Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1

Déterminer la composée de deux symétries vectorielles orthogonales planes.
Déterminer l'ordre de cette composée.

Exercice 2

Montrer que toute rotation plane se décompose en le produit de deux symétries.
Que pouvons-nous dire pour les rotations de l'espace ?

Exercice 3 [Le groupe diédral]

Considérons un polygone régulier ayant un sommet P de coordonnées $(1, 0)$ et centré à l'origine du repère.

1. Déterminer le groupe D_6 des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral. Établir la table de D_6.
2. Déterminer le groupe D_8 des isométries du plan qui conservent un carré. Déterminer les ordres des éléments de D_8. Établir la table de D_8.
3. Déterminer le groupe D_{2n} des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à n côtés.

Exercice 4

Déterminer le groupe des isométries du plan qui conservent un rectangle non carré.
Établir la table de ce groupe.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 3$; le sous-ensemble $\left\{g \in \mathrm{D}_{2n} \mid g^2 = \mathrm{id}\right\}$ de D_{2n} est-il un sous-groupe de D_{2n} ?

Exercice 6

Quelle est la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}e_2$?

Exercice 7

Soit $M \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ de déterminant -1.
Montrer que -1 est valeur propre de M.

Exercice 8

Soit M une matrice orthogonale 2×2 et de déterminant -1.
Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 9

Soit $M \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ la rotation d'angle θ. Montrer que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}\, M - 1\Big).$$

Exercice 10

Soit s une symétrie plane d'axe $\mathcal{D}$.

1. Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que la composée $t \circ s$ (resp. $s \circ t$) est une symétrie si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{D}$.

2. Soit r une rotation de centre C. Montrer que la composée $r \circ s$ (resp. $s \circ r$) est une symétrie si et seulement si C appartient à $\mathcal{D}$.
3. Soient s' et s'' deux symétries axiales. Montrer que $s \circ s' \circ s''$ est une symétrie si et seulement si les axes de s' et s'' sont parallèles à $\mathcal{D}$ ou se rencontrent en un point de $\mathcal{D}$.

Exercice 11

Montrer que pour une translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ et une symétrie s d'axe $\mathcal{D}$ nous avons $t \circ s = s \circ t$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est dans la direction de $\mathcal{D}$.

Exercice 12

Soit $\mathcal{R}$ le réseau plan des points à coordonnées entières dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Quelles sont les isométries affines qui conservent $\mathcal{R}$?
Quelles sont les centres des rotations affines qui conservent $\mathcal{R}$?

Exercice 13

Soit $\mathfrak{S}$ la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction sinus.
Quelles sont les isométries affines qui conservent la figure $\mathfrak{S}$?

Exercice 14

Déterminer les isométries affines qui conservent l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien.

Exercice 15

Notons $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ qui contient les rotations centrées en deux points distincts.

Montrer que G contient une translation.

Exercice 16

Les actions considérées ci-après sont les actions naturelles.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive mais qu'elle définit sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ une action transitive.
2. Montrer que $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unitée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Déterminer l'orbite d'un point A de $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ quand G est le sous-groupe engendré par :

1. une symétrie par rapport à une droite ;
2. une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
3. une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) ;
4. une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) et une symétrie par rapport à une droite D (penser à distinguer deux cas).

Exercice 18

Rappelons que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires de déterminant 1 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Rappelons aussi que $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires orthogonales directes de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Notons $x \cdot y$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Soit $\varphi_g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi_g(x, y) = g(x) \cdot g(y).$$

Montrer que $\psi = \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi_g$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que pour $g \in \mathrm{G}$ nous avons $\psi(g(x), g(y)) = \psi(x, y)$.
   Montrer que la matrice d'un élément de G dans la base $\{e_1, e_2\}$ orthonormée pour ψ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   En déduire que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.
3. Quel est l'ordre d'un élément g de G ? En déduire que g est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ avec k et n convenables.
4. Montrer que G est cyclique.

Exercice 19 Quelques propriétés de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

Désignons par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1.
Pour $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ notons $t_u = a + d$.

1. Quel est le polynôme caractéristique P_u de u ? Quelles sont ses valeurs propres ?
2. Montrer que $P_u(u) = 0$.
3. Si P_u admet une racine double, montrer qu'alors
   — ou bien $u = \mathrm{Id}$, ou bien $u = -\mathrm{Id}$;
   — ou bien il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que

$$vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   — ou bien il existe $w \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que

$$wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Si P_u admet deux racines distinctes réelles, montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$ tels que $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Y a-t-il une réciproque ?
5. Si P_u admet deux racines complexes non réelles distinctes montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $a,\, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
6. En déduire pour tout $u \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ l'équivalence, si $n \notin \{1, 2\}$, entre les deux assertions suivantes :
   — u est d'ordre n ;
   — il existe $k \in \mathbb{N}$ premier avec n tel que $t_u = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
7. Soit $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ il y a :
   — un élément d'ordre 2 ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 4, explicitez-les ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 3, explicitez-les ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 6, explicitez-les ;
   — aucun élément d'ordre n si $n \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Exercice 20

Faire la liste de tous les sous-groupes de D_8.

Exercice 21

Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

Soient A et B deux éléments de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Donner une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que A et B commutent (cette conditions fait intervenir des droites particulières de $\mathbb{R}^3$ associées à A et B).

Exercice 23

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et S sa sphère unité. Si D est une droite vectorielle de E, on note σ_D la rotation d'angle π autour de D (appelée aussi demi-tour). Par conséquent σ_D appartient au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ dont on rappelle qu'il est engendré par les demi-tours.

1. Soit D une droite vectoriel, soit g un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Reconnaître l'endomorphisme $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$.
2. Soit $g \in \mathrm{SO}(E)$. Montrer que g est un demi-tour si et seulement s'il existe $x \in S$ tel que $g(x) = -x$.
   Dans les deux questions suivantes, nous nous donnons un sous-groupe G de $\mathrm{SO}(E)$ agissant transitivement sur S.
3. Montrer que G contient un demi-tour.
4. En déduire que $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(E)$.

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G le sous-ensemble de $M(n+1,\mathbb{R})$ donné par les matrices de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que G est un groupe.
2. Expliciter de quelle manière le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ de R^n est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. En particulier explique comment effectuer la composée de φ, $\varphi' \in \mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ où φ (resp. φ') pour partie linéaire $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (resp. $A' \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) et vecteur de translation $v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $v' \in \mathbb{R}^n$).
3. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 25

Soit E un espace affine euclidien de dimension n. On appelle similitude de E toute transformation affine bijective de E dans lui-même dont la partie linéaire est la composée d'une homothétie et d'une isométrie linéaire.

1. Montrer que les similitudes forment un groupe.
2. Soit φ une similitude. Démontrer que si L est la partie linéaire de φ, alors L s'écrit de matrice unique sous la forme $L = HR$ où H est une homothétie linéaire et R un élément de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et que de plus H et R commutent.
   Soit φ une bijection de E. On dit que φ préserve les angles (non-orientés) si pour tous points $A \neq B, C \in E$, $\widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} = \widehat{ABC}$. Nous allons montrer que les similitudes sont extactement les transformations qui préservent les angles.
3. Montrer que les similitudes préservent les angles.
   Soit φ une bijection de E qui préservent les angles.
4. Montrer que φ préserve l'alignement.
5. Montrer que φ est affine.
6. Choisissons une origine O dans E. Trouver une translation τ tells que $(\tau^{-1} \circ \varphi)(O) = O$. Posons $\varphi' = \tau^{-1} \circ \varphi$.
7. Soit $A \neq O$. Posons $\lambda = \frac{||\overrightarrow{O\varphi'(A)}||}{||\overrightarrow{OA}||}$. Si h_λ est l'homothétie de rapport λ et de centre O, montrer que $\psi = h_\lambda^{-1} \circ \varphi'$ préserve le produit scalaire et la norme. On pourra utiliser des triangles isométriques.
8. En déduire que ψ est une isométrie et conclure.

Exercice 26 Groupes et propriétés géométrique de l'orbite.

Soit E un espace affine euclidien. Soit f un élément du groupe $\mathrm{Isom}(E)$ des isométries de E. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$ engendré par f. Soit p un point de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) L'orbite de p sous G est bornée ;
(2) Toute orbite sous G d'un point de E est bornée ;
(3) f a un point fixe.