Université Côte d'Azur
Laboratoire Dieudonné

Feuille 5

M1
Geo Diff
2018-2019

Exercice 1 – On considère le changement de variables en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\cos\theta\ , \\ y &= r\cos\phi\sin\theta\ , \\ z &= r\sin\phi, \end{aligned}$$

Calculez $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ en fonction de $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\phi$ et $\mathrm{d}\theta$. Puis calculez $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \phi}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ dans les variables x, y, et z.

Exercice 2 – les formes suivantes sont elles fermées ? exactes ? dans ce cas trouvez une primitive

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\ , \tag{1}$$
$$(x^2+3y)\,\mathrm{d}x - y^3\,\mathrm{d}y\ , \tag{2}$$
$$\frac{x\ dx + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\ , \tag{3}$$
$$x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z\ , \tag{4}$$
$$e^x(y+x)\,\mathrm{d}x + (e^x+3e^y)\,\mathrm{d}y\ , \tag{5}$$
$$\frac{(1-x^2+y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{(1+x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\ , \tag{6}$$
$$2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y\ , \tag{7}$$
$$xy\,\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z\ , \tag{8}$$
$$2xe^{x^2-y}\,\mathrm{d}x - 2e^{x^2-y}\,\mathrm{d}y\ , \tag{9}$$
$$yz^2\,\mathrm{d}x + (xz^2+z)\,\mathrm{d}y + (2xyz+2z+y)\,\mathrm{d}z\ . \tag{10}$$

Exercice 3 – On considère la forme $\omega = (x^2+y^2+2x)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$. Montrez que ω n'est pas exacte. Trouvez une fonction Ψ d'une variable telle que $\Psi(x)\cdot\omega = \mathrm{d}f$ et précisez f.

Exercice 4 – Soit

$$\omega = \frac{2x}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

(1) Montrez que ω est fermée sur $U = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y>0\}$.
(2) Montrez que ω est exacte de deux manières différentes.
(3) Calculez $\int_C \omega$ où C est une courbe C^1 par morceaux d'extrémités $(1,2)$ et $(3,8)$.

Exercice 5 – Soit

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\ ,$$

définie sur $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$.

(1) Montrez que ω est fermée
(2) Calculez $\int_C \omega$ où C est le cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Exercice 6 – Calculez
$$\int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y\ ,$$
(1) Si γ a pour équation $x^2+y^2-ay=0$
(2) Si γ a pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}-2\frac{y}{b}=0$

Exercice 7 – Calculez
$$\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\ ,$$
où C est le carré de sommets successifs $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ de deux manières différentes: soit directement, soit en utilisant la formule d'homotopie.

Exercice 8 – Calculez l'intégrale de $(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$, le long du cercle de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

Exercice 9 – Calculez $\int_C \omega$ dans les cas suivants
(1) $\omega = xy\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y$ où C est l'arc de parabole d'équation $y^2=x$ avec $-1\geq y\geq 2$, dans le sens direct.
(2) $\omega = y\sin(x)\,\mathrm{d}x + x\cos(y)\,\mathrm{d}y$ et C est le segment de droite de $(0,0)$ vers $(1,1)$.

Exercice 10 – Soit $U=\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$,
$$U_1=\{(x,y)\mid y>-|x|\}\quad ,\quad U_2=\{(x,y)\mid y<|x|\}.$$
En traçant un dessin vérifiez que $U=U_1\cup U_2$ et $U_1\cap U_2$ a deux composantes connexes U_+ et U_- incluses respectivement dans $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^-\times\mathbf{R}$. Soit ω une forme fermée sur U.
(1) Montrez que ω a une primitive f_1 sur U_1, de même f_2 sur U_2.
(2) Montrez que f_1-f_2 vaut une constante k^+ sur U_+ et k^- sur U^- puis que $k^+-k^-=\int_{S^1}\omega$.
(3) Montrez que $\omega=\mathrm{d}f$ si et seulement si $\int_{S^1}\omega=0$, puis que $\dim(H^1(U))=1$.

Exercice 11 – Soit maintenant $U=\mathbf{R}^2\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$. on pourra supposer que $x_p=(p,0)$. Montrez qu'il existe (en les dessinant seulement) des ouverts U_1 et U_2 contractiles tels que $U=U_1\cup U_2$ et $U_1\cap U_2$ est la réunion disjointes de $n+1$ ouverts connexes. Soit également $S_1,\dots,S_n$ des cercles tels que S_1 entoure exactement l'un des x_i. Soit $\Phi:\Omega^1(U)\to\mathbf{R}^n$, $\omega\mapsto(\int_{S_1}\omega,\dots,\int_{S_n}\omega)$. Montrez que
(1) Pour tout $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbf{R}^n$, il existe ω fermée telle que $\Psi(\omega)=u$.
(2) Si ω est fermée, alors $\Psi(\omega)=0$ si et seulement si ω est exacte.
(3) Montrez que $\dim(H^1(U))=n$.