Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1

Donner un exemple de groupe non abélien.

Exercice 2

Donner un exemple de groupe contenant exactement 3 éléments.

Exercice 3

Quelle est la loi naturelle qui permet de munir l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls d'une structure de groupe ? Quel est l'ordre de $\mathbf{i}$ pour cette loi ? Quel est l'ordre de 2 ?

Exercice 4

Si R est un rectangle (non carré), donner la liste des isométries du plan préservant ce rectangle. Cet ensemble est-il un groupe ?

Exercice 5

Donner un exemple de groupe d'ordre fini, abélien et non cyclique.

Exercice 6

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_8$ le produit de cycles suivant

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \circ (7\ 5\ 3\ 1) \circ (8\ 2\ 3)$$

Calculer la décompositon canonique de σ.

Exercice 7

Soit T un triangle équilatéral de sommets A, B et C et soit $\mathrm{Isom}(T) = \left\{\mathrm{id},\ s_A,\ s_B,\ s_C,\ r_{\frac{2\pi}{3}},\ r_{-\frac{2\pi}{3}}\right\}$ le groupe des isométries du plan préservant ce triangle.

Expliciter un isomorphisme du groupe $\mathrm{Isom}(T)$ vers le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

Exercice 8

Soit T un triangle équilatéral de sommets A, B et C et soit $\mathrm{Isom}(T) = \left\{\mathrm{id},\ s_A,\ s_B,\ s_C,\ r_{\frac{2\pi}{3}},\ r_{-\frac{2\pi}{3}}\right\}$ le groupe des isométries du plan préservant ce triangle.

Si $\mathrm{H} = \left\{\mathrm{id},\ s_A\right\}$, donner un exemple d'élément $g \in \mathrm{Isom}(T)$ tel que les classes à gauche et à droite de g soient distinctes, *i.e.* $g\mathrm{H} \neq \mathrm{H}g$.

Exercice 9

Calculer l'ordre de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ suivante

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8) \circ (9\ 10)$$

Exercice 10

Donner une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_6$ telle que $\sigma \circ (1\ 3\ 5) \circ \sigma^{-1} = (2\ 4\ 6)$.

Exercice 11

Donner la liste des classes de conjugaison avec leur cardinal pour le groupe alterné $\mathcal{A}_5$.

Exercice 12

Donner un exemple de deux groupes d'ordre 8 non abéliens et non isomorphes.

Exercice 13

Parmi les ensembles suivants lesquels sont des groupes pour l'opération donnée ?

1. $\mathbb{Q}^*$, $+$;
2. $\mathbb{Q}^*$, $\cdot$;
3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\cdot$;
4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$, $\cdot$;
5. $\{M \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$, $\cdot$;
6. $\{M \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det M = 0\}$, $+$.

Exercice 14

Parmi les groupes suivants lesquels sont abéliens ?

1. $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 8}$, $+$ (les polynômes de degré $d \leqslant 8$ dans une variable x à coefficients réels) ;
2. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\cdot$ (les matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients réels) ;
3. $\mathcal{S}_4$, $\circ$.

Exercice 15

Lesquels des ensembles A sont des sous-groupes du groupe G donné ?

1. $A = \mathbb{R}[x]_8$, $+$ (les polynômes de degré 8) et $\mathrm{G} = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 8}$, $+$;
2. $A = 100\mathbb{Z}$ et $\mathrm{G} = 10\mathbb{Z}$;
3. $A = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$;
4. $A = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{Z}$.

Exercice 16

Quels sont les éléments de $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^*$?

1. $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$;
2. $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$;
3. $\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}$;
4. $\overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}$.

Exercice 17

Pour quelles opérations parmi l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ l'ensemble suivant est-il un groupe ?

1. $\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{C}$;
3. $\mathbb{C}^*$;
4. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$;
5. $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^*$;
6. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;
7. $\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\right)^*$;
8. $\{1, -1\}$.

Exercice 18

1. Quel est l'ordre de 0 dans $\mathbb{Z}$?
2. Quel est l'ordre de 1 dans $\mathbb{Z}$?
3. Quel est l'ordre de 2 dans $\mathbb{Z}$?

4. Quel est l'ordre de B dans $\mathcal{P}(A), \Delta$, avec $A,\, B \neq \emptyset$?
5. Quel est l'ordre de 1 dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?
6. Quel est l'ordre de 1 dans $\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\right)^*$?
7. Quel est l'ordre de 4 dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?
8. Quel est l'ordre de 4 dans $\left(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\right)^*$?

Exercice 19

Compléter pour obtenir un énoncé correct : Soit x un élément d'un groupe fini G. Si $x^k = e_{\mathrm{G}}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, alors

1. k divise l'ordre de G ;
2. l'ordre de x divise k ;
3. k divise l'ordre de x.

Exercice 20

Compléter pour obtenir un énoncé correct : Si G est le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $g = ([1]_4, [4]_6)$, alors

1. $\langle g \rangle = \{([1]_4,\, [4]_6),\, ([2]_4,\, [2]_6),\, ([3]_4,\, [0]_6),\, ([0]_4,\, [4]_6)\}$;
2. $\langle g \rangle = \{([1]_4,\, [4]_6),\, ([2]_4,\, [2]_6),\, ([3]_4,\, [0]_6),\, ([0]_4,\, [4]_6),\, ([1]_4,\, [2]_6),\, ([2]_4,\, [0]_6),\, ([3]_4,\, [4]_6),$ $([0]_4,\, [2]_6),\, ([1]_4,\, [0]_6),\, ([2]_4,\, [4]_6),\, ([3]_4,\, [2]_6),\, ([0]_4,\, [0]_6)\}$;
3. $\langle g \rangle = \mathrm{G}$.

Exercice 21

Quelles sont les implications correctes ?

1. Si G est un groupe abélien, alors G est cyclique ;
2. Si G est un groupe cyclique, alors G est abélien ;
3. Si G est d'ordre p, avec p un nombre premier, alors G est cyclique ;
4. Si G est d'ordre fini et cyclique, alors G est d'ordre premier.

Exercice 22

La décomposition de la permutation $(1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 3)$ de $\mathcal{S}_4$ en cycles disjoints est :

1. $(3\ 2\ 4)$;
2. id ;
3. $(2\ 4\ 3)(1)$;
4. $(1)(2)(3)(4)$.

Exercice 23

L'ordre de l'élément $(1\ 3)(2\ 4\ 5)(6\ 9\ 8\ 7)$ dans $\mathcal{S}_{11}$ est

1. 9 ;
2. 11 ;
3. 12 ;
4. 24.

Exercice 24

Soit $\mathrm{D}_8 = \{\mathrm{id},\, r,\, r^2,\, r^3,\, s,\, sr,\, sr^2,\, sr^3\}$ le groupe diédral d'ordre 8. Pour rappel, dans ce groupe on a $r^4 = \mathrm{id}$, $s^2 = \mathrm{id}$ et $r^k s = sr^{-k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Parmi les énoncés suivants lesquels sont vrais ?

1. Dans D_8 il y a 4 réflexions et 4 rotations ;
2. Dans D_8 il y a exactement 4 éléments d'ordre 2 ;
3. Dans D_8 il y a exactement 4 éléments d'ordre 4.

Exercice 25

Soit G le groupe des isométries qui préservent un polygône régulier $\mathcal{P}$ à 5 côtés. Parmi les énoncés suivants lesquels sont corrects ?

1. $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{10}$;
2. $\mathrm{G} = \mathrm{D}_5$;
3. Si $x \in \mathrm{G}$ est d'ordre 2, alors x préserve exactement un sommet de $\mathcal{P}$;
4. Si $x \in \mathrm{G}$ est d'ordre 2, alors x préserve exactement deux sommets de $\mathcal{P}$;
5. Dans G, il y a des éléments d'ordre 1, 2 et 5 ;
6. Dans G, il y a des éléments d'ordre 1, 2, 5 et 10.

Exercice 26

Soit $(\mathrm{G}, *) = (\mathbb{Z}, +)$, $\mathrm{H} = 4\mathbb{Z}$ et $g = 3$. Alors $g * \mathrm{H}$ est égal à :

1. $3 + 4\mathbb{Z}$;
2. $12\mathbb{Z}$;
3. $\{\ldots, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$;
4. $-5 * \mathrm{H}$.

Exercice 27

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Parmi les énoncés suivants lesquels sont corrects ?

1. $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, on a $ghg^{-1} \in \mathrm{H}$;
2. $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, on a $g^{-1}hg \in \mathrm{H}$;
3. $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, on a $hgh^{-1} \in \mathrm{H}$;
4. $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, on a $h^{-1}gh \in \mathrm{H}$.

Exercice 28

Soient G un groupe et H un sous-groupe propre de G. Parmi les énoncés suivants lesquels sont corrects ?

1. En général, il y a exactement une classe à gauche suivant H qui est un sous-groupe de G.
2. Si H est distingué dans G, alors les classes à gauche dans G suivant H sont des sous-groupes de G ;
3. En général, il y a autant de classes à gauche que de classes à droite ;
4. Si H est distingué dans G, alors il y a autant de classes à gauche que de classes à droite ;
5. Soit $g \in \mathrm{G}$. Si H est distingué dans G, alors $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g$.

Exercice 29

Soit G un groupe. Parmi les énoncés suivants lesquels sont corrects ?

1. Si G n'est pas abélien, alors G a au moins un sous-groupe propre (*i.e.* distinct de $\{e_\mathrm{G}\}$ et de G) qui n'est pas distingué dans G ;
2. Si G est abélien, alors tous les sous-groupes de G sont distingués dans G ;
3. Si G est abélien et H est un sous-groupe propre de G, alors G/H est abélien ;
4. Si G n'est pas abélien et H est un sous-groupe distingué propre de G, alors G/H n'est pas abélien ;
5. Si G est cyclique et H est un sous-groupe de G, alors G/H est cyclique ;
6. Si G n'est pas cyclique et H est un sous-groupe de G, alors G/H n'est pas cyclique.

Exercice 30

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Parmi les énoncés suivants lesquels sont corrects ?

1. Si l'ordre de G est infini, alors le nombre de classes à gauche dans G suivant H est infini ;
2. Si l'ordre de G est infini et l'ordre de H est infini, alors le nombre de classes à gauche dans G suivant H est infini ;
3. Si l'ordre de G est infini et l'ordre de H est fini, alors le nombre de classes à gauche dans G suivant H est infini ;

4. Si l'ordre de G est fini, alors le nombre de classes à gauche dans G suivant H divise l'ordre de H ;
5. Si l'ordre de G est fini, alors le nombre de classes à gauche dans G suivant H divise l'ordre de G.

Exercice 31

Pour l'action $\cdot$ donnée du groupe G sur l'ensemble A, déterminer :

1. l'élément $\overline{1} \cdot \overline{3}$ si $\cdot$ est l'action de $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sur lui-même ($A = \mathrm{G}$) par translation ;
2. l'élément $\overline{5} \cdot \overline{1}$ si $\cdot$ est l'action de $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)^*$ sur lui-même ($A = \mathrm{G}$) par translation ;
3. l'élément $(1\ 2) \cdot 2$ si $\cdot$ est l'action triviale de $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ sur $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
4. l'élément $(1\ 2) \cdot (3\ 4)$ si $\cdot$ est l'action par conjugaison de $\mathrm{G} = \mathcal{S}_4$ sur lui-même ($A = \mathrm{G}$).

Exercice 32

Soit $\cdot$ une action du groupe G sur l'ensemble A. Soient $g \in \mathrm{G}$ et $a \in A$.

1. L'élément $g \cdot a$ à quel ensemble appartient-il ?
2. Si $g = e_{\mathrm{G}}$, alors que vaut $g \cdot a$?
3. Est-ce que l'orbite de a est un sous-ensemble de A ou de G ?
4. Est-ce que le stabilisateur de a est un sous-ensemble de A ou de G ?
5. De quel ensemble est-ce que le noyau de l'action est un sous-groupe ?

Exercice 33

Soit $\cdot$ une action du groupe G sur l'ensemble A. Soient $g \in \mathrm{G}$ et $a \in A$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $g \cdot a = b$, alors $g = b \cdot a^{-1}$;
2. Si $g \cdot a = b$, alors $a = g^{-1} \cdot b$;
3. L'orbite de a est un groupe ;
4. Le stabilisateur de g est un groupe ;
5. Si le noyau de l'action est $\{e_{\mathrm{G}}\}$, alors l'action est fidèle ;
6. L'action est transitive si et seulement s'il n'y a qu'une seule orbite ;
7. Le stabilisateur de g est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 34

Soit G un groupe. Soient a, b deux éléments de G d'ordre fini. Le groupe engendré par a et b est-il fini ?

Exercice 35

Dans le lemme chinois expliciter rapidement comment on construit l'isomorphisme.

Exercice 36

Donner un exemple de groupe fini simple.