Géométrie Affine et Convexité

Exercice 1 –Soit dans $\mathbb{R}^3$ les trois plans affines d'équations cartésiennes

$$P : x + y + z = 1, \;\; P_0 : ax + by + cz = 0, \;\; P_1 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

(1) Donnez la condition sur (a, b, c) pour que $P \cap P_0$ soit une droite.
(2) On suppose maintenat que P_0, P et P_1 sont deux à deux non parallèles. Montrez que $P_0 \cap P$ et $P_1 \cap P$ sont des droites parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 2 –Soit a, b, c, α, β des paramètres réels. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois plans affine d'équations cartésiennes

$$P_1 : x + 2y + \beta z = a, \;\; P_2 : 2x + 4y = b, \;\; P_3 : \alpha x + (\alpha + 1)y = c.$$

Pour quelles valeurs des paramètres $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est non vide ?

Exercice 3 –Soit trois droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$\begin{array}{lcl} D_1 & : & a_1x + b_1y = c_1 \,, \\ D_2 & : & a_2x + b_2y = c_2 \,, \\ D_3 & : & a_3x + b_3y = c_3 \,. \end{array}$$

Montrez que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si D_1, D_2 et D_3 sont concourrantes ou deux à deux parrallèles.

Exercice 4 –[Théorème de Ceva] Soit a, b, c un triangle et A, B, C des points de (b, c), (a, c), (a, b). Montrez que (a, A), (b, B) et (c, C) sont concourrantes ou deux à deux parrallèles, si et seulement si

$$\frac{Ab}{Ac} \cdot \frac{Bc}{Ba} \cdot \frac{Ca}{Cb} = -1.$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 5 –Soit $A_1, \dots, A_p$, p points deux-à-deux distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n. Soit H un hyperplan de $\mathcal{E}$ et $A_{p+1} \in \langle A_1, A_p \rangle$. Soit M_j l'intersection (supposée exister) de H avec la droite (A_j, A_{j+1}) et

$$\lambda_j = \frac{M_j A_{j+1}}{M_j A_j}.$$

Montrez que $\Pi_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$ si et seulement si $A_1 = A_{p+1}$

Exercice 6 –[Théorème de Pappus- affine]

Soit D et D' deux droites affines distinctes sécantes en 0. Soit A, B et C trois points de D, de même A', B' et C' trois points de D'.

On suppose que (B, C') et (B', C) son parrallèles de même que (A, C') et (A', C). Montrez alors que (B, A') et (A', C) sont parrallèles.

Exercice 7 –Soit F une application affine d'un espace affine dans lui même. On suppose qu'il existe p tel que

$$\underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{p} = \mathrm{id} \ .$$

Montrez que F admet un point fixe.

Exercice 8 –

(1) Montrez que l'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est ouvert.
(2) Montrez que l'enveloppe convexe d'un ensemble compact est compact.
(3) Déterminez $\mathrm{Env}(A)$ lorsque A est la réunion de la droite $y = 0$ de $\mathbb{R}^2$ et du point $(0, 1)$. L'enveloppe convexe d'un partie fermée est-elle toujours fermée ?