Convexité

Exercice 1 –Soit C_0 et C_1 deux convexes. Soit $s \in [0,1]$ et

$$C_s := \{u \mid u = su_0 + (1-s)u_1, \text{ avec } u_0 \in C_0, u_1 \in C_1\} .$$

Montrez que C_s est convexe.

Exercice 2 –[Théorème de Gauss–Lucas] Soit P un polynome complexe de degré n:

$$P(Z) = Z^n + \ldots + a_1 Z + a_0 .$$

Soit $Z(P) = \{z_1, \ldots, z_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de P. On note α_k la multiplicité de z_k. Le *barycentre* des racines est le barycentre des racines affectés des poids $\frac{1}{p}\alpha_k$.

(1) Rappelez la décomposition en éléments simple de la fraction $\frac{P'}{P}$.
(2) Soit z un zéro de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i (z - z_i)}{|z - z_i|^2} = 0 .$$

Puis que z est barycentre à coefficients positif des z_j.
(3) Montrez le théorème de Gauss–Lucas:

$$Z(P') \subset \mathrm{Env}(Z(P)) .$$

(4) Montrez que le barycentre des racines de P est aussi celui des racines de P'.

Exercice 3 –Montrez que si O est un ouvert inclus dans un convexe de C, alors O ne contient aucun point extrémal.

Exercice 4 –[Polytopes] On définit un polytope (convexe) comme

$$C = \bigcap_{i=1}^{p} H_i ,$$

où les H_i sont des sous-espaces fermés.

(1) Montrez que C est un convexe.
(2) Soit

$$W = \bigcap_{i=1}^{p} \overset{\circ}{H}_i ,$$

où les $\overset{\circ}{H}_i$ sont les demi-espaces ouverts associés aux H_i. Montrez que W ne contient aucun point extrémal (on pourra utiliser l'exercice précedent).

(3) Montrez qu'un polytope a un nombre fini de points extrémaux (on pourra utiliser une récurrence sur la dimension).
(4) Montrez qu'un polytope borné est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Exercice 5 –[Dual d'un convexe] Soit E un espace vectoriel de dimension n et P un convexe fermé de dimension n tel que 0 appartient à l'intérieur de P

(1) Soit P^* l'ensemble des formes linéaires f de E, tel que $P \subset \{x \mid f(x) \leq 1\}$. Montrez que P^* est un convexe fermé.
(2) Montrez que $(P^*)^* = P$.
(3) Montrez que si P est l'enveloppe d'un nombre fini de points, alors P^* est un polytope.
(4) En déduire que si P est un polytope alors P^* est un polytope, puis que l'enveloppe d'un nombre fini de points est un polytope (on admettra q'un polytope a un nombre fini de points extrémaux – voir l'exercice précédent).

Exercice 6 –[Groupe de symétrie d'un polytope] Soit C un polytope en dimension de $\mathbb{R}^3$. Soit G l'ensemble des transformations affines g telles que $g(C) = g$.

(1) Montrez que G est un groupe.
(2) Montrez que tout élément de G envoie sommets sur sommets.
(3) Montrez que élément de G préserve l'isobarycentre des sommets de G.
(4) On suppose que $\dim C = 3$. Soit A l'ensemble des quadruplets de sommets non coplanaires de C. Montrez que G agit sur A, que le stabilisateur d'un point de A est trivial puis que G est fini.

Exercice 7 –L'ensemble $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ est-il convexe ? l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est-il convexe ? Soit X un sous-ensemble de l'espace affine, a-t-on $\mathrm{Env}(X) = \cup_{a,b\in X}[a, b]$?