Groupes finis

Exercice 1. Soit G un groupe et F_0 un sous-groupe de G. Soit X l'ensemble des sous-groupes conjugués à F_0.

(1) Montrez que $(g, \mathsf{F}) \mapsto g\mathsf{F}g^{-1}$ définit une action transitive à gauche de G sur X.
(2) Montrez que si $\mathsf{F} \in X$, alors F est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Stab}_{\mathsf{G}}\,\mathsf{F}$.
(3) Montrez que $\sharp X$ divise l'indice $[\mathsf{G} : \mathsf{F}_0]$ de F_0 dans G (On rapelle que $[\mathsf{G} : \mathsf{F}_0] = \sharp(\mathsf{G}/\mathsf{F}_0)$).

Exercice 2. Soit G un groupe. Un automorphisme de G est un morphisme bijectif de G dans lui-même.

(1) Montrez que l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathsf{G})$ des automorphismes de G est un groupe.
(2) Soit H un sous-groupe distingué de G, Montrez que l'on a un morphisme de groupe de G dans $\mathrm{Aut}(\mathsf{H})$ qui a g associe $h \mapsto ghg^{-1}$
(3) On suppose que G admet un élément d'ordre $g = \sharp G$, montrez que G est cyclique et en particulier abélien. Montrez que $\mathrm{Aut}(\mathsf{G})$ est alors le nombre d'élément d'ordre g de G.

Exercice 3. [Ordre p] Soit G un groupe d'ordre p où p est premier.

(1) Montrez que G est cyclique et en particulier abélien.
(2) Montrez que $\sharp\,\mathrm{Aut}(\mathsf{G}) = p - 1$.

Exercice 4. [Ordre p^2] Soit G un groupe fini d'ordre p^2 où p est premier. On veut montrer que G est abélien.

(1) On suppose à partir de maintenant que G n'est pas cyclique. Montrez alors que tout élément est d'ordre p.
(2) Soit X l'ensemble des groupes d'ordre p de G, montrez que $\sharp X = p + 1$.
(3) Soit X l'ensemble des groupes d'ordre p de G et on fait agir G par conjugaison sur X. Montrez que G a au moins un point fixe H en utilisant la formule des classes, et montrez que H est distingué.
(4) Montrez (en utilisant le second exercise) que le morphisme associé $\lambda : g \mapsto \lambda_g$, où $\lambda_g(h) = g{\cdot}\, h{\cdot}\, g^{-1}$ de G dans $\mathrm{Aut}(\mathsf{H})$ est trivial (on considérera le cardinal de l'image de λ). En déduire que tout élément de G commute avec tout élément de H.
(5) Soit $a \in \mathsf{H} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathsf{G} \setminus \mathsf{H}$, montrez que G est engendré par a et b et que G est commutatif.
(6) Conclure et montrez que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.
(7) Quel est, si G n'est pas cyclique, le cardinal de $\mathrm{Aut}(\mathsf{G})$?

Exercice 5. [Ordre pq] On suppose que p et q sont deux nombres premiers différents et G est d'ordre pq. On suppose $q \not\equiv 1[p]$ et $q > p$.

(1) Montrez qu'il y a un unique p-groupe H de G et qu'il est distingué.
(2) Montrez (en utilisant la technique de l'exercice précédent) que tout élément de G commute avec tout élément de H.
(3) Soit $a \in \mathsf{H} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathsf{G} \setminus \mathsf{H}$, montrez que G est engendré par a et b et que G est commutatif,
(4) montrez que G est cyclique en utilisant un élément b d'ordre q.

Exercice 6. [Ordre p^2q] On suppose que p et q sont deux nombres premiers différents et G est d'ordre p^2q, on suppose que $q \not\equiv 1[p]$ et $q > p$.

(1) Montrez qu'il y a un unique p-groupe de Sylow H de G et qu'il est distingué.
(2) Montrez (en utilisant la technique de l'exercice précédent: compter les automorphismes de H) que tout élément de G commute avec tout élément de H.
(3) Soit $a \in \mathsf{H} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathsf{G} \setminus \mathsf{H}$, montrez que G est engendré par a et b et que G est commutatif.

Exercice 7. [Indice 2] Soit H un sous-groupe de G – pas nécessairement fini – on suppose que $[G : H] = 2$, c'est-à-dire que H est d'indice 2 dans G. Montrez que H est distingué. .