Groupes et actions de groupes

Exercice 1. [Rationnels] Montrez que $\mathbb{Q}$ n'est pas finiment engendré: on supposera que $\mathbb{Q}$ est engendré par $s_1, \ldots s_p$ et on commencera par montrer qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout i, $Ns_i \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. [Groupe linéaire] Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\mathsf{G} = GL(E)$.

(1) Montrer que $\mathsf{G} \times E \to E$, $(g, u) \mapsto g.u$ est une action à gauche de G sur E.
(2) Montrez que cette action a deux orbites et décrivez-les.
(3) Montrer que l'application $\mathsf{G} \times E^2 \to E^2$, $(g, (v, u)) \mapsto (g.v, g.u)$ est une action à gauche de G sur E^2.
(4) Montrez que les orbites de cette action sont exactement
   (a) $U = \{(u, v) \mid (u, v) \text{ libre }\}$
   (b) $O = \{(0, 0)\}$
   (c) $O_\infty = \{(u, 0) \mid u \neq 0\}$
   (d) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $O_\lambda = \{(u, v) \mid, v \neq 0, u = \lambda v\}$

Exercice 3. [Formes quadratiques] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On considère B l'ensemble des formes quadratiques sur E. Soit $\mathsf{G} = GL(E)$.

(1) Montrer que l'application $\mathsf{G} \times B \to B$, $(g, q) \mapsto g^*q := q \circ g$ est bien définie et définit une action à droite de G sur B.
(2) Quel est le stabilisateur de q si q est définie positive ?
(3) On rappelle que B s'identifie à l'espace S des matrices symétriques, une fois une base de E donnée. Si A est la matrice de q, quelle est la matrice de $g^*.q$? Quelle est l'action correspondante sur l'ensemble des matrices symétriques ?
(4) Montrez que l'action de G sur B n'a qu'un nombre finie d'orbites et les caractériser. (utiliser le théorème de Sylvester)

Exercice 4. [Matrices symétriques] Soit $\mathsf{G} = O(n)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^n$ et S l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathbb{R}^n$.

(1) Montrez que $\mathsf{G} \times S \to S$, $(g, A) \mapsto g_*A := g\cdot A\cdot g^{-1}$ est bien définie et définit une action à gauche de G sur S.
(2) Caractériser les orbites de cette action : montrez que deux matrices sont sur la même orbite si elles ont le même polynome caractéristique.
(3) Soit S une matrice symétrique ayant n valeurs propres distinctes. Quelle est le stabilisateur de S ?

Exercice 5. [Rang] E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\mathsf{G} = GL(F) \times GL(E)$ et $V = \mathrm{Hom}(E, F)$

(1) Montrez que $\mathsf{G} \times V \to V$, $(g, h, \phi) \mapsto g \circ \phi \circ h^{-1}$ est bien définie et définit une action à gauche de G sur V.
(2) Montrez que si ϕ a rang p, il existe une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de E une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F telle que $\phi(e_i) = f_i$ is $i \leqslant p$ et $\phi(e_i) = 0$ sinon.
(3) Montrez que deux matrices ont le même rang si et seulement si elles sont dans la même orbite de G.

Exercice 6. [Support d'une permutation] Le *support* d'une permutation σ de E est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

(1) soit σ une permutation de E. Soit f une permutation. Montrez que O est une orbite de σ si et seulement si $f(O)$ est une orbite de $f \circ \sigma \circ f^{-1}$?
(2) Montrez que $\mathrm{Supp}(f\sigma f^{-1}) = f\left(\mathrm{Supp}(\sigma)\right)$.
(3) Soit σ et τ deux permutations de support disjoints E_1 et E_2. Montrez que

(a) $\sigma\tau = \tau\sigma$
(b) Le support de $\sigma\tau$ est $E_1 \sqcup E_2$ et $\sigma\tau\,|_{E_1} = \sigma$, $\sigma\tau\,|_{E_2} = \tau$

(4) Montrez que toute permutation σ de E, dont les orbites sont $E_1, \ldots, E_p$ peut s'écrire comme le produit de permutations σ_i de support E_i, telle que de plus
(a) $\sigma\,|_{E_i} = \sigma_i\,|_{E_i}$,
(b) $\sigma\,|_{E_i} = \sigma_i\,|_{E_i}$,
(c) $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$,

Exercice 7. [Cycles et transpositions]. On considère le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ comme agissant sur $E = \{1, \ldots, n\}$. Soit σ une permutation. On dit que σ est *cyclique* si elle possède exactement une seule orbite de longueur non réduite à 1.

(1) On suppose tout d'abord que σ est de support total et cyclique. On considère l'action de $\langle\sigma\rangle$ sur E,
(a) Montrez que pour tout x_0 de E, $\mathrm{Stab}(x_0) = \{e\}$,
(b) Montrez que l'ordre de σ est n,
(c) Montrez que deux permutations cycliques de support total sont conjuguées.
(d) Montrez que deux permutations cycliques de même support sont conjuguées
(e) Montrez que deux permutations cycliques dont les supports ont le même cardinal sont conjuguées

(2) Montrez qu'une permutation cyclique est le produit de transpositions, en déduire que toute permutation est le produit de transpositions. (utilisez l'exo précédent)
(3) une *partition de l'entier* n est une suite d'entiers $n_1 \geqslant n_2 \ldots \geqslant n_p$ telle que $\sum_j n_j = n$.
(4) (*) Montrez que la decomposition en orbites de sigma donne naissance à une partition de n, et que deux permutations sont conjugués si et seulement si elles sont associées à la même partition.

Exercice 8. [Cardinal du groupe linéaire] Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal k. Soit E_n un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $\mathsf{G}_n := GL(E_n)$ et $f(n) = \sharp\mathsf{G}_n$.

(1) Quel est le cardinal de E_n ?
(2) Soit P_n le stabilisateur d'un vecteur non nul de E_n. Décrire dans une base adaptée les matrices de P_n. Montrez que $\sharp P_n = f(n-1) \cdot k^{n-1}$.
(3) Utilisez la formule des classes pour donner une formule de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$ et calculez $f(n)$ en fonction de k.
(4) Donnez le cardinal de $SL(E_n) = \{f \in GL(E_n) \mid \det(f) = 1\}$.

Exercice 9. [Ping Pong]. Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe quatre sous-ensembles non vides deux à deux disjoints disjoints A_0, A_1, B_0 et B_1, et deux bijections a et b de E, telle que en posant $A = A_0 \sqcup A_1$, $B = B_0 \sqcup B_1$

$$a(A_0 \sqcup B) \subset A_0, \quad b(A \sqcup B_0) \subset B_0, \quad a^{-1}(A_1 \sqcup B) \subset A_1, \quad b^{-1}(A \sqcup B_1) \subset B_1,$$

(1) Montrez que si w est un mot réduit an a et b, alors $w \neq 1$: on étudiera l'image de A ou B suivant les cas.
(2) Montrez que le groupe engendré par a et b est isomorphe au groupe libre à deux générateurs,
(3) (*) utilisez cette idée pour montrez que le groupe engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est le groupe libre à deux générateurs (On prendra $E = \mathbb{R}^2$, A_i et B_i des secteurs)