Université Côte d'Azur
Laboratoire Dieudonné

M1
Groupes et Géométrie
2021-2022

Sous-espaces affines

Un peu de terminologie en petite dimension: un plan affine *est un espace affine de dimension 2, une* droite affine *est un espace affine de dimension 1. Deux droites affines sont* sécantes *si leur intersection est non vide et réduite à un point. Un* vecteur directeur *d'une droite affine est un vecteur engendrant la droite vectorielle sous-jacente.*

Enfin on dit qu'un droite et un plan de l'espace affine de dimension 3 sont parallèles *si la droite vectorielle sous-jacente est incluse dans le plan vectorial sous-jacent. ATTENTION: je considère cette dernière terminologie comme dangereuse et je ne l'utiliserai pas: si l'on utilise cette terminologie, le parallèlisme n'est PAS une relation d'équivalence.*

Exercice 1 –[Recherche d'équations cartésiennes] On se place dans $\mathbf{R}^3$ considéré comme un espace affine. Donnez les équations cartésiennes des sous espaces suivants

(1) du plan affine P passant par $(1,2,3)$ de plan tangent d'équation
$$3x+2y=4z=0\ .$$
(2) du plan affine P passant par $(3,2,1)$ parallèle au plan affine d'équation
$$x+y+z=4\ .$$
(3) de la droite affine passant par le point $(3,1,1)$ de vecteur directeur $(1,1,1)$.
(4) de la droite affine passant par le point $(1,2,2)$ et le point $(3,1,1)$.

Exercice 2 –[Equation d'un plan] Dans l'espace affine R^3, trouvez une équation du plan affine passant par le point $(1,2,3)$ et parallèle au plan d'équation $x+y+z=-1$. Donnez un système d'équations d'une droite affine passant par le point $(1,2,3)$ dont le vecteur directeur appartient au plan d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 3 – On se place dans un espace affine de dimension 3.

(1) Montrez que si l'intersection de deux plans est vide alors les deux plans sont parallèles.
(2) Donnez un exemple dans $\mathbf{R}^3$ de deux droites affines non parallèles et d'intersection vide.

Exercice 4 –[Espace engendré par deux droites] On se place dans un espace affine. On considère deux droites affines D_1 at D_2 et

$Q := \mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$ l'espace affine engendré par $D_1 \cup D_2$. Montrez que $\dim(Q) \leq 3$ puis que on'a les équivalences suivantes

(1) $\dim Q = 1$ si et seulement si $D_1 = D_2$,
(2) $\dim Q = 3$ si et seulement si D_1 et D_2 sont non parallèles et leur intersection est vide.
(3) $\dim Q = 2$ si et seulement si, soit D_1 et D_2 sont paral je lèles, soit D_1 et D_2 sont sécantes.

Exercice 5 –[Equation de droites]

(1) Soit D_1 la droite de $\mathbb{R}^4$ passant par $(1,0,0,0)$ de vecteur directeur $(1,1,1,1)$, et D_2 passant par $(0,1,0,0)$ et de vecteur directeur $(1,0,1,0)$. Donnez les équations cartésiennes de l'espace affine engendré par $D_1 \cup D_2$.
(2) On se donne les droites dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ d'équations cartéiennes

$$D : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y-4z &=& -1, \\ x-2y+z &=& 3. \end{array} \right. \quad D' : \left\{ \begin{array}{rcl} 11x-y-7z &=& \alpha, \\ x+y+z &=& 1. \end{array} \right.$$

(a) selon les valeurs du paramètre α, les droites D et D' sont-elles parallèles, sécantes ou d'intersection vide.
(b) Pouvez-vous donnez un système d'équation de D comportant une ses équations données pour D'.
(c) Donnez un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré par D et D'.

Exercice 6 –Soit P et Q deux sous-espaces affine d'un espace affine E d'espaces tangent $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$, soit $V = \mathrm{Aff}(P \cup Q)$ d'espace vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{V}$

(1) montrez : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} \subset \overrightarrow{V}$ et $\dim(\overrightarrow{V}) \geq \dim(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q})$.
(2) montrez : $\dim(\overrightarrow{V}) \leq \dim(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}) + 1$.
(3) montrez : $\dim(\mathrm{Aff}(P \cup Q)) \leq \dim(P) + \dim(Q) + 1$.
(4) montrez que $\dim(\mathrm{Aff}(P \cup Q)) = \dim(P) + \dim(Q) + 1$ si et seulement si vous l'intersection de P et Q est vide et $\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{Q} = \{0\}$.