Les groupes $SL_2(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$

1) Les groupes classiques

Le groupe $SL_n(\mathbb{K}) = \{ g \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(g) = 1 \}$

Ce groupe possède des sous groupes importants

$\Delta_n(\mathbb{K}) = \{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \}$ matrices diagonales

$B_n^+(\mathbb{K}) = \{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \}$

$B_n^-(\mathbb{K}) = \{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i < j \}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$O_n(\mathbb{R}) = \{ (a_{ij}) = A \mid A^t A = id \}$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$U_n(\mathbb{C}) = \{ (a_{ij}) \mid A^t \bar{A} = id \}$

$SU_n(\mathbb{C}) = \{ A \mid A \in U_n(\mathbb{C}), \det A = 1 \}$

Soit g la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$g((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

prop : $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices des endomorphismes F de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$g(F(u), F(v)) = g(u, v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

Soit h la métrique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ donnée par

$$h((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$$

prop : $U_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices des endomorphismes F de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$h(F(u), F(v)) = h(u, v), \ \forall u, v \in \mathbb{C}^n$$

2) Générateurs de $SL_n(\mathbb{K})$

Théorème : les groupes $B_n^+(\mathbb{R})$ et $B_n^-(\mathbb{R})$ engendrent $SL_n(\mathbb{R})$

◀ le cas $SL_2(\mathbb{R})$: Soit G le groupe engendré par B_n^+ et B_n^-

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ s & 1+st \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\lambda & b/\lambda \\ c\lambda & d/\lambda \end{pmatrix}$$

On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ba \\ c/a & \mu \end{pmatrix}$ comme $\det\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & u \end{pmatrix} = 1$

On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \in G$

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a = 0$; $\Rightarrow b \neq 0$

Alors $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & * \\ * & * \end{pmatrix} \in G$ ▶

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une transvection est une application linéaire F de $V \supseteq V$ telle qu'il existe un hyperplan H, un vecteur v telle que (i) $H \oplus \langle v \rangle = V$; (ii) $F|_H = \mathrm{Id}$, (iii) $F(v) - v \neq 0$ et $\in H$

Théorème : $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

⚠ ce théorème est plus faible que le précédent. Il est démontré dans le poly.

3) Exponentielles et logarithme

On rappelle que $\exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et

$\log(A) = \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n+1}(A-I)}{n}$ converge pour A dans un $\mathcal{V}(I)$

On a alors $\exp(\log)(A) = A$; $\log(\exp(A)) = A$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

$\log(A^2) = 2\log(A)$

prop | exp est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un $\mathcal{V}(\mathrm{Id})$, d'inverse log

prop | $\frac{\partial}{\partial t \partial s}\Big|_{t,s=0} \left(\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)\exp(sA)\right)$
$= AB - BA =: [A,B]$

les démonstrations (en complément) des deux résultats suivants sont détaillées en exercice :

prop | si f est un morphisme continu de $\mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe une matrice A telle que
$$f(t) = \exp(tA)$$

On considère $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit F un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On dit que

$F \subset GL_n(\mathbb{K})$ est fermé si $\overline{F} \cap GL_n(\mathbb{K}) = F$. On dit que F est discret si il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité tel que $F \cap U = \{\mathrm{Id}\}$

Exemple : les sous groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $B_n^{\pm}(\mathbb{R})$ etc... sont fermés

Théorème. Soit F un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$.
Soit $\mathcal{L}_F = \{ B \in M_n(\mathbb{K}),\ \exp(tB) \in F \text{ pour tout } t \}$

Alors

(i) $\mathcal{L}_F$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ et si $A, B \in \mathcal{L}_F$, $[A,B] = AB - BA \in \mathcal{L}$

(ii) Il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de 0 dans $M_n(\mathbb{K})$
U un voisinage de l'id dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que
exp est un homeo de $\mathcal{O} \cap \mathcal{L}_F$ dans $U \cap F$

Ce théorème important n'est pas démontré ici.

Une algèbre de Lie est un sous espace vectoriel $\mathcal{L}$ de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{L}$, $[A,B] := AB - BA \in \mathcal{L}$. L'ensemble $\mathcal{L}_F$ decrit plus haut s'appele algèbre de Lie de F.

Théorème (admis) : Toute algèbre de Lie est associée a un sous groupe

Ex : Quels sont les algèbres de Lie de $Sl_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ etc....

Le groupe orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni de la métrique euclidienne $\langle \, , \rangle$

On rappel que par le choix d'une base orthonormée $E \simeq \mathbb{R}^n$ avec la metrique euclidienne standard. Alors un endomorphisme est orthogonal si $\forall u, v \quad \langle M(u) | M(v) \rangle = \langle u | v \rangle$

prop :

A orthogonale $\Leftrightarrow$ la matrice M de A dans une base orthonormée satisfait $M^t M = 1$

A orthogonale $\Leftrightarrow$ l'image d'une base orthonormée est orthonormée

A orthogonale $\Rightarrow$ $(A(H))^{\perp} = A(H^{\perp})$ si $H \subset E$ est un s.e.v

A orthogonale $\Rightarrow$ $(\det A)^2 = 1$

2. le groupe orthogonal

le groupe orthogonal est

$$O(E) = \{ f \in GL(E) \, ; \, f \text{ orthogonal} \}$$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \, ; \, M^t M = 1 \}$$

$O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des sous groupes de $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{R})$ respectivement. le choix d'une base orthonormée défini un isomorphisme de $O(E)$ avec $O_n(\mathbb{R})$

On définit $SO_n(\mathbb{R}) = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$ le groupe special orthogonal

$$SO(E) = \{ A \in O(E) \mid \det A = 1 \}$$

$SO(E)$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des sous groupes distingués de $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ respectivement ; $[O(E) : SO(E)] = 2$

En petites dimensions

(i) $O_1(\mathbb{R}) = \{+1, -1\}$; $SO(1) = 1$

(ii) $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{SO_2(\mathbb{R})} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right\}$

Théorème Soit $\sigma \in O(E)$; il existe alors des sous espaces vectoriels $V, W, P_1, \dots, P_k$ deux à deux orthogonaux avec

(i) $\dim P_i = 2$

(ii) $\sigma|_V = Id$; $\sigma|_W = -Id$; $\sigma|_{P_i}$ = rotation d'angle P_i

(iii) $V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_k = E$

—

Démontrons tout d'abord le lemme

lemme : Toute transformation orthogonale admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

◀ $A+\bar{A}'$ est symetrique. Soit u un v.p non nul de $A+\bar{A}'$. Posons

$P=\langle u, \bar{A}'(u)\rangle$; alors (i) $\dim P = 1$ ou 2

$Au = \lambda u - \bar{A}'(u) \in P$; et $A(\bar{A}'(u)) = u \in P$; donc $A(P) \subset P$ ▶

On demontre le theorème par recurrence sur la dimension. On considère

$H = P^{\perp}$ et on applique l'hypothèse de recurrence à $\sigma|_H$

3. Reflexions hyperplanes

Un hyperplan H d'un espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. De manière équivalente on a $\dim E = \dim H + 1$

Si $(E, \langle\,,\,\rangle)$ est euclidien, la symétrie hyperplane σ par rapport à H est donnée par

$$\sigma|_H = \mathrm{Id} \;;\; \sigma|_{H^{\perp}} = -\mathrm{Id}.$$

exo : $\sigma = 2\pi - \mathrm{Id}$ si π projection $\perp$ de $E \to H$

prop : Une symétrie hyperplane est orthogonale

Si σ est une symétrie hyperplane, alors $\sigma^2 = 1$

σ est l'unique transformation orthogonale telle que

$$\sigma \neq \mathrm{Id} \;;\; \sigma|_H = \mathrm{Id}.$$

◀ On utilise une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

$H = \langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle$ ▶

Théorème Toute transformation orthogonale est le produit de symetrie hyperplanes

On va demontrer le résultat par récurrence

a) On suppose qu'il existe u tel que $\sigma(u) = u$

Soit $H = \langle u\rangle^{\perp}$; alors $\sigma|_H \in O(E)$. On peut alors ecrire

$\sigma|_H = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$ avec σ_i hypoplanes $\in O(H)$

Soit H_i l'hypoplan de H associé à σ_i ; Soit $\hat{H}_i = H_i \oplus \langle u \rangle$

et $\hat{\sigma}_i \in O(E)$ la reflection hypoplane / à $\hat{H}_i$ alors

$$\hat{\sigma}_i|_{\hat{H}_i} = Id \, ; \; \hat{\sigma}_i|_{\hat{H}_i^\perp} = -Id$$

Alors $\hat{\sigma}_i(u) = u$; $\hat{\sigma}_i|_H = \sigma_i$. On a alors

$\Psi = \sigma - \hat{\sigma}_1 \circ \cdots \circ \hat{\sigma}_n = 0$. En effet $\langle u \rangle \in \ker \Psi$ et $H \in \ker \Psi$

Donc $\ker \Psi \supset \langle u \rangle + H = E$.

b) Sinon soit $v \neq 0$ tel que $\sigma(v) \neq v$. Soit $w = \sigma(v) - v$

et σ_0 la symetrie hypoplane par rapport à $\langle w \rangle^\perp$.

Remarquons que $\langle \sigma(v) - v | \sigma(v) + v \rangle = \langle \sigma(v) | \sigma(v) \rangle - \langle v | v \rangle$

$+ \langle \sigma(v) | v \rangle - \langle v | \sigma(v) \rangle = 0$

Alors $\sigma_0(\sigma(v) - v) = v - \sigma(v)$; $\sigma_0(\sigma(v) + v) = \sigma(v) + v$

Donc $\sigma_0(\sigma(v)) = v$ et $\sigma_0(\sigma(v)) = v$.

En particulier $(\sigma_0 \circ \sigma)(v) = v$. On applique 1) à la

transformation orthogonale $\sigma_0 \circ \sigma$ qui est donc $= \sigma_1 \cdots \sigma_n$ avec σ_i

symétries hypoplanes. Donc $\sigma = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$ (car $\sigma_0^2 = 1$) ▶

Example Si $A \in O(2) \setminus SO(2)$; alors $A^2 = 1$;

A admet donc 1 comme v.p ; On trouve donc une base telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si $A \in SO(2)$ et $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors $\sigma_0 \circ A \notin SO(2)$; donc

$\sigma_0 \circ A$ est une reflection

4. Compléments : algèbre de Lie

Soit $\mathcal{A} = \{ M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = -M \}$, l'ensemble des matrices antisymétriques. Alors

<u>Prop</u> : (i) $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$

(ii) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$,

(iii) Pour B suffisamment proche de l'identité, $\log(B) \in \mathcal{A}$.