Université Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire Dieudonn

Feuille 2

M1
Geo Diff
2017-2018

Exercice 1 –Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par $F(x,y) = \exp(x-y) - 1 - x - y$.
1) Montrer que l'équation $F(x,y) = 0$ définit implicitement au voisinage de $x = 0$ une fonction $y = \phi(x)$ avec $\phi(0) = 0$.
2) Calculer $\phi'(0)$ et déterminer la limite de $\dfrac{\phi(x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

Exercice 2 –Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y$.
a) Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$ définit implicitement au voisinage de $x = 0$ une fonction $y = \phi(x)$ indéfiniment dérivable telle que $\phi(0) = 0$.
b) Calculer le développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 3 –Montrer que le système d'équations

$$\begin{aligned} (1+x+y)\cos z + x^3 &= 1, \\ x - y - z &= 0, \end{aligned}$$

détermine pour $|z|$ assez petit deux fonctions $z \mapsto x(z)$ et $z \mapsto y(z)$ de classe C^1 sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ qui vérifient $x(0) = y(0) = 0$. Calculer les dérivées en $z = 0$ de ces deux fonctions.

Exercice 4 –On rappelle que si $f = (f_1, f_2)$ est une fonction de U dans $E \times F$ alors $Df = (Df_1, Df_2)$. Montrez que si f_1 est une immersion alors f est une immersion.

Exercice 5 –Soit f une fonction de classe C^∞ dfinie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. Montrez que f est une submersion en x si et seulement si $d_x f \neq 0$.
2. trouvez en quels points la fonction $(x,y) \mapsto 2xy - y^3$ est une submersion.
3. Soit $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \ldots + x_n^2$; Montrez que f est une submersion en tout $x_1, \ldots, x_n \neq 0$.
4. Soit q une forme quadratique non dgnre associe la forme bilinaire symtrique b sur un espace vectoriel E. Montrez que $d_x q(u) = 2b(x,u)$. Montrez que q vu comme fonction sur E est une submersion en dehors de 0.

Exercice 6 –Soit P un polynôme a plusieurs variables complexes vu comme une application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$. Soit $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, on note $\partial_Z P$ le vecteur $\frac{\partial}{\partial z_1}P, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}P$. Montrez que si $U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{C}^n$ alors

$$d_Z P(u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial}{\partial z_1} P u_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial z_n} P u_n \ .$$

Montrez que P est une submersion exactement aux points ou $\partial_Z P$ ne s'annule pas.

Exercice 7 –Soit F une fonction de $\mathbf{C}^n$ á valeurs dans $\mathbf{C}$. On dit qu'elle est *holomorphe* si toutes ses fonctions partielles le sont. On dfinit comme dans l'exercice prcedent ∂F, montrez de nouveau Montrez que F est une submersion exactement aux points ou $\partial_Z F$ ne s'annule pas.

Exercice 8 –Montrer que le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$: $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 - xy = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.

- Quelle est sa dimension ?
- Donner l'équation de l'espace tangent en $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

- Déterminer les points de V les plus proches de l'origine.

Exercice 9 –Si S est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et S' une sous-variété de $\mathbf{R}^m$, montrer que $S \times S'$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{m+n}$.

Exercice 10 –On identifie l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$ à $\mathbf{R}^{n^2}$. Démontrer que $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ et $O(n, \mathbf{R})$ sont des sous-variétés. Calculer leurs dimensions et l'espace tangent en un point.

Exercice 11 –Soit $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme quadratique symétrique non dégénérée de signature (p, q). Montrer que l'ensemble de vecteurs $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $Q(x) = 1$ forment une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. Calculer l'espace tangent en un point x et identifier cette sous-variété.

Exercice 12 –(i) Montrer que le fibré tangent à la sphère S^2 est une sous-variété de codimension deux de $\mathbf{R}^6$.
(ii) Montrer que le fibré unitaire tangent à la sphère S^2 est une sous-variété de codimension trois de $\mathbf{R}^6$ difféomorphe à $SO(3, \mathbf{R})$.

Exercice 13 –Montrer qu'une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

Exercice 14 –Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$, et soient f, g, h des fonctions définies sur U par $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $h(x, y, z) = x - y - z$.
i) Montrer que les zéros communs à g et h forment une sous-variété différentiable M de $\mathbf{R}^3$.
ii) Montrer que f admet un unique minimum sur M.

Exercice 15 –i) On dit que deux sous-variétés différentiables S et S' de $\mathbf{R}^n$ sont transverses si pour tout point $a \in S \cap S'$, on a $T_aS \oplus T_aS' = T_a\mathbf{R}^n$. Montrer que, dans ce cas, $S \cap S'$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ et calculer sa codimension en fonction de celles de S et S'.
ii) Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $g : U \to \mathbf{R}^n$, une application différentiable. On dit que g est transverse à une sous-variété S de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $b = g(a) \in S$, on a $dg(a)(\mathbf{R}^p) \oplus T_bS = T_b\mathbf{R}^n$. Montrer que g est transverse à S si et seulement si son graphe est transverse à $U \times S$.
iii) En déduire que si g est transverse à S, alors $g^{-1}(S)$ est une sous-variété différentiable de $\mathbf{R}^p$ dont on donnera la codimension.

Exercice 16 – Soit A une matrice symétrique réelle de taille n, et $< >$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^n$.

1. On considère S la sphère unité et $\psi : S \to \mathbf{R}$ définie par $\psi(x) =< A.x, x >$. Montrer que si ψ admet un extremum en $x_0 \in S$, alors x_0 est un vecteur propre de A.

2. Montrer que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.