

Exercice 1 – Soit f une application C^∞ de Y dans X . Soit γ un chemin à valeurs dans Y et $\omega \in \Omega^1(X)$. Montrez que

$$\int_{f \circ \gamma} \omega = \int_{\gamma} f^* \omega$$

Exercice 2 – Soit S^1 le cercle de rayon 1 dans $\mathbf{R}^2$, $x_0 = (1, 0$ et ω la forme différentielle $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. Soit π le revêtement $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\theta \rightarrow \exp(i\theta)$.

(1) Calculez $\pi^*(\omega)$. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un arc à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrez que

$$g(t) - g(0) = \int_g d\theta = \int_{\pi \circ g} \omega .$$

- (2) Soit f un lacet C^1 par morceaux défini de $[0, 1]$ dans S^1 , tel que $f(0) = (1, 0)$. Soit g un relèvement de f tel que $g(0) = 0$. Montrez que $g(t) = \int_{f[0, t]} \omega$.
- (3) On considère maintenant $n(f) := \frac{1}{2\pi} g(1)$. Montrez que $n(f) \in \mathbb{Z}$.
- (4) Montrez que si f_0 et f_1 sont homotopes alors $n(f_0) = n(f_1)$.
- (5) Montrez que si $n(f_0) = n(f_1)$ alors f_0 et f_1 sont homotopes, en construisant explicitement l'homotopie, en utilisant $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$.
- (6) Montrez que $\gamma \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (\omega)$ définit un isomorphisme de $\pi_1(S^1, x)$ vers $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 – [UNE PARTIE DU THÉORÈME D'HUREWICZ] Soit M une sous-variété connexe. Soit ω une forme fermée et γ un lacet. On rappelle $\int_{\gamma} \omega$ ne dépend que de la classe d'homotopie libre de γ et de la classe d'homologie de ω .

- (1) Montrez que l'application $h : H^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, x), \mathbb{R})$, $h[\omega] : \gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega$ définit un morphisme de groupe.
- (2) Montrez que h est injective.
- (3) En déduire que si M est simplement connexe alors $H^1(M) = 0$.

Exercice 4 – Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement. On suppose que Y est connexe et que X et Y sont des sous-variétés.

- (1) Montrez que $p_*(\pi_1(Y, y))$ est l'ensemble des lacets qui se relèvent en lacet fermés.
- (2) on considère p_* de $H^1(X)$ and $H^1(Y)$. Montrez que

$$\ker(p_*) = \left\{ \omega \in H^1(X) \mid \forall \gamma \in \pi_1(Y), \int_{p \circ \gamma} \omega = 0 \right\} .$$

(On utilisera l'exercice précédent).

Exercice 5 – [HOMOTOPIES LIBRES ET CLASSES DE CONJUGAISON]

- (1) Soit H une application continue de $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, telle que $H(0, 0) = H(1, 1) = H(1, 0) = H(0, 1) := x_0$. On considère les lacets $\gamma_0, \gamma_1, \eta_0$ et η_1 définis par

$$\eta_0(t) = H(t, 0), \quad \eta_1(t) = H(t, 1), \quad \gamma_0(t) = H(0, t), \quad \gamma_1(t) = H(1, t) .$$

Montrez alors qu'on a la relation suivante dans $\pi_1(X, x_0)$:

$$\eta_0 \bullet \gamma_1 = \gamma_0 \bullet \eta_1 .$$

- (2) Soit γ_0 et γ_1 deux lacets basés en x_0 et homotopes librement par une homotopie H . On note η le lacet $\eta(t) = H(0, t)$. Montrez alors que dans $\pi_1(X, x_0)$:

$$\gamma_1 = \eta^{-1} \bullet \gamma_0 \bullet \eta.$$

- (3) On se donne deux lacets γ_0 et γ_1 basés en x_0 et conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. Montrez alors que γ_0 et γ_1 sont homotopes librement.
- (4) Montrez que l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x_0)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopies libres de X .

Exercice 6 – soit π un revêtement de Y sur X . Soit $F_x := \pi^{-1}(x)$ la fibre de π en x . Pour tout chemin γ dans X tel que $\gamma(0) = x$ et $y \in F_x$ on note $\tilde{\gamma}_y$ l'unique relevé de γ tel que $\tilde{\gamma}_y(0) = y$. On alors $[\gamma](y) := \tilde{\gamma}_y(1)$.

- (1) Montrez que $\tilde{\gamma}_y(1)$ appartient à F_x . On note alors f_γ l'application de F_x dans elle-même telle que $f_\gamma(y) = \tilde{\gamma}_y(1)$.
- (2) Montrez que f_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ .
- (3) Montrez que $H_x := [\gamma] \rightarrow f_\gamma$ définit un morphisme de groupe de $\pi_1(X, x)$ dans les bijections de F_x .
- (4) On suppose Y connexe par arcs. Soit $y \in F_x$. Montrez alors que $G_y \gamma \mapsto f_\gamma(y)$ de $\pi_1(X, x)$ dans F_x est surjective.
- (5) Montrez que G_{y_0} est injective si et seulement si Y est simplement connexe.

Exercice 7 – Soit p^1 et p^2 les projections de $X \times Y$ sur X et Y respectivement. Montrez que (p_*^1, p_*^2) est un isomorphisme de $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ sur $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

Exercice 8 – On considère l'arbre quadrivalent $\mathcal{T}_4$.

- (1) Montrez que $\mathcal{T}_4$ est simplement connexe.
- (2) Montrez que qu'il existe un revêtement de $\mathcal{T}_4$ sur le graphe G à deux boucles a et b et un sommet.
- (3) Montrez (en utilisant l'exercice précédent) que le groupe fondamental de G est le groupe libre à deux générateurs.

Exercice 9 – [ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE] Une *équivalence d'homotopie* entre X et Y est une paire d'applications (f, g) telles que $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ vérifiant que $f \circ g$ est homotope à l'identité de Y et $g \circ f$ est homotope à l'identité de X . On dit alors que X et Y sont *homotopiquement équivalents*.

- (1) Montrez que deux espaces connexes par arcs homotopiquement équivalents ont des groupes fondamentaux isomorphes.
- (2) Montrez qu'un espace contractile est homotopiquement équivalent à un point.
- (3) Montrez que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est homotopiquement équivalent à un cercle.
- (4) Montrez que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est homotopiquement équivalent au graphe à deux boucles et un sommet.
- (5) Montrez que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ne sont pas homotopiquement équivalents pour $n > 2$.
- (6) [INVARIANCE DU DOMAINE] En déduire que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
- (7) Soit $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. On suppose que f de $\mathbf{D}$ dans lui-même n'a pas de point fixe. Soit alors $g : \mathbf{D} \rightarrow S^1$ qui à un point z associe le point $g(z)$ de S^1 , tel que $g(z) - z = \lambda(z - f(z))$ avec $\lambda > 0$. Montrez que g est une équivalence d'homotopie entre $\mathbf{D}$ et S^1 .
- (8) [THÉORÈME DE BROUWER] En déduire que toute application de $\mathbf{D}$ dans lui-même à un point fixe.