Université Côte d'Azur
Laboratoire Dieudonné

M1
Groupes et Géométrie
2018-2019

Représentations I

Exercice 1 – Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Montrez que la représentation de $\mathsf{GL}(V)$ sur V est irréductible. On utilisera le fait vu en exercice que $\mathsf{GL}(V)$ agit transitivement sur les vecteurs non nuls de V.

Exercice 2 –[Représentations et endomorphismes] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et A un endormorphisme inversible de E.

(1) Montrez qu'il existe une représentation ρ_A de $\mathbb{Z}$ sur E telle que $\rho_A(1)\cdot u = A(u)$ pour tout u de E.

On utilisera le résultat et la notation de ce premier exercice par la suite.

Exercice 3 – Soit ρ une représentation de G sur V. Soit u un vecteur de V et

$$\langle \mathsf{G}, u\rangle = \mathrm{Vect}\{\rho(g)\cdot u \mid g \in \mathsf{G}\}\ .$$

(1) Montrez que $\langle \mathsf{G}, u\rangle$ est stable par G.
(2) Montrez que si ρ est irréductible alors $\langle \mathsf{G}, u\rangle = E$. On va voir que la réciproque est fausse.
(3) Soit A la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ que l'on voit comme un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$. Montrez que ρ_A n'est pas irréductible.
(4) Soit $u = (1, 1)$, Montrez $\langle \mathsf{G}, u\rangle = E$.

Exercice 4 –[Exemple de représentation non complètement reductible] Soit A la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(1) Quels sont tous les sous-espaces stables de dimension 1 par ρ_A? tous les sous-espaces stables ?
(2) Montrez que ρ_A n'est pas irréductible puis que ρ_A n'est pas complétement réductible.

Exercice 5 –[Représentations irréductibles de groupes abéliens] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, de dimension finie, et A un endormorphisme de E.

(1) Montrez que tout sous-espace propre de E_λ de A est stable par ρ_A.
(2) Montrez que si l'endormorphisme B commute avec A, alors E_λ est également stable par ρ_B.
(3) Soit Γ un groupe abélien et ρ une representation irreductible de Γ sur E. Montrez (en utilisant les questions précédentes) que E est un sous-espace propre pour tout endomorphisme de la forme $\rho(g)$.
(4) Montrez que toute représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension 1.

Exercice 6 –[Représentations de $\mathsf{G} = \mathsf{SL}(2, \mathbf{C})$] Soit V_n l'espace des polynomes homogènes de degré $n-1$ a deux variables à coefficients complexes. Soit ρ_n l'application de $\mathsf{SL}(2, \mathbf{C})$ dans $\mathsf{GL}(V_n)$, donnée par si $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par

$$\rho_n(A)P(X, Y) = P(dX - bY, -cX + aY) = P(A^{-1}(X, Y)) \ .$$

(1) Montrez que ρ_n définit une représentation de G sur V_n.
(2) Montrez que $\rho_n\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ possède un unique sous espace propre L, et que celui-ci est de dimension 1. Donnez explicitement un vecteur u non nul de L
(3) Montrez que u appartient à tout sous-espace stable par ρ_n.
(4) Soit B le sous-groupe de G, formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que $\rho_n(\mathsf{B})\cdot u$ engendre V_n.
(5) En déduire que la représentation ρ_n est irreductible.
(6) Montrez qu'il existe un vecteur v, tel que pour toute norme hermitienne sur V_n,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\| \rho_n\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}\right) \cdot v \right\| = \infty \ .$$

(7) En déduire que ρ_n n'est pas unitaire.

Exercice 7 –[rappels: exponentielle et logarithme de matrice]

(1) Montrez que si A est une matrice alors la série

$$\exp(A) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A \ ,$$

converge.
(2) Montrez que si A est diagonale alors $\exp(A)$ est diagonale. Quelles sont les valeurs propres de cette dernière en fonction des valeurs propres de A.
(3) Montrez que $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$. Puis que si A et C commutent $\exp(A + C) = \exp(A)\exp(C)$
(4) Montrez que $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{trace}(A))$. $(*)$
(5) Montrez que si A est une matrice dans un voisinage suffisamment petit de l'identité alors la série

$$\log(A) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p} (A - 1)^p \ ,$$

converge. Montrez que $\log(BAB^{-1}) = B\log(A)B^{-1}$. Puis que si A et C commutent $\log(AC) = \log(A) + \log(C)$
(6) Montrez que $\exp(\log(A)) = A = \log(\exp(A)$. $(*)$
(7) En déduire que exp est un homéomorphisme d'un voisinage de zéro dans un voisinage de l'identité.

$(*)$: *On pourra utiliser (en le démontrant) que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbf{C})$.*