

Exercice 1 –[UTILISÉ EN COURS] Soit f une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de zéro dans un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que $f(0) = 0$ et $D_0 f = 0$. On veut montrer qu'il existe des fonctions $f_i, g_i, i \in \{1, n\}$, telles que $f_i(0) = 0 = g_i(0)$ et telles que

$$f = \sum_{i=1}^n f_i^2 - \sum_{i=1}^n g_i^2.$$

(Attention, les fonctions f_i et g_i ne sont pas uniques) On rappelle le *lemme de Morse*, supposons que $D_0^2 f$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors, il existe des coordonnées $u_1, \dots, u_n$, telles que au voisinage de 0,

$$f = \sum_{i=1}^p u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n-p} u_i^2$$

En déduire le résultat, en ajoutant à f une fonction bien choisie.

Exercice 2 –[PARTITIONS DE L'UNITÉ] Soit M une sous-variété de $\mathbf{R}^n$

- (1) Montrez que si U est un voisinage de x dans M , alors il existe une fonction $C^\infty, f : M \rightarrow [0, 1]$ qui vaut 1 au voisinage de x , et 0 sur un ouvert contenant $M \setminus U$ (Montrez le résultat pour $M = \mathbf{R}^n$ tout d'abord)
- (2) Montrez que si U et V sont deux ouverts de M tels que $M = U \cup V$ alors il existe une fonction $\phi : M \rightarrow [0, 1]$ telle que ϕ est à support dans U et $(1 - \phi)$ à support dans V .
- (3) Montrez que si $\{U_i\}_{i=1, \dots, N}$ est un recouvrement de M alors il existe des fonctions C^∞ positives ou nulles ϕ_i tel que ϕ_i est à support dans U_i et $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$.

Exercice 3 –Calculez les crochets des champs de vecteurs suivants sur $\mathbf{R}^2$

- (1) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_1 = \frac{\partial}{\partial y},$
- (2) $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_2 = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial y}$
- (3) Est-il possible de trouver des coordonnées (u, v) définies localement sur $\mathbb{R}^2$ telles que $X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial v},$

Exercice 4 –Soit $U = \{(x, y) \mid xy > 0\}$. On considère les champs de vecteurs

$$X = \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = 2\sqrt{xy} \frac{\partial}{\partial x}$$

- (1) Calculez le crochet $[X, Y]$
- (2) On considère les fonctions (u, v) définies par (u, v) définies par $x = uv^2$ et $y = u$. Montrez que (u, v) définit un difféomorphisme de U sur son image. Calculez $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ en fonction de X et Y .

Exercice 5 –On considère les trois champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ muni des coordonnées usuelles (x, y, z)

$$X = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

- (1) Montrez que X , Y et Z sont des champs de vecteurs tangents à la sphère S^2
- (2) Calculez les champs de vecteurs $[X, Y]$, $[Y, Z]$ et $[X, Z]$ et montrez qu'ils sont tangents à la sphère.

Exercice 6 – On considère les deux champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ définis par

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Montrez qu'il n'existe pas de surface S tels que X et Y soient tangents à S .

Exercice 7 – On considère sur $\mathbf{R}^2$ le champ de vecteurs $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Trouvez l'orbite de X passant par un point quelconque (x_0, y_0) .

Exercice 8 – Soit X et Y deux champs de vecteurs de flots $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ and $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Montrez que

$$d_m f([X, Y]_m) = \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{t,s=0} f(\psi_t \circ \phi_s(m)) - \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{t,s=0} f(\phi_s \circ \psi_t(m)).$$

Exercice 9 – Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et X et Y un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout $m \in M$, $X_m \in T_m M$.

- (1) Montrez que pour tout $m \in M$, $[X, Y]_m \in T_m M$.
- (2) Soit ϕ_t le flot de X , montrez que $\phi_t(M) \subset M$.

Exercice 10 – On rappelle que si $A \in \text{End}(E)$, alors $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est bien défini. Un *champ de vecteurs linéaires* sur un espace vectoriel E (de dimension finie) est un champ de vecteurs de la forme $u \rightarrow A(u)$, où $A \in \text{End}(E)$.

- (1) Donnez dans ce cas l'expression du flot de X en fonction de A : $\phi_t(u) = \exp(tA) \cdot u$.
- (2) Montrez que le crochet $[X, Y]$ de deux flots linéaires X et Y associés respectivement à A et B est le flot linéaire associé à $AB - BA$.

Exercice 11 – Soit $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels. On rappelle que $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert dans l'espace vectoriel $\text{M}(n, \mathbb{R})$ des matrices carrés $n \times n$ à coefficients réels, et que les applications $A, B \rightarrow AB$ ainsi que $A \rightarrow A^{-1}$ sont C^∞ . Un *sous-groupe de Lie* de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe $\mathbf{G}$ qui est aussi une sous-variété. Si $B \in \text{M}(n, \mathbb{R})$, on considère le champ de vecteur χ_B défini par $A \mapsto AB$.

- (1) Quel est le flot de χ_B ? Calculez $[\chi_A, \chi_B]$.
- (2) Soit $\mathbf{G}$ un sous-groupe de Lie et $B \in \mathbf{G}$, montrez que $\phi_B := A \mapsto AB$ est un difféomorphisme de $\mathbf{G}$ et calculez $T_{\text{Id}} \phi_B$.
- (3) Si $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de Lie et $A \in T_{\text{Id}} \mathbf{G}$, montrez que χ_A est tangent à $\mathbf{G}$.
- (4) Montrez que si $A \in T_{\text{Id}} \mathbf{G}$, alors $AB - BA \in T_{\text{Id}} \mathbf{G}$ et $\exp(A) \in \mathbf{G}$.