Université Côte d'Azur
Laboratoire Dieudonné

Feuille 8

M1
Geo Diff
2018-2019

Exercice 1 – [Équivalence d'homotopie] Une *équivalence d'homotopie* entre X et Y est une paire d'applications (f, g) telles que $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ vérifiant que $f \circ g$ est homotope à l'identité de Y et $g \circ f$ est homotope à l'identité de X. On dit alors que X et Y sont *homotopiquement équivalents*

(1) Montrez que deux espaces connexes par arcs homotopiquement équivalents ont des groupes fondamentaux isomorphes.
(2) Montrez qu'un espace contractile est homotopiquement équivalent à un point.
(3) Montrez que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est homotopiquement équivalent à un cercle.
(4) Montrez que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est homotopiquement équivalent au graphe à deux boucles et un sommet.
(5) Montrez que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ne sont pas homotopiquement équivalents pour $n > 2$.
(6) [Invariance du domaine] En déduire que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
(7) Soit $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. On suppose que f de D dans lui-même n'a pas de point fixe. Soit alors $g : D \to S^1$ qui à un point z associe le point $g(z)$ de S^1, tel que $g(z) - z = \lambda(z - f(z))$ avec $\lambda > 0$. Montrez que g est une équivalence d'homotopie entre $\mathbf{D}$ et S^1.
(8) [Théorème de Brouwer] En déduire que toute application de $\mathbf{D}$ dans lui-même à un point fixe.

Exercice 2 – [Revêtement galoisien] Soit $p : Y \to X$ un revêtement connexe. Soit y un point de Y, on note $\Gamma_y := p_*(\pi_1(Y, y))$.

(1) Soit y et z deux points de la fibre en x. Montrez que Γ_y et Γ_z sont conjugués.
(2) Montrez réciproquement que si Γ_y et Γ sont conjugués dans $\pi_1(X, x)$ alors il existe z tel que $\Gamma = \Gamma_z$.

On dira qu'un revêtement est *Galoisien* si Γ_{y_0} est distingué pour un $y_0$dans Y. Montrez qu'alors pour tout y, Γ_y est distingué et que si $p(y) = p(z)$, alors $\Gamma_y = \Gamma_z$.

Exercice 3 – [Automorphismes et revêtements Galoisiens] Soit $p : Y \to X$ un revêtement d'espace total connexe. Un homéomorphisme Φ de Y est un *automorphisme de* p si $p \circ \Phi = p$.

(1) Montrez que l'ensemble $\mathrm{Aut}(p)$ des automorphismes de p est un groupe pour la conjugaison. Montrez que si Φ a un point fixe, alors $\Phi = \mathrm{Id}$.
(2) Montrez que pour tout automorphisme Φ, $p_*(Y, y) = p_*(Y, \Phi(y))$.
(3) Quel sont les automorphismes du revêtement $z \to z^n$ de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans lui-même.
(4) Montrez que si p est Galoisien, montrez que pour tout y et z tel que $p(y) = p(z)$, il existe un unique automorphisme Φ tel que $\Phi(y) = \Phi(z)$. Puis que $\mathrm{Aut}(p)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x)/\Gamma_y$.

Exercice 4 – Soit $p : Y \to X$ un revêtement connexe tel que le cardinal de la fibre est constant et fini égale a N. Soit y et $x = p(y)$.

(1) Montrez que pour tout lacet γ basé en x, il existe $q \leq N$, tel que $\gamma^q := \underbrace{\gamma \bullet \ldots \bullet \gamma}_{q \text{ fois}}$ se relève en un lacet basé en y.

(2) Montrez qu'il existe un entier Q, tel que pour tout γ basé en x, q^Q se relève en un lacet basé en y.

(3) Si p est Galoisien, montrez que l'on peut prendre $Q = N$.

Exercice 5 – Soit $p : M \to N$ un homéomorphisme local. On suppose que pour tout x, $\sharp p^{-1}(x)$ est fini. Montrez que p est un revêtement.

Exercice 6 – On rappelle que si P est un polynôme complexe à plusieurs variables $z_1, \ldots, z_n$ vu comme application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, la différentielle de P en un point Z est l'application linéaire complexe

$$(u_1, \ldots, u_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial z_i}(Z) \cdot u_i \ .$$

On considère l'ensemble

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^3 + w^3 = 1\} \ .$$

(1) Montrez que M est une sous variété de $\mathbb{C}^2$. Montrez que pour tout point $X = (z, w)$ de M, $\mathsf{T}_X M$ est une droite complexe et donnez son équation.

(2) On considère P la projection $M \to \mathbb{C}$: $(z, w) \mapsto w$. En quels points P n'est pas une submersion ?

(3) Soit $M^* = \{(z, w) \in M \mid z \neq 0$. Montrez que P est un revêtement de M^* sur $\mathbb{C} \setminus \{1, \zeta, \zeta^2\}$ où $\zeta := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.