Feuille d'exercices "actions de groupes"

Exercice 1 [Action par conjugaison]

Soit G un groupe fini.

1. On définit l'application suivante
$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$
Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.
2. Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble X on appelle *points fixes* les éléments de X qui sont invariants sous l'action de G. Ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g \cdot x = x \quad \forall g \in \mathrm{G}\}$.
Décrire les points fixes de l'action par conjugaison d'un groupe G sur lui-même.
3. Dans le cas $\mathrm{G} = \mathcal{S}_4$ décrire les orbites et les stabilisateurs.
4. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathcal{S}_{10}$ sur lui-même ?

Exercice 2

Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ opérant sur $\{1, 2, 3, 4\}$ par l'action naturelle de $\mathcal{S}_4$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ on note $\mathcal{O}_i$ l'orbite de i et S_i le stabilisateur de i. Déterminer $\mathcal{O}_i$ et S_i pour les cas suivants :

1. G est le groupe engendré par le 3-cycle (1 2 3).
2. G est le groupe engendré par le 4-cycle (1 2 3 4).
3. G est le groupe engendré par les double transpositions.
4. $\mathrm{G} = \mathcal{A}_4$.

Exercice 3

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. On fait agir G sur le plan affine euclidien en choisissant un point O de cet espace et en identifiant $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs d'origine O. Décrire l'orbite d'un point A quand G est le sous-groupe engendré par

- ◇ une symétrie par rapport à une droite D passant par O ;
- ◇ une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre O ;
- ◇ une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de centre O et une symétrie par rapport à une droite D passant par O.

Exercice 4

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Considérons les matrices suivantes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$
Notons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ engendré par σ et τ ; désignons par H le sous-groupe de G engendré par σ et K le sous-groupe de G engendré par τ :
$$\mathrm{G} = \langle \sigma, \tau \rangle, \qquad \mathrm{H} = \langle \sigma \rangle, \qquad \mathrm{K} = \langle \tau \rangle.$$
Posons $\mathrm{K}' = \{g \in \mathrm{G} \mid \det g = 1\}$ et définissons les vecteurs X_0 et Y_0 de $\mathbb{R}^2$ par
$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de σ.

2. Donner une interprétation géométrique pour τ et donner son ordre.
3. Si G est d'ordre fini, que peut-on dire sur son ordre ?
4. Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.
5. Donner tous les éléments de G, H et K.
6. Combien y a-t-il de classe à gauche de G modulo H ?
7. Décrire ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$.
8. A-t-on $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$.
9. A-t-on $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{K}}$.
10. Le sous-ensemble K' de G est-il un sous-groupe de G ? Si oui, a-t-on $\mathrm{K}' \lhd \mathrm{G}$?
11. Comparer K et K'.
12. Existe-t-il un sous-groupe de G isomorphe à ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{K}}$?
13. Calculer $D(\mathrm{G})$. À quel groupe est isomorphe ${}^{\mathrm{G}}\!/_{D(\mathrm{G})}$?
14. Montrer que la multiplication des matrices définit une action

$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX$$

15. L'action est-elle transitive ?
16. L'action est-elle fidèle ?
17. Quels sont les points fixes de l'action ?
18. Quel est le stabilisateur G_{X_0} du vecteur X_0 ?
19. Décrire l'orbite du vecteur X_0.
20. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [X_0 Y_0]$?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit naturellement sur l'ensemble X des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer l'orbite de $F \in X$.
3. Déterminer le stabilisateur de $F \in X$.
4. Combien existe-t-il d'orbites ?