face de Q et P' sauf F

Soit $p = \#$ arête de $F = \#$ sommet de F

$$f = f_Q + s_Q - a_Q + f_{P'} - s_{P'} - a_{P'} - 2 \underbrace{-p}_{\text{arête commune de } P' \text{ et } Q} \underbrace{+p}_{\text{sommets commun de } P' \text{ et } Q} = f_{P'} - s_{P'} - a_{P'}$$

Maintenant $f_{P'} = p+1$; $s_{P'} = p+1$; $a_{P'} = p+p$



Donc $f_{P'} - a_{P'} + s_{P'} = 2$ ▶

3. Polytopes réguliers en dimension 3

Un polyèdre est topologiquement régulier si

i) toutes les faces ont le même nombre de sommets N

ii) Chaque sommet appartient exactement à P faces

Théorème si $\mathcal{G}$ est un polytope regulier et (N,P) comme au dessus

alors $(N,P,s,a,f) = (3,3,6,4,4)$: cube

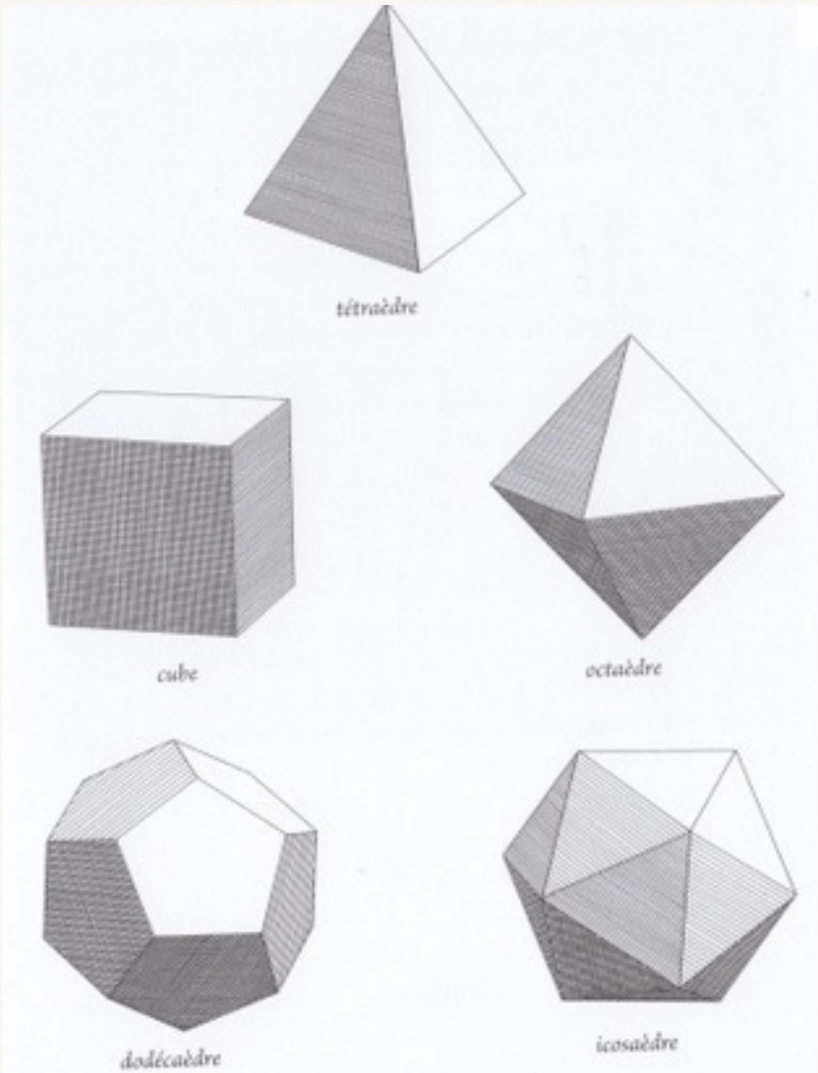
$= (3,4,12,6,8)$: octaèdre

$= (4,3,12,8,6)$: cube

$= (3,5,30,12,20)$: icosaèdre

$= (5,3,30,20,12)$: dodecaèdre.

Tous ces cas sont réalisés dans les 5 solides platoniciens



◀ En comptant les paires (A,F) où A arête $\subset F$ faces

on a $2a = Nf$. De même $Nf = Ps$ en comptant les paires

(S,F) où S est un sommet de la face F

$f - a + s = 2$ devient $\frac{2a}{N} + \frac{2a}{P} = 2 + a$

donc $\frac{2}{N} + \frac{2}{P} = \frac{2}{a} + 1 > 1$ $\qquad \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{a} + 1$; $10 + 6 = \frac{30}{a} + 15$

Par ailleurs $N, P \geqslant 3$.

Pas de solution pour $N \geqslant 6$. $P \geqslant 3$ $\quad \frac{2}{N} + \frac{2}{P} \leqslant \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1$

des seules solutions pour $N = 3$ sont $P = 4, 5$

$N = 4 \Rightarrow P = 3$

$N = 5 \Rightarrow P = 3$

Avec les valeurs correspondantes pour a, s et f on obtient le tableau suivant

N	P	a	s	f	
3	3	6	4	4	tetraèdre
3	4	12	6	8	octaèdre
4	3	12	8	6	cube
3	5	30	12	20	icosaèdre
5	3	30	20	12	dodécaèdre

▶