Université Côte d'Azur
Laboratoire de Mathématiques

M1
Groupes et Géométrie
2018-2019

Groupes linéaires et exponentielles

Exercice 1. [Le plan hyperbolique] Soit H l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathsf{G} = \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrez que l'application qui associe Ã z dans H et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de G associe $\frac{az+b}{cz+d}$ définit une action de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ sur H.
(2) Montrez que cette action est transitive.
(3) Quel est le stabilisateur de i ? (on retrouvera un groupe connu).
(4) Quels sont les orbites du groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{pmatrix}$ oÃ¹ t appartient Ã $\mathbb{R}$.
(5) Montrez que l'application $\sigma : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ est une bijection de H. Si A appartient Ã G montrez qu'il existe une matrice B, telle que pour tout z de H, $\sigma A \sigma \cdot z = B \cdot z$.

Exercice 2.

(1) Calculez les exponentielles des matrices suivantes
$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} .$$
(2) A-t-on toujours $\exp(U + V) = \exp(U). \exp(V)$?
(3) On suppose que U et V sont deux matrices qui commutent, montrez que $\exp(U)$ et $\exp(V)$ commutent et que $\exp(U + V) = \exp(U). \exp(V)$.
(4) On suppose que U et V commutent et sont dans un voisinage suffisamment petit de l'identité, montrez que $\log(U)$ et $\log(V)$ commutent et que $\log(U.V) = \log(U) + \exp(V)$.

Exercice 3.

(1) Construire un isomorphisme entre $\mathsf{SO}(2, \mathbb{R})$ et l'ensemble des nombres complexes de module 1.
(2) Montrez que tout élément non trivial R de $\mathsf{SO}(3, \mathbb{R})$ admet un vecteur propre u de valeur propre 1.
(3) Montrez que si E est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est stable par un endomorphisme orthogonal f, $E^\perp$ est stable par f.
(4) Trouvez la matrice de f dans une base orthornormée (u_0, u_1, u_2) oÃ¹ u_0 est un axe.
(5) Montrez qu'un endomorphisme appartenant a $\mathsf{SO}(3)$ et différent de l'identité admet un unique (Ã homothétie près) vecteur propre de valeur propre 1.

La droite engendré par u s'appelle *axe de R*.

Exercice 4. Soit G un groupe. Le *centre de* G est l'ensemble des éléments commutant avec tout élément de G:
$$Z(\mathsf{G}) = \{h \in \mathsf{G} \mid \forall g \in hgh^{-1}\} .$$

(1) Montrez que $Z(\mathsf{G})$ est un sous groupe distingué de G.
(2) Quel est le centre de $\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})$?

(3) Montrez que tout élement du centre Z de $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ préserve l'axe de tout élément de SO_3. Montrez que Z est composé d'homothétie, puis que Z est réduit Ã l'identité.

Exercice 5. Soit A une matrice de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ commutant avec toute matrice de $\mathsf{SU}_n(\mathbb{C})$.

(1) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base hermitienne montrez qu'il existe B dans $\mathsf{SU}_n(\mathbb{C})$ telle que $B(e_i) = \lambda_i e_i$ avec les λ_i tous distincts.
(2) En déduire que pour tout i, $A(e_i) = \mu_i e_i$.
(3) Montrez que A est une homothétie.
(4) Quel est le centre de $\mathsf{SU}_n(\mathbb{C})$?

Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 6. Soit f un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est continu en 0, montrez que f est continu.

Exercice 7. Soit f un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$

(1) Montrez que pour tout entier p et tout réel x, $f(px) = pf(x)$.
(2) Montrez le mÃªme résultat pour p rationnel.
(3) Montrez qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout réel x, $f(x) = x \cdot u$.

Exercice 8. Soit f une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout x, y dans $[-1/2, 1/2]$ on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(1) Montrez que si x est dans $[-1, 1]$, alors pour tout $p > 1$ on a $f(\frac{x}{2^p}) = \frac{1}{2^p})f(x)$.
(2) Construire un morphisme g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g = f$ sur $[-1/2, 1/2]$.
(3) Montrez qu'il existe u dans $\mathbb{R}n$ tel que $f(x) = xu$ pour x dans $[-1/2, 1/2]$.

Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans un $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 9. Soit f et g deux morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans un $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$,

(1) on suppose que f et g coincide sur un voisinage de 0. Montrez – en utilisant la connexité – que $f = g$.

Exercice 10. Soit f un morphisme continu en zéro de $\mathbb{R}$ dans $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. Soit O_0 un voisinage de la matrice nulle tel que log est un difféomorphisme de O_0 sur un voisinage O_1 de l'identité. On rappelle que l'on peut choisir O_0 tel que pour tout $\lambda \leq 1$, $\lambda O_0 \subset O_0$.

(1) Montrez en utilisant la continuité du produit de matrices, qu'il existe un voisinage de l'identité O_2 tel que $O_2 \cdot O_2 \subset O_1$.
(2) Montrez en utilisant la continuité de f qu'il existe x_0 un réel tel que $f(y) \in O_2$ pour tout y tel que $|y| \leq x_0$. Montrez que pout tout entier $S \leq 1$, il existe une unique matrice A_S dans O_0 tel que $f(Sx) = \exp(A_S)$.
(3) Montrez que si S et T sont plus petit que 1, A_S et A_T commute. Montrez que si S et T sont plus petit que 1/2 alors $A_{S+T} = A_S + A_T$.
(4) Montrez enfin (en utilisant l'exercice 6) qu'il existe une matrice A tel que $f(t) = \exp(tA)$ pour t dans $[-1/2, 1/2]$
(5) Montrez (en utilisant l'exercice 8) qu'il existe une matrice A tel que $f(t) = \exp(tA)$ pour tout t.

Exercice 11. ($\star$) Soit H un sous-groupe fermé de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. On dit que H est *discret* s'il existe un voisinage de l'identité O tel que $O \cap \mathsf{H}$ est réduit Ã l'identité. On suppose Ã partir de maintenant que H n'est pas discret.

le but de l'exercice est de montrer que si H *est fermé et n'est pas discret, il contient un sous-groupe de la forme* $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrez qu'il existe une suite h_n d'éléments de H telle que
$$\lim_{n\to\infty} h_n = \mathrm{I}d\ ,\ \forall n, h_n \neq \mathrm{I}d.$$
(2) Montrez qu'il existe une suite de matrices A_n tendant vers 0 telle $\exp(A_n) = h_n$ pour n suffisamment grand.
(3) Montrez que l'on peut extraire une sous-suite telle que $\frac{1}{\|A_n\|}A_n$ converge vers une matrice B non nulle.
(4) Soit t un nombre réel quelconque et N_n l'entier telle que $N_n \leq \frac{1}{\|A_n\|} < N_n + 1$. Montrez que $N_n A_n$ converge vers tB.
(5) Quand H est fermé, montrez que pour tout réel t, $\exp(tB)$ appartient Ã H.

Lemme et relations d'orthogonalité de Schur

Exercice 12. Soit ρ une représentation de G sur V. Un vecteur u est *invariant* si pour tout g de G, $\rho(g)(u) = u$. On note $V^{\rho(G)}$ l'ensemble de vecteurs invariants de V. Montrez que V^G est un sous-espace vectoriel stable par ρ.

Exercice 13. Soit ρ et σ des représentations de G sur V et W respectivement, on note $\sigma \otimes \rho^*$ la représentation η sur $\mathrm{Hom}(V, W)$ donnée par $\eta(g) \cdot f := \sigma(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$ pour f dans $\mathrm{Hom}(V, W)$. Montrez que $\sigma \otimes \rho^*$ est bien une représentation.

Exercice 14. [Lemme de Schur] Soit ρ et σ des représentations de G sur V et W respectivement. On suppose ρ et σ irreductibles. On considère la representation $\eta = \sigma \otimes \rho^*$ sur $\mathrm{Hom}(V, W)$.

(1) Montrez que si f est invariant par η, alors $\ker(f)$ et $f(V)$ sont invariants par ρ et σ respectivement.
(2) Montrez que si ρ et σ sont irréductibles et f est invariant par η et $f \neq 0$ alors f est un isomorphisme.
(3) Montrez que si ρ et σ sont irréductibles non isomorphes, alors $(\mathrm{Hom}(V, W))^{\eta(G)}$ est de dimension 0.
(4) Montrez que si ρ et σ sont irréductibles et isomorphes, alors $(\mathrm{Hom}(V, W))^{\eta(G)}$ est de dimension 1.

Exercice 15. [Relations d'orthogonalité de Schur] Soit Γ un groupe fini. Soit ρ une représentation unitaire de Γ sur un espace vectoriel complexe V. Le *caractère* de ρ est la fonction
$$\chi_\rho : g \mapsto \mathrm{trace}(\rho(g))\ .$$
On rappelle que si f et h sont deux fonctions sur G alors
$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{\sharp G}\sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}.$$
(1) Montrez que si ρ et σ sont isomorphes alors $\chi_\rho = \chi_\sigma$.
(2) Montrez que $p = \frac{1}{\sharp G}\sum_{g\in G}\rho(g)$ vérifie $p \circ p = p$. Puis que p est la projection orthogonale de V sur V^G. En déduire que $\frac{1}{\sharp G}\sum_{g\in G}\chi_\rho(G) = \dim(V^G)$.
(3) Montrez que $\chi_{\rho+\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$. Montrez que si $\eta = \rho \otimes \sigma^*$ alors $\chi_\eta = \chi_\rho \cdot \overline{\chi}_\sigma$.
(4) Montrez que si ρ et σ sont irréductibles alors
$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma\rangle = 0 \quad , \quad \text{si } \rho \text{ et } \sigma \text{ ne sont pas isomorphes,}$$
$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma\rangle = 1 \quad , \quad \text{si } \rho \text{ et } \sigma \text{ sont isomorphes.}$$