Feuille 6

Exercice 1 – Montrez que si ϕ est une submersion surjective de $M \to N$ alors ϕ^* de $\Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$ est injective.

Exercice 2 – Soit $\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbf{R}^2$. On considère l'application $\phi(\ell, \theta) = (\exp(\ell)\cos(\theta), \exp(\ell)\sin(\theta))$.

(1) Calculez $\phi^*\omega$,
(2) Montrez que si $\phi^*\alpha = 0$ alors $\alpha = 0$.

Exercice 3 – Soit ψ:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (xy, z^2 + y + x)$ calculez $\psi^*(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$.

Exercice 4 – On considère les translations $T_{(u,v)}$:$(x, y) \mapsto (x + u, y + v)$ de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même. Trouvez toutes les formes différentielles ω sur $\mathbb{R}^2$ qui sont invaraiantes par toutes les translations, c'est-à-dire vérifiant poiur tout u et v, $T^*_{u,v}\omega = \omega$.

Exercice 5 – On considère les homothéties h_λ de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même: $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$, et les rotations R_θ:$(x, y) \mapsto (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), -x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$.

(1) Quelles sont les formes différentielles sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, vérifiant que pour tout θ et λ, $h^*_\lambda\omega = \omega = R^*_\theta\omega$. (On utilisera les coordonnées polaires et les exercices 4,2 et 1)
(2) même question mais sur $\mathbf{R}^2$ cette fois-ci.
(3) Quelles sont les formes différentielles sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, vérifiant que pour toute application linéaire A inversible, $A^*\omega = \omega$.
(4) Même question avec les applications linéaires A de déterminant 1.

Exercice 6 – On rappelle la notation, si f est une fonction et Y un champ de vecteurs $\partial_Y f = \mathrm{d}f(Y)$. Soit X un champ de vecteurs sur une sous variété M. Soit $\{\phi_t\}$ son flot. Soit ω une forme différentielle C^∞ sur M. On définit alors la forme $L_X\omega$ par si u est un vecteur tangent à M,

$$L_X\omega(u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\phi_t^*\omega(u))$$

.

(1) Montrez que si $\omega = \mathrm{d}f$ alors $L_Y\omega = \mathrm{d}\partial_Y f = \mathrm{d}(\omega(Y))$, puis que si $\omega = g\,\mathrm{d}f$ alors $L_Y\omega = (\partial_Y)gdf + g\,\mathrm{d}(\partial_Y f)$. En déduire que $L_Y\omega$ est C^∞,
(2) On se donne des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur un ouvert de M. Calculez $L_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\mathrm{d}x_j$, puis l'expression de $L_Y\omega$ dans des coordonnées, si $Y = \sum_i Y_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\omega = \sum_i \omega_i\,\mathrm{d}x_i$.
(3) Montrez (en utilisant (1) et (2)) la formule de Lie–Cartan:

$$L_Y\omega(Z) = \partial_Z(\omega(Y)) - \omega([Y, Z]) \ .$$

On le montrera tout d'abord lorsque $\omega = f\,\mathrm{d}g$ puis on fera le cas général.
(4) Soit Y le champ de vecteurs $Y = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$. Calculez $L_Y(y\,\mathrm{d}x)$ et $L_Y(x\,\mathrm{d}y)$.

Exercice 7 – Soit S^n la sphere de rayon 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$, $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. Soit $N = (1, 0, \ldots, 0)$ et P l'hyperplan affine d'équation $x_0 = -1$.

On considère la *projection stéréographique* π de $S^n \setminus \{N\}$ dans P qui a y associe l'intersection $\pi(y)$ de P avec la droite (y, N).

(1) Donnez une formule pour π est montrez que π est C^∞.
(2) Montrez que π est une bijection et donnez une formule pour π^{-1}.
(3) Montrez que π est un difféomorphisme
(4) Montrez que $U = S^n \setminus \{N\}$ est contractile par rapport à tout point de U .

Exercice 8 – Montrez que si X est connexe par arcs, si f et g sont deux applications constantes de Y dans X alors f et g sont homotopes.

Exercice 9 – Montrez que la relation “être homotope" est une relation d'équivalence entre applications de M dans N. De même pour la relation, “être homotope à extrémités fixées".

Exercice 10 –

(1) Montrez que si U et V sont homéomorphes par une application F et U contractile par rapport à x alors V est contractile par rapport à $F(x)$.
(2) Montrez que dans une sous-variété, tout point admet un voisinage difféomorphe à une boule et donc contractile.

Exercice 11 –

(1) Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ une application continue telle que $H(0,1) = H(0,0) = H(1,1) = H(1,0) = x$. Soit $\gamma_0(s) = H(0,s)$, $\gamma_1(S) = H(1,s)$, $\eta_0(s) = H(s,0)$ et $\eta_1(S) = H(s,1)$. Montrez que $[\gamma_0] \bullet [\eta_1] = [\eta_0] \bullet [\gamma_1]$.
(2) Montrez que si deux lacets bacés γ_0 et γ_1 en x sont homotopes librement par une homotopie H, alors $[\gamma_0] = [\eta] \bullet [\gamma_1] \bullet [\eta]^{-1}$ où η s'exprime en fonction de H.
(3) Réciproquement, étant donné deux lacets γ et η basés en x montrez que γ et $\eta \bullet \gamma \bullet \eta^{-1}$ est librement homotope à γ.
(4) Si X est connexe par arcs, en conclure que l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopies libres de X.

Exercice 12 – Notre but est de montrer que dans une sous-variété tout chemin γ est homotope à extrémité fixées à un chemin C^∞ par morceaux dont l'image est un fermé d'intérieur vide. Soit donc γ un chemin continu $[0,1] \to M$.

(1) Traitez d'abord le cas où M est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
(2) Montrez que pour tout t il existe un ϵ tel que $\gamma[t-\epsilon, t+\epsilon]$ est inclus dans un ouvert U de M difféomorphe à un boule de $\mathbf{R}^n$.
(3) Montrez alors qu'il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, et des ouverts U_i difféomorphes à des boules tels que $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset U_i$.
(4) Montrez que γ, restreinte à $[t_i, t_{i+1}]$ est homotope à extrémité fixées à un chemin η_i qui est C^∞ et dont l'image est un fermé d'intérieur vide
(5) Conclure.

Exercice 13 – Déduire de l'exercice précédent que dans S^n, avec $n > 1$, tout lacet est homotope à un lacet constant.