

Exercice 1 – Soit $R > r > 0$, on considère

$$W := \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

- (1) Montrer que V est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ et la dessiner.
- (2) Montrez que V est compact
- (3) Quels sont les points critiques et extrema de la fonction $g(x, y, z) = x$ sur V
- (4) (plus dur) Montrez que V est difféomorphe à $S^1 \times S^1$.

Exercice 2 – Soit $C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}$.

- (1) Montrez que C est une sous-variété, et dessinez la,
- (2) Montrez que C est difféomorphe à $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 – Soit V une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. On suppose que $0 \in V$ et $T_0V = \mathbf{R}^k \times \{0\}$. Soit π la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^k$.

- (1) calculez $T_0\pi$.
- (2) Montrez que π est un difféomorphisme local
- (3) Montrez que V est localement un graphe au voisinage de 0

Montrez en général qu'une sous-variété W est au voisinage de tout point x un graphe au-dessus de T_xW .

Exercice 4 – *Rappel : Soit E un espace euclidien de dimension n . Un projecteur orthogonal est un endomorphisme p de E tel que $p = p^*$ et $p^2 = p$. Un tel projecteur est caractérisé par son image et $\dim(\text{Im}(p)) = \text{trace}(p)$. Une fois choisi une base orthogonale de E , la matrice A d'un projecteur orthogonal est symétrique et vérifie $A^2 = A$. On considère dans cet exercice l'espace vectoriel S des endomorphismes symétriques, et l'application $\phi : S \rightarrow S$ donnée par $\phi(A) = A^2 - A$. on rappelle que $\dim(S) = n(n+1)/2$.*

- (1) Donnez l'expression de $D_B\phi(A)$
- (2) Si P est un projecteur de trace p , donnez le rang de ϕ en P en fonction de p et n .
- (3) Montrez que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de trace p est une sous-variété et donnez sa dimension.

Exercice 5 –

- (1) Soit $E := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4y^2 + 9x^2 = 1\}$ Quelle est la nature de l'ensemble E ? Dessiner E .
- (2) Soit $g(x, y) = 4y^2 - 3x^2$. Montrez que g admet un minimum et un maximum sur E .
- (3) Trouvez les maxima et minima de g sur E .

Exercice 6 – Cherchez les minima et maxima de la fonction f sur l'ensemble A dans les cas suivants

- (1) $f(x, y, z) = x - y + z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.
- (2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- (3) $f(x, y) = \sin(xy)$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$.
- (4) $f(x, y, z) = x + y + z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$.

Exercice 7 –Voici des exercices d’origine géométriques

- (1) Montrez que le volume du plus grand parallélépipède rectangle qui puisse être inscrit dans l’ellipsoïde d’équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

est $8abc/\sqrt{3}$.

- (2) trouvez la distance minimale entre la courbe $y = x^2$ et la droite $x - y = 2$.
(3) Trouvez les points les plus éloignés et les plus proches du point $(0, 0, 2)$ sur la sphère $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$.
(4) Trouvez les points les plus proches et les plus éloignés de l’origine sur la courbe d’équation $x^6 + y^6 = 1$.

Exercice 8 –Un récipient cylindrique doit avoir un volume d’un litre, quel doit être sa forme (hauteur, rayon) pour minimiser la matière utilisée ?

Exercice 9 –*Le but de l’exercice est de trouver le minimum du produit des distances aux côtés d’un point M intérieur au triangle.* On désigne par a, b, c les longueurs des côtés du triangle A, B et C et S son aire. pour un point M , on note u, v, w les aires des triangles MBC, MCA et MAB . On a bien sûr $u + v + w = S$.

- (1) Montrez que le problème revient à maximiser la fonction $f(u, v, w) = \frac{8uvw}{abc}$ avec la contrainte $u + v + w = S$.
(2) Montrez que ce maximum est atteint pour M le centre de gravité du triangle et qu’alors f prend la valeur $\frac{8S^3}{27abc}$

Exercice 10 –Soit C un cercle et G un point à l’intérieur du cercle. On cherche dans cet exercice les triangles d’aire maximale dont les sommets sont sur C et le centre de gravité est G .

- (1) En choisissant judicieusement des coordonnées. On suppose que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et que $G = (0, a)$ avec $0 \leq a < 1$ Montrez que l’ensemble W des $(u, v, w) \in C^3$ dont le centre de gravité est G forme un sous variété compacte de $\mathbb{R}^6$. Quel est son espace tangent au point (u, v, w) ?
(2) Donnez l’expression de l’aire du triangle donné par (u, v, w) comme une fonction A de (u, v, w) .
(3) Trouvez les points critiques de A sur W . Quels sont les maximaux.