Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1

Soient $\Bbbk$ un corps et $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(2, \Bbbk)$ le sous-groupe des matrices 2×2 triangulaires supérieures. Déterminer si chacune des conditions suivantes définit un sous-groupe distingué de G, et si oui, utiliser le théorème d'isomorphisme pour identifier le quotient :

(i) $a_{11} = 1$;
(ii) $a_{12} = 0$;
(iii) $a_{11} = a_{22}$;
(iv) $a_{11} = a_{22} = 1$.

Exercice 2

On se propose de montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ ne contient aucun sous-groupe d'ordre 6.

(1) En général, montrer que si $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe d'indice 2, alors H est distingué dans G.
(2) Rappeler la liste des classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$ et leurs cardinaux.
(3) Conclure.

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non trivial.

1. Montrer que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$.
2. Montrer que l'ordre de $Z(\mathrm{G})$ est > 1 (sans utiliser le premier point).

Indication : faire agir G par conjugaison sur H.

Exercice 4

Soit G un groupe. Désignons par Aut(G) le groupe des automorphismes de G. Si a appartient à G, notons $\varphi(a)$ l'application

$$\varphi(a) \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \qquad g \mapsto aga^{-1}.$$

a) Montrer que pour tout a dans G l'application $\varphi(a)$ est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur de G).
b) Montrer que $\varphi \colon \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \varphi(g)$ est un homomorphisme de groupes de G dans Aut(G).
c) Notons Int(G) l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Montrer que Int(G) est un sous-groupe distingué de Aut(G).
d) Notons $Z(\mathrm{G})$ le centre de G. Montrer que $\mathrm{Int(G)} \simeq {}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$.

Exercice 5 [Formule de Burnside et coloriage de polyèdres]

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $x \in X$ on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x par l'action de G et par G_x son stabilisateur.
   a) Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{O}_x$. Trouvez $z \in \mathrm{G}$ tel que
   $$\mathrm{G}_y = z^{-1}\mathrm{G}_x z.$$
   b) Montrer que pour tout $x \in X$
   $$|\mathrm{G} = | = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y|.$$

c) En déduire que
$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x|$$
où $\Omega = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\}$ est l'ensemble des orbites dans X par l'action de G.

d) En décomposant de deux façons différentes l'ensemble $F = \{(g,x) \in \mathrm{G}\times X \mid g\cdot x = x\}$ déduire de la question précédente la formule de Burnside
$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in \mathrm{G}}|\mathrm{Fix}(g)|$$
où $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g\cdot x = x$.

2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où k couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre T est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on le suppose centré en 0.

   Nous identifions deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation R de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, *i.e.* $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.

   a) Soit X l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de X ?

   b) Montrer que l'ensemble des rotations préservant T, muni de la loi de composition, est un groupe. Notons G ce groupe. On admet qu'il est fini et plus précisément que $|\mathrm{G}| = 12$:
   - l'identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$;
   - 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π ;
   - 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.

   c) Le groupe G agit naturellement sur X, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite $\mathcal{O}_x$ dans X par l'action de G. Exprimer le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de k.

Exercice 6

1. Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini non vide E. Supposons que G soit d'ordre p^m avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$E^{\mathrm{G}} = \big\{x \in E \mid \forall\, g \in \mathrm{G},\, g\cdot x = x\big\}.$$
   Montrer que $|E^{\mathrm{G}}| = |E| \bmod p$.
2. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n. Montrer que H contient un élément d'ordre p (lemme de Cauchy). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de H^p tels que $x_1x_2\ldots x_p = e$.
3. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathrm{H}$ on ait $x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Exercice 7 Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. On se propose de montrer que H est distingué dans G.

a) Montrer que H opère sur l'ensemble des classes à gauche G/H par $h\cdot(a\mathrm{H}) = (ha)\mathrm{H}$ pour tout $h \in \mathrm{H}$ et pour tout $a \in \mathrm{G}$.

   Quel est le stabilisateur de $a\mathrm{H}$?

   Quelle est l'orbite de la classe H ?

b) Montrer que si H n'était pas distingué dans G, alors au moins une des orbites aurait un cardinal $\geqslant p$.

c) Conclure.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\Bbbk$.

a) Faisons opérer le groupe linéaire $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E par $g\cdot F := g(F)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout sous-espace F de E. Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) On prend $\Bbbk = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $n = 5$. Combien E possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension 3 ?

Exercice 9

a) Combien y a-t-il d'opérations du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$?

b) Soient G et X deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes sur* X si on s'est donné une opération $(g,x) \mapsto g \cdot x$ de G sur X telle que pour tout $g \in \mathrm{G}$ l'application $x \mapsto g \cdot x$ soit un automorphisme de X.
L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ?
L'opération de G sur lui-même par conjugaison est-elle une opération par automorphismes ?

c) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ?

d) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathcal{S}_3, \circ\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ?

Exercice 10

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E = \left\{(g,x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \cdot x = x\right\},$$

calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G. Que dire en particulier si l'action est transitive ? Que dire de la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

2. Combien de colliers de 9 perles différents peut-on faire avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles oranges ?