Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1

Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps $\Bbbk$.

Exercice 2

Montrer que si G est un groupe d'ordre fini n, si ρ est une représentation de G, alors pour tout g dans G $\rho(g)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans μ_n.

Exercice 3

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{H}}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de ${}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{H}}$.

a) Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.

b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 4

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in \mathrm{G}\}$ forme une base de V.

Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 5

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrer que T est une représentation de G.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2 e_{(2\,3)} \qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2 e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

Montrer que W est une sous-G-représentation de V. W est-il irréductible ?

c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Exercice 6

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Exercice 7

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq e \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 8

Soit $\mathbb{H}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Ecrire la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et décrire les représentations irréductibles.

Indication : On rappelle que $\mathbb{H}_8$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 9

Décrire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 10 [Table de caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$]

a) Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ et dresser sa table des caractères.

b) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ à partir de sa table des caractères.

c) On rappelle que $\mathcal{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

Exercice 11

Décrire les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{A}_4$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 12

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi_{|\mathrm{H}}$ est un caractère irréductible ?

Exercice 13

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W = \{f \colon \mathrm{G} \to V \mid \forall x \in \mathrm{G} \, \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h) f(x)\}$$

avec une action de G donnée par $g(f) \colon x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que W est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, W est-elle une représentation irréductible de G ?

Exercice 14 [Représentations et sous-groupes distingués, Peyre, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier, pages 231-232]

Soit G un groupe fini dont e_{G} est l'élément neutre. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphies de représentations irréductibles. Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles associés. Posons

$$K_{\chi_i} = \{g \in \mathrm{G} \mid \chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})\}$$

a) Soit $\rho \colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. Soit g un élément d'ordre k de G. Alors
   (i) $\rho(g)$ est diagonalisable ;
   (ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines $k$ième de l'unité ;
   (iii) $|\chi_V(g)| \leqslant \chi_V(e_{\mathrm{G}}) = d$;
   (iv) $K_{\chi_V} = \{x \in \mathrm{G}, \mid \chi_V(x) = \chi_V(e_{\mathrm{G}})\}$ est un sous-groupe distingué de G. On l'appelle noyau de la représentation.

b) Soit $N \lhd \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Soit ρ_U une représentation de G/N sur un espace vectoriel U. Il existe une représentation canonique de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G.

c) Soit V un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de G. Soit $(b_t)_{t\in \mathrm{G}}$ une base de V. La représentation régulière de G est la représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathrm{reg}}\colon \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \rho_{\mathrm{reg}}(g)\colon V \to V \\ & & \qquad\qquad b_t \mapsto b_{gt} \end{array}$$

Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. La représentation est fidèle si ρ est injectif.
Montrer que la représentation régulière est fidèle.

d) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les

$$\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$$

où $I \subset \{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

e) Montrer que G est simple si et seulement si

$$\forall\, i \neq 1, \forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \chi_i(g) \neq \chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Exercice 15

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.
Une représentation ρ du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que la représentation ρ est irréductible.
2. Montrer que tout élément du centre de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ, *i.e.* montrer que pour tout élément h du centre et pour tout élément M de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ on a

$$\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M).$$

3. Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Exercice 16

Soit G un groupe abélien.

1. Si $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément G de G définit un G-morphisme $V \to V$.
2. En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
3. Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 17

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G.
Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus [G : H].
Indication : si V est une représentation irréductible de G*, c'est aussi une représentation de* H*. On pourra considérer la représentation de* G *engendrée par une sous-représentation de* H*.*

Exercice 18

Montrer que tout groupe non abélien admet une représentation irréductible de dimension > 1.

Exercice 19

Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Exercice 20

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$.
Notons e, s et t les trois classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ où e est la classe de conjugaison de l'identité, s celle des transpositions et t celle des 3-cycles.

1. Montrer (sans les construire) que $\mathcal{S}_3$ a deux représentations irréductibles de dimension 1 et une de dimension 2.
2. Notons χ_1 le caractère de la représentation triviale, χ_2 celui de la signature sgn qui est l'autre représentation de dimension 1 et θ celui de la représentation W de dimension 2. De quelle représentation $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est-il le caractère ? Compléter la table

	e	s	t
χ_1			
χ_2			
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$			
θ			

3. Faisons agir $\mathcal{S}_3$ sur lui-même par conjugaison intérieure ($g \cdot x = gxg^{-1}$). Notons V la représentation de permutation associée et χ son caractère. Calculer χ. En déduire les multiplicités de la représentation triviale, de la représentation sgn et de la représentation W dans la décomposition de V.

Exercice 21

On se propose d'établir la table des caractères du groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$. Les partitions de 4 sont

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1;$$

il en résulte que le groupe $\mathcal{S}_4$ a 5 classes de conjugaison : la classe C_1 de l'élément neutre (1 élément), celle C_2 des transpositions (6 éléments), celle $C_{2,2}$ des produits de deux transpositions de supports disjoints (3 éléments), celle C_3 des 3-cycles (8 éléments), celle C_4 des 4-cycles (6 éléments) ;

	1	6	3	8	6
	C_1	C_2	$C_{2,2}$	C_3	C_4
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
χ_1	3	1	-1	0	-1
χ_2	3	-1	-1	0	1

1. Soit V la représentation de permutation associée à l'action de $\mathcal{S}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$.
   a) Calculer χ_V et $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$. En déduire que V est la somme directe $V_1 \oplus V_2$ de deux représentations irréductibles V_1, V_2 non isomorphes.
   b) Déterminer les sous-espaces V_1 et V_2 de V et montrer, en revenant à la définition, que ce sont des représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$.
   c) Calculer les caractères de V_1 et V_2. Quelles lignes de la table cela permet-il de remplir ?
2. Quelle est la seconde représentation de dimension 1 ? Comment peut-on obtenir la seconde de dimension 3 (pourquoi est-elle irréductible et différente de celle déjà construite ?) ?
3. Comment peut-on compléter la table des caractères de $\mathcal{S}_4$?

Exercice 22

Soit $\Bbbk$ un corps. Soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(2, \Bbbk)$ le sous-groupe des $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \Bbbk^*$ et $b \in \Bbbk$. Faisons agir G sur $\Bbbk$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b.$$

1. Calculer
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
   En déduire que les classes de conjugaison de G sont
$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk \smallsetminus \{0\} \right\}$$

et les
$$D_a = C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk \right\}$$
pour $a \in \Bbbk^* \smallsetminus \{1\}$.

2. Supposons désormais que $\Bbbk$ est fini, de cardinal q et donc que $|\mathrm{G}| = q(q-1)$ et G compte q classes de conjugaison. Désignons par V la représentation de permutation de G associée à l'action de G sur $\Bbbk$ et W l'hyperplan de V défini par
$$W = \left\{ \sum_{x \in \Bbbk} \lambda_x e_x, \sum_{x \in \Bbbk} \lambda_x = 0 \right\}$$
Montrer que W est une sous-représentation de V.
3. Calculer χ_W ; en déduire que W est irréductible.
4. Quelles sont les dimensions des autres représentations irréductibles de G ?
5. Comment peut-on construire un caractère linéaire de G à partir d'un caractère linéaire de $\Bbbk^*$?
En déduire que si $\Bbbk = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors la table des caractères de G est la suivante

	C_1	N	D_2	D_4	D_3
χ_{triv}	1	1	1	1	1
η	1	1	-1	1	-1
η^2	1	1	1	-1	-1
η^3	1	1	-1	-1	1
χ_W	2	-2	0	0	0

6. Supposons que $q = 4$. Établir la table des caracères de G. Cette table vous rappelle-t-elle quelque chose ? Pouvez-vous expliquer cette coïncidence ?