Simplicité du groupe alterné

On dit qu'un groupe est simple *s'il ne possède pas de sous-groupes distingués autre que lui-même et le groupe réduit à l'identité.*

Le groupe alterné $\mathfrak{A}(n)$ *est le groupe des permutations de signature 1.*

Exercice 1 – [Générateurs de $\mathfrak{A}(n)$].

(1) Montrez que si $n \geqslant 3$, les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}(n)$.
(2) Montrez que si $n \geqslant 5$, les 3 cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}(n)$, puis dans $\mathfrak{A}(n)$.
(3) Montrez que si $n \geqslant 5$, les paires de transpositions qui commutent engendrent $\mathfrak{A}(n)$ et qu'elles sont toutes conjuguées.

Exercice 2 – [3-cycles et transpositions] Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}(n)$.

(1) Montrez que si H contient un 3-cycle alors $\mathsf{H} = \mathfrak{A}(n)$.
(2) Montrez que si $n \geqslant 5$ et H contient une paire de transpositions qui commutent alors $\mathsf{H} = \mathfrak{A}(n)$.

Exercice 3 – [Éléments de $\mathfrak{A}(5)$].

(1) Quel est le cardinal de $\mathfrak{A}(5)$? Quels sont les ordres possibles d'éléments de $\mathfrak{A}(5)$ et leurs classess de conjugaison dans $\mathfrak{S}(n)$? Quel est le nombre de 5-cycles ?
(2) Si σ_0 et σ_1 sont deux 5-cycles et τ une transposition, montrez que σ_0 est conjugué dans $\mathfrak{A}(5)$ à σ_1 ou à $\tau\sigma_1\tau$. Montrez qu'il y a au plus deux classes de conjugaisons (dans $\mathfrak{A}(5)$) de 5-cycles dans $\mathfrak{A}(5)$ et qu'elles ont le même cardinal.

Exercice 4 – [Simplicité de $\mathfrak{A}(5)$]. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}(5)$ que l'on suppose non réduit à l'identité.

(1) Montrez que le nombre de 5-cycles de H est 0, 12 ou 24.
(2) En examinant les types de conjugaisons possibles des éléments de H en déduire que $\mathsf{H} = \mathfrak{A}(5)$.

Exercice 5 – [Simplicité de $\mathfrak{A}(n)$]. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}(n)$ non réduit à l'identité. Soit $\sigma \neq 1$ dans H, et $a \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a \neq \sigma(a) := b$. Soit enfin $c \notin \{a, b, \sigma^{-1}(a)\}$ et τ le 3-cycle (a, c, b).

(1) Montrez que $\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ est le 3-cycle $(\sigma(a), \sigma(b)\sigma(c))$.
(2) Soit $\rho := \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$. Montrez que ρ appartient à H. Montrez que ρ est différent de l'identité en calculant l'image de $\sigma(c)$.
(3) Montrez que $F_0 := \{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$ a au plus 5 éléments.
(4) Soit F contenant F_0 et de cardinal 5. Soit $E =: \{1, \ldots, n\} \setminus F$. Soit $\mathsf{G} := \{\sigma \in \mathfrak{A}(n),\ \ \sigma|_E = \mathrm{Id}\}$. Montrez que $G \cong \mathfrak{A}(5)$.
(5) Montrez que ρ appartient à G. Montrez ensuite que $\mathsf{H} \cap \mathsf{G} = \mathsf{G}$.
(6) En déduire que H contient un 3-cycle puis que $\mathsf{H} = \mathfrak{A}(n)$.