

Petit précis d'Algèbre linéaire

4 mars 2008

Table des matières

1	Système d'équations linéaires	5
2	Espaces vectoriels	7
2.1	Definition	7
2.2	Sous-espaces vectoriels	7
2.2.1	Sommes, sommes directes	8
2.3	Ensembles de vecteurs	9
2.3.1	Sous espace vectoriel engendré	9
2.3.2	Ensemble libre de vecteurs	9
2.4	Base et dimension	10
2.4.1	Base	10
2.4.2	Dimension et rang	11
2.4.3	Les deux grands théorèmes de construction de base	12
2.4.4	Base et somme directe	12
2.4.5	Dimension et sous-espace vectoriels	13
2.5	Exercices de compréhension	13
2.5.1	Rang et nombre de vecteurs	13
2.5.2	Quelques dimensions	14
2.5.3	Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire	14
3	Applications linéaires	15
3.1	Définition	15
3.1.1	Opération sur les applications linéaires	15
3.2	Applications linéaires et sous-espaces vectoriels	16
3.2.1	Noyau et image	16
3.3	Bases et applications linéaires	16
3.4	Formule du rang	17
3.5	Exercices de compréhension	17
4	Matrices	19
4.1	Vecteurs et vecteurs colonnes	19
4.2	Matrices et application linéaires	20
4.2.1	Une matrice donne naissance à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$	20

4.2.2	Une matrice donne naissance à une application linéaire entre deux espaces vectoriels muni de bases et avec les bonnes dimensions.	20
4.2.3	Une application linéaire entre deux espaces vectoriels muni de bases donne naissance à une matrice.	21
4.3	Rang d'une matrice	21
4.4	Opération sur les matrices	23
4.4.1	Somme de matrices	23
4.4.2	Le produit de deux matrices	23
4.4.3	Interprétation par les applications linéaires	23
4.4.4	Interprétation en tant que système linéaire	23
4.5	Comment faire les calculs?	24
4.5.1	Rang d'une matrice ou d'une application linéaire	24
4.5.2	Dimension du noyau d'une matrice ou d'une application linéaire	24
4.5.3	Rang d'une famille de vecteurs	24

Chapitre 1

Système d'équations linéaires

Un système d'équation linéaire – à n variables et p équations – est un système d'équation, définie par des constantes $\{d_{ij}, c_i\}$ pour $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, p$ en les variables $x_1, \dots, x_n$ défini par

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = c_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ d_{p1}x_1 + \dots + d_{pn}x_n = c_p. \end{cases}$$

Le système est *homogène* si les constantes c_i sont toutes nulles.

Un système est dit *échelonné* ou *sous forme triangulaire* s'il est sous la forme avec $p \leq n$ et $a_{i_j i_j} \neq 0$ pour tout i .

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_1 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2i_2}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{pi_p}x_p + \dots + a_{pn}x_n = b_p. \end{cases}$$

Autrement qu'il existe une suite $\{i_1, \dots, i_p\}$ telle que

$$\begin{aligned} i_j &< i_{j-1} \\ a_{jk} &= 0 \text{ si } k < i_j \\ a_{ji_j} &\neq 0. \end{aligned}$$

Le nombre p s'appelle le *rang* du système échelonné.

Proposition 1.0.1 *Un système échelonné de rang p avec p inconnues n'a qu'une solution. Si $n > p$ et si le système est homogène alors il possède une infinité de solutions.*

Le résultat important est ici la méthode dite du *pivot de Gauss*, qui affirme que tout système d'équation linéaire a le même ensemble de solutions – après avoir éventuellement permuté les inconnues $(x_1, \dots, x_n)$ – qu'un système échelonné ayant moins – ou autant – d'équations. Si le système de départ est homogène le système d'arrivée est homogène.

Corollaire 1.0.2 *Un système homogène avec strictement moins d'équations que d'inconnues a une infinité de solutions.*

Résoudre les équations linéaires par le pivot de Gauss est la méthode technique permettant de résoudre les exercices une fois qu'on a compris le cadre théorique. Ce cadre théorique va nous permettre de comprendre l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble d'éléments appelés *vecteurs* tel que l'on peut additionner entre eux et multiplier par un élément de $\mathbb{K}$. Cette addition et multiplication doivent vérifier un certain nombre de règles. En particulier un espace vectoriel contient un point particulier noté 0 et souvent appelé *origine*. La convention est aussi d'appeler les éléments de $\mathbb{K}$ des scalaires.

EXEMPLES :

- Le plan avec une origine. L'addition est alors donnée par une construction géométrique.
- L'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes.
- $\mathbb{R}^n$.

Souvent, l'espace vectoriel que l'on étudie arrive avec une structure supplémentaires. Dans le cas de $E = \mathbb{R}^N$ il s'agit des coordonnées : des fonctions privilégiées de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous verrons plus tard qu'il s'agit d'une *base*.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.2.1 *Un sous-ensemble V de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si pour tout u et v de V et pour tout scalaire λ , on a*

$$\begin{aligned}u + v &\in V, \\ \lambda.u &\in V.\end{aligned}$$

EXEMPLES :

- $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel.
- Une droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel du plan.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n variables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.2 *Tout sous-espace vectoriel, muni de l'addition des vecteurs et de la multiplication des scalaires induites par E , est un espace vectoriel.*

EXERCICES : Soit E et F deux espaces vectoriels. On considère l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Montrez que les opérations d'addition

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t),$$

et de multiplication

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

définissent une structure d'espace vectoriel sur $E \times F$.

Montrez que

$$\begin{aligned} E \times \{0\} &= \{(x, 0) \mid x \in E\}, \\ \{0\} \times F &= \{(0, y) \mid y \in F\}, \end{aligned}$$

sont deux sous espaces vectoriels de $E \times F$.

2.2.1 Sommes, sommes directes

Somme et intersection

Définition 2.2.3 *Soit V et W des sous-espaces vectoriels de E , alors la somme de V et W est l'ensemble*

$$V + W := \{u = v + w \mid v \in V, w \in W\}.$$

Proposition 2.2.4 *La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel éventuellement réduit à $\{0\}$.*

Somme directe

Définition 2.2.5 *Soit V et W des sous-espaces vectoriels de E . Si $V \cap W = \{0\}$ on dit que V et W sont en somme directe. On note alors cette somme $V \oplus W$.*

Proposition 2.2.6 *Supposons V et W en somme directe. Alors, pour tout vecteur u de $V \oplus W$, il existe un unique vecteur v de V et w de W tels que $u = v + w$.*

Réciproquement, si pour tout vecteur u de $V \oplus W$, il existe un unique vecteur v de V et w de W tels que $u = v + w$, alors V et W sont en somme directe.

2.3 Vecteurs : ensemble générateur, ensemble de vecteurs indépendants

2.3.1 Sous espace vectoriel engendré

Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ un ensemble fini de vecteurs de E . On note

$$\text{Vect}(A) := \{v \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p, v = \sum_i \lambda_i u_i\}.$$

Proposition 2.3.1 *$\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A : pour tout sous-espace vectoriel V contenant A , on a $\text{Vect}(A) \subset V$.*

Définition 2.3.2 *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E . L'ensemble $\text{Vect}(A)$ s'appelle sous-espace vectoriel engendré par A . On dit que l'ensemble A engendre V si $V = \text{Vect}(A)$. On dit que A est générateur si $\text{Vect}(A) = E$.*

REMARQUES :

- Pour qu'un ensemble soit générateur, il suffit qu'un sous-ensemble soit générateur.
- Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il est générateur revient à montrer que l'équation $\sum_i \lambda_i u_i = v$ admet une solution. Cette équation est un système d'équation linéaire – non homogène – que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss.

Définition 2.3.3 *On dira que E est de dimension finie s'il possède un ensemble générateur fini.*

2.3.2 Ensemble libre de vecteurs

Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ un ensemble fini de vecteurs de E .

Définition 2.3.4 *On dit que A est libre si les seuls scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tels que $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ sont $\lambda_i = 0$.*

REMARQUES :

- Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrez qu'il est libre revient à montrer que l'équation $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ a une seule solution. Cette équation est alors un système d'équation linéaire que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss.

La proposition technique suivant est celle qui permet de construire des systèmes libres. Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ un ensemble fini de vecteurs. Posons $V_0 = \{0\}$

$$V_k = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Proposition 2.3.5 [VÉRIFICATION DIAGONALE] *Le système $\{u_1, \dots, u_p\}$ est libre si et seulement si, pour tout $0 < i < k$, on a*

$$u_i \notin V_{i-1}.$$

DÉMONSTRATION : Si il existe un i tel que $u_i \in V_{i-1}$, alors $u_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_j$ et donc $\{u_1, \dots, u_p\}$ n'est pas libre (Pourquoi?).

Réciproquement, supposons $\{u_1, \dots, u_p\}$ n'est pas libre. Supposons par ailleurs que $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ avec au moins l'un des λ_i non nul. Soit k le plus grand des entiers i tels que λ_i est non nul. Alors

$$\lambda_k u_k + \sum_{i=1}^{i=k-1} \lambda_i u_i = 0.$$

Ainsi

$$u_k = - \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} u_i \in V_{k-1},$$

ce que nous voulions démontrer. Q.E.D.

2.4 Base et dimension

2.4.1 Base

Définition 2.4.1 *Si un ensemble fini est générateur et libre, alors c'est une base.*

EXEMPLES :

- Soit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ avec le 1 à la i -ème place. Alors $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de $\mathbb{R}^p$. On l'appelle souvent la *base naturelle* ou *canonique* de $\mathbb{R}^p$.

Par construction

$$(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i \cdot e_i.$$

- Si $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ est libre, alors A est une base de $\text{Vect}(A)$.

2.4.2 Dimension et rang

Théorème 2.4.2 Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ une base de l'espace vectoriel E et $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ un ensemble libre alors $k \leq p$.

Corollaire 2.4.3 [INVARIANCE DE LA DIMENSION] Deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Définition 2.4.4 [DIMENSION ET RANG] La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E est l'entier p tel qu'il existe une base à p éléments de E . On la note $\dim(E)$. Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

Le rang, noté $\text{rang}(A)$, d'une famille de vecteurs $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré $\text{rang}(A) = \dim(\text{Vect}(A))$.

Ces notions permettent de caractériser le caractère libre ou générateur d'une famille de vecteur $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ de E :

- La famille A est génératrice si et seulement si $\text{rang}(A) = \dim(E)$,
- La famille A est libre si et seulement si $\text{rang}(A) = p$,
- La famille A est une base si et seulement si $\text{rang}(A) = p = \dim(E)$.

DÉMONSTRATION : On raisonne par l'absurde et on suppose que $k > p$. On va alors montrer que l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=k} x_i v_i = 0$$

a une infinité de solutions ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre. Comme A est générateur, on peut écrire $v_i = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij} u_j$. L'équations ci-dessus est alors équivalente à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left(\sum_{j=1}^{j=p} x_i a_{ij} u_j \right) = 0.$$

En permutant les indices, cette équation se réécrit

$$\sum_{j=1}^{j=p} \left(\sum_{i=1}^{i=k} x_i a_{ij} \right) u_j = 0.$$

Comme A est une base, cette équation est équivalente au système de p équation avec k inconnues

$$\left\{ \sum_{i=1}^{i=k} x_i a_{ij} = 0 \right.$$

Ce système homogène ayant plus d'inconnues que d'équations possède une infinité de solutions par le corollaire 1.0.2. C'est la contradiction recherchée Q.E.D.

2.4.3 Les deux grands théorèmes de construction de base

Théorème 2.4.5 [EXTRACTION DE BASE] *Soit A un ensemble générateur fini. Alors il existe un sous-ensemble B de A qui est une base.*

DÉMONSTRATION : On extrait B par le procédé suivant. On pose $V_0 = \{0\}$ et $V_i = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_i\}$. On remarque que

$$V_i \subset V_{i+1}.$$

On considère ensuite l'ensemble J des indices tels j que $V_j \neq V_{j-1}$. Soit $J = \{i_1, \dots, i_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k$. Posons $v_j = u_{i_j}$ et soit $W_m = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_{i_m}\}$.

La remarque importante est que

$$W_m = V_{i_m}.$$

(Pourquoi : est-ce vrai ?) Par la proposition de vérification diagonale, $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre. Il est également générateur.

Pratiquement, nous avons pris pour v_1 le premier vecteur non nul, puis pour v_2 le premier suivant qui n'est pas colinéaire à v_1 puis le premier qui n'est pas dans le sous-espace engendré par v_1 et v_2 etc ... Q.E.D.

Corollaire 2.4.6 [EXISTENCE DE BASE] *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Théorème 2.4.7 [COMPLÉTION DE BASE] *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit A un ensemble libre fini. Alors il existe un ensemble B qui contient A et qui est une base.*

DÉMONSTRATION : Soit $A = \{u_1, \dots, u_k\}$. On choisit, u_1 n'appartenant pas à $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\}$, puis u_{k+2} n'appartenant pas à $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_{k+1}\}$. Par le procédé de vérification diagonale, à tout étape on a un ensemble générateur. Le procédé s'arrête à un moment car dans un espace vectoriel de dimension finie un ensemble libre à un nombre d'éléments borné par la dimension. Q.E.D.

2.4.4 Base et somme directe

Théorème 2.4.8 *Soit $A = \{u_1, \dots, u_p\}$ une base de E . Soit $k \leq p$. Alors les espaces vectoriel $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\}$ et $\text{Vect}\{u_{k+1}, \dots, u_p\}$ sont en somme directe.*

Réciproquement, soit V et W tel que $V \oplus W = E$. Si A est une base de V et B une base de W alors $A \cup B$ est une base de E .

Corollaire 2.4.9 *Soit V un sous-espace vectoriel de E . Alors il existe V_0 tel que $V \oplus V_0 = E$.*

2.4.5 Dimension et sous-espace vectoriels

Soit toujours E un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 2.4.10 *Si V est un sous-espace vectoriel de E . Alors $\dim V \leq \dim E$. De plus, si $\dim V = \dim E$ alors $V = E$.*

DÉMONSTRATION : cela suit du théorème de complétion de base. (Pourquoi ?)
Q.E.D.

Théorème 2.4.11 *Soit V et W des sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie E , alors*

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

DÉMONSTRATION : On remarque tout d'abord que si F et G sont en somme directe alors

$$\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F).$$

(Pourquoi ? indication : on l'a déjà démontré).

On sait par la proposition précédente qu'il existe V_0 un sous-espace vectoriel de V tel que

$$V = V_0 \oplus (V \cap W).$$

(Pourquoi ?). On montre ensuite que

$$V_0 \cap W = \{0\},$$

(facile) puis que $V_0 \oplus W = V + W$ (un peu moins facile).

Ensuite, ça roule

$$\dim(V + W) = \dim(V_0) + \dim(W),$$

mais

$$\dim(V) = \dim(V_0) + \dim(V \cap W).$$

et hop ! Q.E.D.

.

2.5 Exercices de compréhension

2.5.1 Rang et nombre de vecteurs

EXERCICES : Soit A un système de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension p .

Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes.

- A est une base,
- A est libre,

– A est générateur.

Attention, il faut que le nombre de vecteurs soit égal à la dimension !

EXERCICES : Soit A un ensemble de vecteurs à p éléments. Montrez que

$$\text{rang}(A) \leq p,$$

et que l'on a égalité si et seulement si A est libre.

2.5.2 Quelques dimensions

EXERCICES :

1. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
2. l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

2.5.3 Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire

EXERCICES : L'espace des solutions d'un système linéaire homogène échelonné de p -équation à n inconnues est de dimension $n - p$. L'espace des solutions d'un système linéaire homogène de p -équation à n inconnues est de dimension au moins $n - p$.

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels.

Définition 3.1.1 [APPLICATIONS LINÉAIRES, ENDOMORPHISMES, ISOMORPHISMES]

Une application f de E dans F est linéaire si pour tout u et v de E et scalaire λ on a

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad (3.1)$$

$$f(\lambda.u) = \lambda.f(u) \quad (3.2)$$

Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme linéaire. Si f est une bijection linéaire on dit que c'est une isomorphisme.

3.1.1 Opération sur les applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F

Proposition 3.1.2 [SOMME] L'application $f + g$ définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

est linéaire. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λf définie par $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ est linéaire.

Enfin soit h est linéaire de F dans H , et f linéaire de E dans F .

Proposition 3.1.3 [COMPOSITION] L'application $h \circ f$ définie par $h \circ f(x) = h(f(x))$ est linéaire de E dans H .

3.2 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Soit f une application linéaire de E dans F .

Proposition 3.2.1 [IMAGE ET IMAGE INVERSE] *Soit V un sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F .*

De même, soit W un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(W)$ défini par

$$f^{-1}(W) = \{u \in E \mid f(u) \in W\},$$

est un sous-espace vectoriel de E

3.2.1 Noyau et image

Soit f une application linéaire de E dans F .

Définition 3.2.2 [NOYAU, IMAGE ET RANG] *Le noyau de f , noté $\ker(f)$, est le sous-espace vectoriel*

$$\ker(f) := f^{-1}\{0\}.$$

L'image de f , notée $\operatorname{Im}(f)$, est le sous-espace vectoriel

$$\operatorname{Im}(f) := f(E).$$

Le rang de f noté $\operatorname{rang}(f)$ est la dimension de l'image de f . Quelquefois $\dim \ker(f)$ est appelé le corang de f .

Proposition 3.2.3 *L'application f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.*

3.3 Bases et applications linéaires

La proposition suivante facile suivante est importante. Il faut la faire en exercice de compréhension.

Proposition 3.3.1 [IL SUFFIT DE CONNAÎTRE L'IMAGE D'UNE BASE POUR DÉTERMINER UNE APPLICATION LINÉAIRE] *Soit $A = \{u_1, \dots, u_n\}$, une base de E . Soit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, un ensemble de n -vecteurs de F . Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $f(u_i) = v_i$. De plus*

$$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(B).$$

EXERCICES :

1. Montrez que f est surjective si et seulement si B est générateur.

2. Montrez que f est injective si et seulement si B est libre.

EXERCICES : Montrez que si ϕ est linéaire de E dans F les conditions suivantes sont équivalentes

- l'image d'une base est une base.
- ϕ est une bijection.

Corollaire 3.3.2 *Si ϕ est une bijection linéaire entre E et F . Alors $\dim(E) = \dim(F)$.*

3.4 Formule du rang

Théorème 3.4.1 [FORMULE DU RANG] *Soit f une application linéaire de E dans F , alors*

$$\dim \ker(f) + \text{rang}(f) = \dim E.$$

DÉMONSTRATION : On considère un sous espace vectoriel V_0 tel que $V_0 \oplus \ker(f) = E$. Alors $f(V_0) = \text{Im}(f)$ et de plus f restreinte à V_0 est injective. Ainsi, f est une bijection linéaire de V_0 sur $\text{Im}(f)$. Dès lors,

$$\dim(V_0) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f).$$

Par ailleurs, par la [théorème 2.4.11](#)

$$\dim(V_0) + \dim(\ker(f)) = \dim(E).$$

Ainsi, on obtient bien le résultat Q.E.D.

3.5 Exercices de compréhension

EXERCICES : Montrez que l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.

EXERCICES : Il s'agit d'un exercice très classique. Tout d'abord montrez que si p est une projection alors $p \circ p = p$. Réciproquement soit p un endomorphisme linéaire de E tel que $p \circ p = p$.

1. Montrez que $\ker(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$.
2. Montrez que $\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = E$.
3. Montrez que p est la projection de E sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

EXERCICES : Autre exercice très classique. Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit que n . Notons ∂_X l'application qui à un polynôme associe sa dérivée. Montrez que ∂_X est linéaire. Quel est son rang ? Quel est son noyau ?

EXERCICES :

1. soit V et W des sous-espaces vectoriels en somme directe tels que $V \oplus W = E$. Montrez l'application p de E qui associe à u de E l'unique vecteur v tel que $v \in V$ et $u - v \in W$ est linéaire. C'est la *projection* de E sur V parallèlement à W .
2. Montrez que la projection sur V parallèlement à W est l'unique application linéaire tel que $p(v) = v$ si v est dans E , et $p(w) = 0$ si w est dans W .
3. Soit f une application de E dans F . Le *graphe* Γ_f de f est l'ensemble des couples de la forme $(x, f(x))$ pour $x \in E$. Montrez que f est linéaire si et seulement si Γ_f est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

EXERCICES : Montrez que $\text{rang}(f \circ g) \leq \inf(\text{rang}(f), \text{rang}(g))$

Chapitre 4

Matrices

Le slogan de ce chapitre est : les bases permettent de faire les calculs. Pour faire les calculs de la manière la plus simple. Il faut quelque fois choisir la base adaptée au problème.

Définition 4.0.1 Une matrice $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes. Une matrice à une ligne s'appelle un vecteur ligne. Une matrice à une colonne s'appelle un vecteur colonne. Les entrées de ce tableau sont les coefficients de la matrice. Les éléments diagonaux sont les éléments a_{ii} .

Une matrice $n \times p$ se représente ainsi

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On fera attention que l'ordre des indices est *ligne-colonne*. Autrement dit, le coefficient a_{ij} est l'entrée du tableau qui se trouve sur la i -ème ligne et la j -ième colonne. Lorsque a_{ij} est donnée par une formule, il est commode de noter la matrice sous la forme

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}.$$

Pour aller plus vite, je noterai souvent une matrice sous la forme $M = (a_{ij})$. N'utilise pas cette convention !

4.1 Vecteurs et vecteurs colonnes

Dans le calcul matriciel, on note les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous la forme de vecteurs colonnes à n -lignes.

Soit maintenant plus généralement E un espace vectoriel muni d'une base $\{e_1, \dots, e_p\}$. Le *vecteur colonne* associé à u est le vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix},$$

où les x_i sont les scalaires tels que

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i.$$

Le vecteur colonne associé à la somme de deux vecteurs est la somme ligne à ligne des deux colonnes. Le vecteur colonne associé à la multiplication d'un vecteur par un scalaire, est la vecteur colonne dont toutes les entrées on été multipliées par le scalaire.

De manière plus savante,

Proposition 4.1.1 *Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\{e_1, \dots, e_p\}$. L'application qui à un vecteur lui associe son vecteur colonne associé est un isomorphisme.*

En fait nous avons déjà démontré cette proposition ...

4.2 Matrices et application linéaires

4.2.1 Une matrice donne naissance à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Définition 4.2.1 *L'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ associée à une matrice $M = (a_{ij})$, $n \times p$ est l'unique application linéaire f telle que l'image du i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est le i -ème vecteur colonne.*

Nous avons vu en exercice que ceci définissait bien une application linéaire.

Proposition 4.2.2 *Soit f l'application linéaire associée à $M = (a_{ij})$. Alors*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{j=p} a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{j=p} a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Pour bien effectuer pratiquement ce calcul il faut poser les matrices et vecteurs colonnes en coin. On pourra remarquer que l'application linéaire associée à un vecteur colonne u à p lignes est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par $t \rightarrow t.u$.

4.2.2 Une matrice donne naissance à une application linéaire entre deux espaces vectoriels muni de bases et avec les bonnes dimensions.

On généralise le paragraphe précédent. Soit E muni d'une base $\{e_1, \dots, e_p\}$ et F muni d'une base $B = \{f_1, \dots, f_p\}$. L'application linéaire associée à la matrice M est l'application qui associe à e_i le vecteur dont le vecteur colonne associé dans la base B est le i -ème vecteur colonne.

4.2.3 Une application linéaire entre deux espaces vectoriels muni de bases donne naissance à une matrice.

C'est la construction réciproque de la construction précédente.

Définition 4.2.3 Soit ϕ une application linéaire de E muni d'une base $\{e_1, \dots, e_p\}$ dans F muni d'une base $B = \{f_1, \dots, f_p\}$. La matrice de ϕ dans ces bases est la matrice dont le i -ème vecteur colonne est celui qui représente $\phi(e_i)$ dans la base B .

4.3 Rang d'une matrice

Définition 4.3.1 Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associée à la matrice.

Théorème 4.3.2 Le rang d'une matrice est le rang de la famille des vecteurs colonnes. C'est aussi le rang de la famille des vecteurs lignes.

DÉMONSTRATION : La première partie suit de la définition et de la proposition 3.3.1. La deuxième partie est plus délicate. Notons $\widehat{\text{rang}}(M)$ le rang de la famille des vecteurs lignes. Nous allons montrer que

$$\widehat{\text{rang}}(M) \geq \text{rang}(M). \quad (4.1)$$

Cela suffit pour démontrer le théorème. En effet, notons $M^* = (b_{ij})$ la matrice transposée, à savoir celle obtenue en interchangeant lignes et colonnes, c'est-à-dire telle que $b_{ij} = a_{ji}$. On remarque que $\widehat{\text{rang}}(M) = \text{rang}(M^*)$ et que $M^{**} = M$. Autrement dit en appliquant l'inégalité ci-dessus à M^* on obtient $\text{rang}(M) \geq \widehat{\text{rang}}(M)$.

Démontrons donc l'inégalité 4.1. Un vecteur ligne $\ell_j = (a_{j1}, \dots, a_{jp})$ donne naissance à une équation

$$E(\ell_j) : \sum_{i=1}^{i=p} a_{ji} x_i = 0.$$

Si les vecteurs lignes sont dans l'espace vectoriel engendré par les lignes $\{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ alors toute solution du système d'équations $\alpha = (E(\alpha_i))_{i=1, \dots, q}$ est solution du système d'équations $\ell = (E(\ell_i))_{i=1, \dots, n}$.

Notons $S(\ell)$ l'espace vectoriel des solutions de ℓ et $S(\alpha)$ l'espace vectoriel des solutions de α . Nous venons de montrer que

$$\dim S(\alpha) \leq \dim S(\ell).$$

Or l'espace vectoriel $S(\ell)$ des solutions de ℓ n'est rien d'autre que le noyau de l'application linéaire associée à M et sa dimension est donc $p - \text{rang}(M)$ par

la formule du rang. Par ailleurs, la dimension de l'espace des solutions de α est plus grande que $p - q$ (Pourquoi?).

Nous obtenons donc que

$$p - \text{rang}(M) = \dim S(\ell) \geq \dim S(\alpha) \geq p - q \geq p - \widehat{\text{rang}}(M).$$

Q.E.D.

Le théorème suivant nous permet de calculer le rang d'une matrice

Théorème 4.3.3 [INVARIANCE DU RANG D'UNE MATRICE]. *Le rang d'une matrice est invariant par les opérations suivantes*

- multiplier une ligne par un scalaire non nul,
- multiplier une colonne par un scalaire non nul,
- additionner une ligne à une ligne différente,
- additionner une colonne à une colonne différente,
- échanger deux lignes,
- échanger deux colonnes.

DÉMONSTRATION : Ceci suit immédiatement du théorème précédent et de la compréhension de ce qu'est l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Q.E.D.

Définition 4.3.4 Une matrice $M = (a_{ij})$ est dite échelonnée si il existe une suite $\{i_1, \dots, i_p\}$ telle que

$$\begin{aligned} i_j &< i_{j-1}, \\ a_{jk} &= 0 \text{ si } k < i_j, \\ a_{ji_j} &\neq 0, \\ a_{ji} &= 0 \text{ si } j > p. \end{aligned}$$

EXERCICES : Représentez graphiquement une matrice de ce type pour comprendre la définition

Voici les formes échelonnées pour les matrices 3×3 où * est un élément non nul

$$\begin{pmatrix} * & a & b \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & a \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & a & b \\ 0 & * & c \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.3.5 *Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles.*

DÉMONSTRATION : Utilisez le critère de vérification diagonale de la proposition 2.3.5. Q.E.D.

4.4 Opération sur les matrices

4.4.1 Somme de matrices

La somme de deux matrices $n \times p$ est la matrice $m \times p$ dont les coefficients sont la somme des coefficients correspondants de deux matrices. L'application linéaire associée à la somme des deux applications linéaires associées. Réciproquement, la matrice de $f + g$ dans des bases de E et F est la somme des matrices de f et g dans ces mêmes bases.

4.4.2 Le produit de deux matrices

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $N = (b_{ij})$ une matrice $p \times m$ le produit $M.N$ est la matrice $n \times m$ dont les coefficients sont

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{jk}.$$

Il faut faire les calculs graphiquement, on obtient les coefficients de la matrice en bas à droite en multipliant terme à terme la colonne située au dessus, par la ligne située à gauche.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{p1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{m1} \\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mp} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

4.4.3 Interprétation par les applications linéaires

En particulier, la multiplication d'une matrice par un vecteur colonne est le vecteur colonne image par l'application linéaire associée (regarder la formule).

En utilisant cette remarque on obtient le résultat suivant

Théorème 4.4.1 *Soit E muni de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Soit F muni de la base $\{f_1, \dots, f_m\}$. Soit G muni de la base $\{g_1, \dots, g_n\}$. Soit ϕ linéaire de E dans F dont la matrice dans les bases indiquées est M . Soit ψ linéaire de F dans G dont la matrice dans les bases indiquées est N . Alors la matrice de $\psi \circ \phi$ dans les bases indiquées est $M.N$.*

4.4.4 Interprétation en tant que système linéaire

L'équation matrice $M.X = B$ dont l'inconnue est le vecteur X s'interprète comme un système linéaire dont les inconnues sont les entrées de X .

4.5 Comment faire les calculs ?

La réponse est simple : il faut se ramener à un système d'équations linéaires (au besoin en choisissant correctement les bases) puis, pivot de Gauss, pivot de Gauss, pivot de Gauss ... sauf lorsque l'on peut être astucieux et il faut mieux quelque fois passer un tout petit peu de temps à essayer d'être intelligent(e).

Pour calculer des rangs c'est encore plus simple.

4.5.1 Rang d'une matrice ou d'une application linéaire

On utilise le théorème 4.3.3 pour se ramener à une forme échelonnée. Le rang de la matrice sous cette forme est alors le nombre de lignes non nulles.

4.5.2 Dimension du noyau d'une matrice ou d'une application linéaire

On peut utiliser le résultat précédent et le théorème du rang.

Si l'on veut décrire explicitement le noyau par des équations, ce calcul est donné par un système linéaire. On va donc utiliser le pivot de Gauss pour se ramener à une forme échelonnée. on est ramené alors à

Proposition 4.5.1 *L'ensemble des solutions d'un système homogène échelonné à n inconnues et p variables est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$.*

Pour une application linéaire, on choisit une base dans laquelle la matrice est la plus simple possible, puis on applique la technique précédente.

4.5.3 Rang d'une famille de vecteurs

On choisit une base dans laquelle ces vecteurs ont une expression la plus simple possible. On met côte à côte ces p vecteurs colonnes à n -lignes pour obtenir une matrice dont on calcule le rang.