Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1

Donner un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 30.

Exercice 3

Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 4

Soit G un groupe d'ordre 15.

1. Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 3 ?
2. Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 5 ?
3. Démontrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Soient p un nombre premier et n un entier naturel avec $p > n$. Considérons un groupe G d'ordre pn et H un sous-groupe de G d'ordre p. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

Indication : compter les p-Sylow de G.

Exercice 6

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Exercice 7

1. Quels sont les sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_4$?
2. Déterminer l'ordre de tous les éléments de $\mathcal{A}_4$.
   Le groupe $\mathcal{A}_4$ possède-t-il un sous-groupe cyclique d'ordre 6 ?
3. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$ engendré par un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3.
   Montrer que H contient au moins trois éléments d'ordre 3.
   Peut-il être isomorphe à $\mathcal{S}_3$?
   En déduire qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6 dans $\mathcal{A}_4$.
4. Donner la liste des sous-groupes de $\mathcal{A}_4$.

Exercice 8

Soit G un groupe. Soit p un nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$.

Montrer que si H est un p-sous-groupe de G distingué dans G, alors H est contenu dans tout p-sous-groupe de Sylow de G.

Exercice 9

Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 10

Montrer qu'un groupe d'ordre pq, où p et q sont premiers et distincts, ne peut être simple.