Géométrie Affine

On note (a, b) la droite affine passant par les points distincts a et b.

Exercice 1 –[Produits d'homothéties] Soit h et h' deux homothéties de rapport λ et μ. On pose $H = h \circ h'$.

(1) on suppose $\lambda\mu \neq 1$. Montrez que H est une homothétie. Trouvez le centre A de H étant donné les centres O et O' de h et h'.

(2) Montrez que si $\lambda\mu = 1$, H est une translation dont on trouvera le vecteur.

Exercice 2 –Soit h une homothétie. Montrez que pour tout point A, alors les points A, $h(A)$ et $h \circ h(A)$ sont alignés.

Exercice 3 –Soit F une translation non triviale. Montrez alors que F n'a pas de points fixes. On note alors Δ_A la droite passant par A et $F(A)$. Montrez que pour tout A et B, Δ_A et Δ_B sont parallèles.

Exercice 4 –On va montrez la réciproque de l'exercice précèdent. Soit F une transformation affine.

(1) Montrez tout d'abord que

$$DF(v) - v = (F(A + v) - (A + v)) - (F(A) - A)) \tag{1}$$

(2) On suppose F différent de l'identité. Soit A un point, u le vecteur $F(A) - A$ et Δ la droite vectorielle engendrée par u. On suppose tout d'abord qu'il existe v tel que $DF(v) - v = -u$. Montrez que $A + v$ est un point fixe de F.

(3) On suppose que pour tout B, $F(B) - B$ est proportionnel à u. Montrez en utilisant l'équation (1) que

$$\mathrm{Im}(DF - \mathrm{Id}) \subset \Delta$$

(4) On suppose $\mathrm{Im}(DF - \mathrm{Id}) = \Delta$, montrez en utilisant la première question que F a un point fixe.

(5) En conclure que si F n'a pas de point fixe et pour tout A et B la droite $(A, F(A))$ est parallèle à la droite $(B, F(B))$, alors F est une translation.

Exercice 5 –[Théorème de Thalès] Soit Δ_0 et Δ_1 D_0. Soit d et D deux droites passant par un point O. On note A et a les intersections de D et d avec Δ_0, ainsi que B et b les intersections de D et d avec Δ_1.

Montrez que Δ_0 et Δ_1 sont parallèles, si et seulement si

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB}.$$

Exercice 6 –[MILIEU] On suppose que le corps sous-jacent est de caractéristique différente de 2, de telle sorte que $2 := 1 + 1 \neq 0$.

Soit a et b deux points d'un espace affine. Soit $M(a,b)$ le point tel que
$$M(a,b) = a + \frac{1}{2}(b-a) .$$

(1) Montrez que $M(a,b) = M(b,a)$.
(2) Montrez que M est l'unique point de l'espace affine tel que $(a-M)+(b-M)=0$
(3) Dans un repère affine, calculez les coordonnées de $M(a,b)$ en fonction des coordonnées de a et b.

Le point $M(a,b)$ s'appelle le *milieu de a t b* est quelquefois noté
$$M(a,b) = \frac{a+b}{2} .$$

Exercice 7 –[PARALLÉLOGRAMMES] Un *parallélogramme* est la donnée de quatre points a,b,c,d tels que $b-a=c-d$.

(1) Montrez que a,b,c,d est un parallélogramme si et seulement si $\frac{a+c}{2} = \frac{d+b}{2}$,
(2) Montrez que si a,b,c,d est un parallélogramme alors b,c,d,a soit un parallélogramme,
(3) Montrez que a,b,c,d et un parallélogramme si et seulement si les droites (a,b) et (c,d) sont parallèles ainsi que les droites (a,c) et (b,d).

Exercice 8 –[THÉORÈME DE MENELAÜS] Soit a,b,c un triangle et A,B,C des points de (b,c), (a,c), (a,b). Montrez que A, B et C sont alignés, si et seulement si
$$\frac{Ab}{Ac}\cdot\frac{Bc}{Ba}\cdot\frac{Ca}{Cb} = 1.$$
On pourra utiliser l'homothétie de centre C qui envoie b sur a *etc.*, ou un repère adapté.

Exercice 9 –[MÉDIANES ET CENTRE DE GRAVITÉ] On se donne un triangle T, c'est-à-dire trois points a_0, a_1, a_2.

(1) Montrez qu'il existe un unique point M tel que
$$(a_0-m)+(a_1-m)+(a_2-m)=0.$$
Le point m s'appelle *le centre de gravité du triangle*.
(2) Les *médianes* de T sont les droites $(a_i, \frac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i+2}))$ Montez que les trois médianes se coupent au centre de gravité du triangle.

Exercice 10 –Soit F une transformation affine sans point fixes. Montrez alors que 1 est valeur propre de DF.