Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques.

Patrick FOULON, François LABOURIE

Nous nous proposons de montrer dans cet article que les variétés compactes à courbure négative et asymptotiquement harmoniques sont dynamiquement identiques aux espaces localement symétriques de rang 1.

Rappelons tout d'abord qu'une variété harmonique est une variété telle que la courbure moyenne des sphères est constante. En 1944, A. Lichnerowicz a montré qu'une variété harmonique de dimension inférieure ou égale à 4 était nécessairement un espace symétrique de rang 1 [Li]. Ceci le conduit à conjecturer le résultat lorsque l'on n'impose plus de restrictions sur la dimension. Parmi les résultats récents sur le sujet, signalons tout d'abord que Z. Szabo a démontré cette conjecture pour les variétés compactes ayant un groupe fondamental fini [Sz]. A l'opposé, E. Damek et F. Ricci ont récemment annoncé un contre-exemple dans le cas non compact, à savoir une classe de variétés harmoniques homogènes simplement connexes à courbure négative qui ne sont pas symétriques [D-R].

Dans le cas de la courbure négative, on est conduit naturellement à définir les variétés asymptotiquement harmoniques comme étant celles telles que la courbure moyenne des horosphères est constante. Notre résultat, à mettre en regard avec celui de Damek et Ricci, est le suivant

THÉORÈME. *Soit M une variété compacte C^∞ à courbure négative et asymptotiquement harmonique, alors le flot géodésique de M est C^∞ conjugué à celui d'une variété compacte localement symétrique de rang 1.*

U. Hamenstädt a récemment annoncé que la conclusion du théorème entraînait que M était à courbure constante dans le cas où l'espace modèle était lui même à courbure constante [H1].

Pour situer notre résultat, rappelons que F. Ledrappier a démontré que si λ_1 est le bas du spectre du laplacien du revêtement universel et h est l'entropie topologique d'une variété compacte à courbure négative, alors l'égalité $\lambda_1 = h^2/4$ entraîne que la variété est asymptotiquement harmonique [Le]. Par ailleurs, U. Hamenstädt a également annoncé que si la mesure harmonique est dans la même classe que la mesure de Lebesgue, alors la variété est asymptotiquement harmonique. On peut enfin penser que le résultat de ce papier et les techniques utilisées peuvent représenter une étape sur la voie d'une démonstration de la conjecture de la rigidité entropique de Katok.

L'idée de base de notre démonstration est de se ramener au théorème 2

de [B-F-L] qui montre que si une variété riemannienne compacte à courbure négative a ses distributions horosphériques C^∞, alors son flot géodésique est C^∞ conjugué à celui d'un espace localement symétrique de rang 1. Il nous suffit donc de démontrer que la distribution horosphérique est lisse. Ceci se fait en montrant qu'elle est solution d'équations algébriques.

Signalons que l'un des sous-produits de la démonstration est un résultat de régularité pour la distribution stable d'un flot d'Anosov topologiquement transitif (proposition 5.2.). Un dernier point à remarquer est que la démonstration est en fait plus générale et que l'hypothése asymptotiquement harmonique peut-être remplacée par l'hypothèse que la courbure moyenne est une fonction C^∞ sur le fibré unitaire.

Il nous faut remercier tout particulièrement B. Teissier dont l'aide s'est avérée particulièrement précieuse lors de la démonstration du lemme 3.2. , ainsi que Y. Benoist, F. Ledrappier et P. Pansu pour leur intérêt pour ce travail.

1 Structure de la démonstration

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, notre but est de nous ramener au théorème 2 de [B-F-L]. Cela se fait en deux étapes. Tout d'abord, nous montrons en 3.1.

PROPOSITION *Si M est asymptotiquement harmonique, il existe un ouvert dense du fibré unitaire UM sur lequel les distributions stable et instable du flot géodésique sont C^∞.*

L'idée est la suivante : on commence par montrer que dans la grassmanienne des n-plans lagrangiens de TUM au dessus d'un point v de UM , la distribution stable E^+ est l'unique zéro commun d'une infinité de fonctions algébriques (proposition 2.5.). Nous concluons à l'aide d'un lemme général qui nous apprend que si l'ensemble des zéros d'une famille C^∞ d'équations algébriques varie continûment, alors il varie de manière C^∞ sur un ouvert dense de l'espace des paramètres (lemme 3.2.).

La deuxième étape consiste à démontrer en 5.1., la

PROPOSITION *Soit ϕ_t un flot d'Anosov sur une variété compacte M tel que les distributions stable et instable, notées E^+ et E^-, soient C^∞ sur un ouvert dense, alors ces distributions sont C^∞ partout.*

Pour démontrer cela, on considère une feuille stable F^+ périodique incluse dans notre ouvert dense et on montre que la distribution E^- restreinte à cette feuille a ses dérivées uniformément bornées. Ceci va découler d'une étude des solutions C^∞ des solutions de l'équation homologique faite dans la section 4. En fait, nous montrons même la proposition plus générale suivante en 5.2. :

PROPOSITION *Soit ϕ_t un flot d'Anosov topologiquement transitif sur une variété compacte M tel que la distribution instable E^- soit C^∞ le long d'une feuille centrale stable d'une orbite périodique, alors cette distribution est C^∞ partout.*

Cette dernière proposition est à mettre en regard avec la théorie de la régularité pour les difféomorphismes d'Anosov esquissée dans [H-K] et [H].

2 Caractérisation algébrique des feuilletages horosphériques.

2.1 . Soit M une variété de dimension n à courbure strictement négative et UM son fibré unitaire sur lequel agit le flot géodésique ϕ_t, engendré par le champ de vecteur X. Il est bien connu que ce flot est d'Anosov, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition au moins C^0 du fibré tangent à UM

$$TUM = E^+ \oplus E^- \oplus \mathbf{R}X,$$

ainsi que C et Λ tels que pour tout t positif et tout $Y^\pm$ de $E^\pm$, nous ayons

$$\|T\phi_{\pm t}(Y^\pm)\| \leq Ce^{-t\Lambda}\|Y^\pm\|.$$

Par ailleurs, si nous notons V l'espace tangent à la fibre de la projection sur M, V est inclus dans $E^+ \oplus E^-$ et est transverse à chacun des facteurs.

Rappelons enfin que $E^+ \oplus E^-$ est muni d'une forme symplectique ω invariante par le flot, pour laquelle E^+, E^- et V sont lagrangiens.

2.2 . Soient g_0 la métrique de M et g_1 la métrique (dégénérée) induite sur UM par la projection sur M. Soit aussi B le fibré des n-plans lagrangiens de $E^+ \oplus E^-$ qui n'intersectent pas V. La fibre B_v au dessus d'un point v de UM est naturellement un ouvert de Zariski d'une variété algébrique. Si nous choisissons un supplémentaire C^∞, V_0, à l'espace vertical V, nous pouvons identifier B à un sous-fibré vectoriel C^∞ du fibré des endomorphismes linéaires de V_0 dans V. Les structures algébriques des fibres sont alors respectées. Dans la suite pour des raisons techniques, nous allons également utiliser l'identification canonique de B avec le sous-fibré vectoriel $\bar{B}$ du fibré des endomorphismes linéaires de E^+ dans V. Remarquons que $\bar{B}$ n'est pas *a priori* un fibré C^∞.

Remarquons que pour tout n-plan Q de B la métrique $g_1|_Q$ est non dégénérée.

Soit g_t la métrique sur Q, éventuellement dégénérée, définie par

$$g_t = (\phi_t^* g_1)\,|_Q\,.$$

Ceci nous permet de construire une fonction f_t de B dans $\mathbf{R}$: avec les notations précédentes, définissons $f_t(Q)$ comme le carré du discriminant de g_t par rapport à g_1 sur Q.

Nous allons donner maintenant une description explicite de $\bar{f}_t$ l'application de $\bar{B}$ dans $\mathbf{R}$ qui se déduit de f_t. Soient A un élément de $\bar{B}$ et p la projection de $E^+ \oplus E^-$ sur E^+ parallèlement à V, soit maintenant W_t l'application linéaire de E^+ dans E^+ définie par

$$W_t(Y) = p(\phi_t(Y + A(Y))),$$

alors

$$\bar{f}_t(A) = \det(W_t^* W_t), \tag{Δ}$$

où l'adjoint est pris par rapport à la métrique g_1.

2.3 . Une remarque essentielle pour la suite est que la fonction f_t est de classe C^∞ et que restreinte à la fibre B_v de B au dessus de v de UM , c'est une fonction algébrique.

2.4 . Remarquons également qu'à chaque choix de métrique h sur le fibré E^+, nous pouvons associer une fonction construite sur le modèle de $\bar{f}$. Il suffit pour définir une telle fonction d'utiliser la formule (Δ) en prenant l'adjoint $*$ pour cette métrique h. Une telle fonction n'est pas alors toujours C^∞.

Nous nous proposons de montrer dans cette partie la

2.5 PROPOSITION. *Si M est asymptotiquement harmonique de courbure moyenne des horosphères h et si Q est un élément de B_v, alors Q est E_v^+ si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f_n(Q) = e^{-2nh},$$

autrement dit, A de $\bar{B}_v$ est nul, si et seulement si

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \bar{f}_n(A) = e^{-2nh},$$

Preuve : Il est classique tout d'abord de montrer en utilisant le fait que la courbure moyenne des horosphères est constante, que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \bar{f}_t(0) = e^{-2th}.$$

Ceci exprime le fait que la croissance de la forme volume des horosphères par la dilatation normale est exactement exponentielle, puisque la courbure moyenne des horosphères est constante.

Nous allons maintenant montrer que si A est non nul, alors

$$\operatorname*{Lim}_{t\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{Log}(\bar{f}_t(A))}{t}\right) > -h, \tag{1}$$

ce qui démontre la réciproque.

Remarquons que (1) ne dépend pas de la métrique choisie sur E^+, lorsque l'on définit $\bar{f}_t$ avec la formule (Δ) en prenant l'adjoint $*$ pour la métrique choisie. Nous allons donc choisir une métrique sur E^+ qui nous permettra de démontrer (1) plus aisément.

Pour cela, commençons par remarquer que V est muni d'une métrique naturelle. En effet, il est classique de remarquer que si Y est un vecteur de V et si $\bar{Y}$ est un champ de vecteur tangent à V étendant Y alors $\omega([X, \bar{Y}], \bar{Y})$ ne dépend

pas de l'extension $\bar{Y}$ choisie et définit une métrique positive non dégénérée sur V. Munissons maintenant E^+ de la métrique déduite par dualité grâce à ω.

Soit maintenant $F = ker(A)$, et $F_t = T\phi_t(F)$ le champ de plan obtenu en poussant F le long de l'orbite de v, soient également G_t l'orthogonal de F_t dans E^+ et U_t l'orthogonal de F_t dans V obtenu par la dualité définie par ω. Par construction, nous avons le long de l'orbite de v, la décomposition en tout point $\phi_t(v)$ de l'orthogonal H_t de F_t pour ω en $H_t = F_t \oplus G_t \oplus U_t$. Remarquons que H_t est invariant par ϕ_t, puisque ω et F_t le sont. Nous pouvons maintenant considérer A comme un endomorphisme de G_0 dans U_0.

Choisissons une base orthornormée de H_t formée de la réunion d'une base othornormée (f_t^i) de F_t, d'une base orthonormée (g_t^i) de G_t et la base duale (u_t^i) orthonormée par construction, de U_t. La matrice $\Phi_t(s)$ de $T\phi_t$ en un point $\phi_s(v)$ de H_s dans H_{t+s} s'écrit alors dans ces bases

$$\Phi_t(s) = \begin{pmatrix} L_t(s) & K_t(s) & Z_t(s) \\ 0 & M_t(s) & C_t(s) \\ 0 & 0 & N_t(s) \end{pmatrix}.$$

avec $M_t(s)N_t^*(s) = \mathrm{Id}$. Maintenant, en utilisant la notation générale $S_t = S_t(0)$

$$\bar{f}_t(0) = (\det(L_t).\det(M_t))^2$$

et

$$\bar{f}_t(A) = (\det(L_t).\det(M_t + C_t.A))^2.$$

Pour conclure, il nous faut donc montrer que

$$\operatorname*{Lim}_{t\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{Log}(\det(\mathrm{Id} + M_t^{-1}C_t.A))}{t}\right) > 0. \tag{2}$$

Nous avons l'équation $\Phi_{t+s} = \Phi_s(t)\Phi_t$ qui nous donne en notant en général $\dot{S}_{t_0}(s) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} S_t(s)$ et $\dot{S}_{t_0} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} S_t$,

$$\dot{\Phi}_t = \dot{\Phi}_0(t)\Phi_t.$$

Nous obtenons en particulier les équations différentielles suivantes

$$\dot{M}_t = \dot{M}_0(t)M_t, \tag{3}$$

et

$$\dot{C}_t = \dot{M}_0(t)C_t + \dot{C}_0(t)N_t. \tag{4}$$

Par choix de notre métrique et de notre base, $\dot{C}_0(t) = -\mathrm{Id}$. En effet, en notant T^{ij} les coefficients d'une matrice T,

$$\begin{aligned}\dot{C}_0^{ij}(s) =& \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, C^{ij}(t,s) \\ =& \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, \omega(\phi_t(u_s^i), u_{s+t}^j) \\ =& \omega(u_s^i, [X, u_s^j]) \\ =& -\delta^{ij}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc une solution de (4) en prenant

$$C_t = -M_t \int_0^t M_s^{-1} N_s ds.$$

En utilisant le fait que

$$\|M_t(Y)\| \leq Ce^{-\Lambda t}\|Y\|$$

et que $N_t^* = M_t^{-1}$, on en déduit qu'il existe B tel que

$$\|M_t^{-1} C_t(Y)\| \geq Be^{\Lambda t}\|Y\|,$$

ce qui montre (2), puisqu'il existe D tel que pour tout Y de V_0, $\|A(Y)\| \geq D\|Y\|$. ∎

3 LES FEUILLETAGES HOROSPHÉRIQUES SONT PRESQUE LISSES.

Nous voulons montrer la proposition cruciale suivante

3.1 PROPOSITION. *Si M est asymptotiquement harmonique, il existe un ouvert dense de UM sur lequel E^+ et E^- sont C^∞.*

Cette proposition découle immédiatement de la proposition 2.5., de la remarque 2.3. et du lemme suivant appliqué à $V = UM$, à σ la section de B définie par E^+ et aux fonctions

$$F_p = \sum_{i=0}^{i=p} (f_i - e^{-2ih})^2.$$

Rappelons à ce stade que B peut se décrire -de nombreuses façons différentes- comme un fibré vectoriel.

3.2 LEMME. *Soit $B \longrightarrow V$ un fibré vectoriel différentiable de fibre B_v.*

Soit par ailleurs pour tout p, F_p une fonction C^∞ de B dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout v, l'application $F_p\,|_{B_v}$ soit algébrique et de degré borné d. Soit enfin σ une section continue de $V \longrightarrow B$ telle que

$$\sigma(V) = \bigcap_{p \in \mathbf{N}} F_p^{-1}\{0\}.$$

Alors il existe un ouvert dense de V sur lequel σ est C^∞.

Bien sûr, ce lemme ne se limite pas aux fibrés vectoriels, on peut le généraliser aux fibrés C^∞ dont la fibre est une variété algébrique ; mais ceci nous obligerait à définir cette notion et d'autres, plus désagréables encore.

Preuve : on peut tout d'abord se ramener au cas où $F_{p+1}^{-1}\{0\}$ est inclus dans $F_p^{-1}\{0\}$. Le problème est purement local et nous pouvons donc supposer la fibration triviale

$$B = V \times E \longrightarrow V,$$

où $V = \mathbf{R}^v$ et $E = \mathbf{R}^m$.

Notons maintenant $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des applications polynomiales de degré inférieur à d de E dans $\mathbf{R}$. Nous allons faire comme les géomètres algébristes et tout ramener à une situation universelle. Nous avons pour cela l'application algébrique canonique $\Psi\ : \mathcal{P} \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\Psi(P, e) = P(e)$.

L'application F_p étant C^∞, et $F_p^v = F_p\,|_{\{v\}\times E}$ algébrique de degré inférieur à d, nous en déduisons que l'application $\mathcal{F}_p$ de V dans $\mathcal{P}$ définie par $\mathcal{F}_p(v) = F_p^v$ est C^∞. Nous avons par ailleurs tout fait pour avoir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V & \longleftarrow & V \times E & \xrightarrow{F_p} & \mathbf{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_p} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{F}_p,\mathrm{Id})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \mathcal{P} & \longleftarrow & \mathcal{P} \times E & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{R} \end{array}$$

L'application Ψ étant algébrique, remarquons que $\Psi^{-1}\{0\}$ est une sous-variété algébrique.

L'existence de σ se traduit par celle d'une application Σ_p continue de V dans $\mathcal{P} \times E$ définie par

$$\Sigma_p(v) = (F_p(v), \sigma(v)),$$

telle que

$$\Sigma_p(v) \in \Psi^{-1}\{0\} \cap (\{F_p(v)\} \times E). \tag{1}$$

Essayons de préciser notre stratégie. A cet effet, supposons pour un bref et excitant moment que

a) l'application $\mathcal{F}_p$ est de rang constant,
b) la variété algébrique $\Psi^{-1}\{0\}$ est lisse et la projection π de $\mathcal{P} \times E \longrightarrow \mathcal{P}$ est de rang constant sur $\Psi^{-1}\{0\}$,
c) en un point v_0 l'ensemble $F_p^{-1}\{0\} \cap B_{v_0}$ est réduit à un point.

l'hypothèse *c*) entraîne que le polynome $\mathcal{F}_p(v_0)$ a un seul zéro, autrement dit la fibre de $\Psi^{-1}\{0\}$ au dessus de $\mathcal{F}_p(v_0)$ est réduite à un point ; d'après *b*), π est alors une immersion de $\Psi^{-1}\{0\}$ dans $\mathcal{P}$. Comme par ailleurs, $\mathcal{F}_p(V)$ est une sous-variété d'après *a*), on en déduirait enfin que $\Sigma_p(V) = \pi^{-1}\mathcal{F}_p(V)$ est lisse et donc que Σ_p est lisse.

Malheureusement $\Psi^{-1}\{0\}$ ne vérifie pas *b*), mais on peut stratifier $\Psi^{-1}\{0\}$ en des strates vérifiant individuellement *b*). La proposition intermédiaire suivante va concrétiser le premier pas vers la réalisation de notre stratégie.

3.3 PROPOSITION. *Il existe une stratification*

$$\Psi^{-1}\{0\} = \bigcup_{i\in[0,m]} V^i,$$

où

(i) V^i est une variété C^∞ et est un ouvert de Zariski d'une variété algébrique,
(ii) $W^j = \bigcup_{i\leq j} V^i$ est une variété algébrique, en particulier elle contient l'adhérence de V^i.

(iii) L'intersection de l'espace tangent à V^i avec l'espace tangent à la fibre est de dimension constante sur V^i.

Preuve : Voici la manière de procéder : soit A_l^i, où i est un multi-indice, un ouvert de Zariski d'une variété algébrique de dimension n, on commence par la stratifier de manière standard par des strates lisses en

$$A_l^i = \bigcup_{j\in[0,n]} C_l^{i,j},$$

où

(iv) $C_l^{i,j}$ est une variété C^∞ de dimension j et est un ouvert de Zariski d'une variété algébrique,

(v) $B_l^{i,j} = \bigcup_{m\leq j} C_l^{i,m}$ est l'intersection d'une variété algébrique avec A_l^i, en particulier elle contient l'adhérence de $C_l^{i,j}$ dans A_l^i.

La deuxième étape consiste à stratifier $C_l^{i,j}$ en des strates ayant de bonnes propriétés vis à vis de la projection π de $\mathcal{P}\times E$ dans $\mathcal{P}$. Cette projection étant une application algébrique, nous avons en effet la stratification

$$C_l^{i,j} = \bigcup_{k\in[0,j]} A_{l+1}^{i,j,k},$$

où

(vi) $A_{l+1}^{i,j,k}$ est un ouvert de Zariski d'une variété algébrique,

(vii) $D_{l+1}^{i,j,k} = \bigcup_{m\leq k} A_{l+1}^{i,j,m}$ est l'intersection d'une variété algébrique avec $C_l^{i,j}$, en particulier elle contient l'adhérence de $A_{l+1}^{i,j,k}$ dans $C_l^{i,j}$.

(viii) L'intersection de l'espace tangent à $C_l^{i,j}$ avec l'espace tangent à la fibre de la projection est de dimension constante k sur $A_l^{i,j,k}$.

On peut ensuite réitérer notre procédure sur les $A_l^{i,j,k}$; on remarquera avec profit qu'à chaque étape le multi-indice contient deux indices de plus que le multi-indice de l'étape précédente. Nous allons maintenant faire une remarque encore plus profitable. Soient p la dimension d'une strate de $C = C_l^{i,j}$ et $A = A_{l+1}^{i,j,k_0}$ sa strate maximale qui est automatiquement un ouvert de Zariski de C. Si enfin $D = C_{l+1}^{i,j,k_0,p}$ est la strate maximale de A, D est également un ouvert de Zariski -et en particulier un ouvert usuel- de C, cette strate D vérifie les deux propriétés suivantes :

- elle est lisse,
- la projection π restreinte à cette strate est de rang constant.

En particulier cette strate ne sera plus jamais restratifiée, notre procédure s'est enfin arrêtée.

On en déduit que, en partant de A_1^0 n'importe quelle variété algébrique (dans notre cas, ce sera $\Psi^{-1}\{0\}$), notre procédure va se stabiliser et produire une

stratification qui, en ordonnant les multi-indices suivant l'ordre lexicographique, vérifiera (i), (ii) et (iii).

En effet, considérons la fonction définie, si $x \in A_l^i$, par $h_l(x) = j$ où j est l'avant-dernier indice de i. Alors, par construction $h_l(x) \geq h_{l+1}(x)$. Par ailleurs si $h_l(x) = h_{l+1}(x)$, cela signifie que $x \in C_l^{i_1}$ et $x \in C_{l+1}^{i_2}$ où ces deux strates ont la même dimension. Cela entraîne d'après notre remarque précédente que la strate $C_{l+1}^{i_2}$ ne sera plus jamais restratifiée et donc que pour tout q positif, nous avons $h_l(x) = h_{l+q}(x)$. On en déduit qu'il existe l tel que pour tout x , nous avons $h_l(x) = h_{l+1}(x)$. Toujours d'après notre remarque, pour ce l précis, la stratification A_l^i, en ordonnant i suivant l'ordre lexicographique, va vérifier (i), (ii) et (iii). ∎

Reprenons le cours de notre démonstration et réalisons notre stratégie sur des ouverts denses de V.

Pour tout p, soit Ω_p l'ouvert dense de V sur lequel $\mathcal{F}_p$ est localement de rang constant.

L'application Σ_p de Ω_p dans $\Psi^{-1}\{0\}$ étant continue, il existe un ouvert dense $\bar{\Omega}_p$ de Ω_p tel que tout point x de $\bar{\Omega}_p$ possède un voisinage constitué de points dont l'image par Σ_p est inclus dans la même strate de la stratification de $\Psi^{-1}\{0\}$.

Soit maintenant x un point de V appartenant à l'intersection de tous les $\bar{\Omega}_p$, intersection qui est non vide par le théorème de Baire. Soit ensuite p tel que $F_p^{-1}\{0\} \cap (\{x\} \times E)$ soit réduit à un point. L'existence d'un tel p résulte immédiatement de l'algébricité des $F_p^{-1}\{0\} \cap (\{x\} \times E)$.

Il existe donc un voisinage U de x tel que

(a) $\mathcal{F}_p(U)$ soit une sous-variété, que l'on peut supposer plongée en supposant U assez petit,

(b) il existe i tel que $\Sigma_p(U) \subset V^i$.

Puisque $F_p^{-1}\{0\} \cap (\{x\} \times E)$ est réduit à un point, $V^i \cap (\{x\} \times E)$ est également réduit à un point. Comme par ailleurs, π restreinte à V^i est de rang constant, c'est une immersion et on en déduit que V^i est tel que l'intersection de l'espace tangent à V^i avec l'espace tangent à la fibre est de dimension 0.

En particulier, si π est la projection de $\mathcal{P} \times E$ sur $\mathcal{P}$, il existe un voisinage O de $\Sigma_p(x)$ tel que π est un plongement de $V^i \cap O$ dans $\mathcal{P}$. Supposons en prenant U assez petit que $\Sigma_p(U) \subset O$. On en déduit alors que $\Sigma_p(U)$ s'identifie à $\pi^{-1}(\mathcal{F}_p(U)) \cap V^i$ et que, en particulier, c'est une sous-variété plongée. Dès lors de U dans $\Sigma_p(U)$, Σ_p s'identifie à $\pi^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1}$ et est donc C^∞. On en déduit aisément que σ est elle-même C^∞ sur U.

Nous avons démontré que tout ouvert de V contenait un ouvert sur lequel σ est C^∞ ce qui démontre notre lemme. ∎

4 Sur l'equation homologique

Ce paragraphe et ses notations sont indépendants de ce qui précède.

4.1 . On se donne F une variété riemannienne complète difféomorphe à $\mathbf{R}^f$ et dont nous notons la connexion de Levi-Cività $\bar{\nabla}$ -dans la suite, F sera une feuille centrale stable d'une orbite périodique d'un flot d'Anosov ; on se donne également un fibré vectoriel $E \longrightarrow F$ de rang q, muni d'une métrique et d'une connexion ∇ préservant la métrique. Les fibrés vectoriels $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$ sont alors eux aussi munis d'une connexion que nous noterons également ∇, un élément de ce fibré sera conçu comme une application multilinéaire de TF dans E . On peut donc définir par récurrence, si T est une section de E, la dérivée covariante n-ième de T -que nous noterons $\nabla^n T$- et qui sera une section de $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$; par abus de langage, la section elle même est considérée comme une dérivée d'ordre zéro.

Nous allons supposer de plus que la situation que nous venons de décrire est à *géométrie bornée* C^∞ en un sens que nous allons maintenant préciser. Soit (x_n) une suite de points de F. Choisissons pour tout n une isométrie de $\mathbf{R}^f$ dans $T_{x_n}F$ et considérons l'application composée, notée u_n, de cette isométrie avec l'application exponentielle. Choisissons par ailleurs un champ de repère orthonormé de E. Nos hypothèses de géométrie bornée sont les suivantes : pour toute suite (x_n), il existe r tel que sur la boule $B(0,r)$ de $\mathbf{R}^f$

(i) la suite de métriques induites par u_n possède une sous-suite qui converge C^∞,

(ii) sur le fibré trivial $B(0,r) \times \mathbf{R}^q$ identifié à $u_n^*(E)$ par le choix de notre repère orthornormé , la suite de connexions induites $u_n^*\nabla$ possède une sous-suite qui converge C^∞.

4.2 . Soit maintenant φ un difféomorphisme C^∞ de F ayant un point fixe x_0 et qui soit uniformément contractant, c'est-à-dire en notant sa différentielle φ_* :

(iii) il existe λ tel que $\|\varphi_*\| \leq \lambda < 1$. En particulier, $\varphi^n(B(x_0,r)) \subset B(x_0,r)$ pour tout r et n.

On suppose également que toutes les dérivées de φ sont uniformément bornées sur F, c'est-à-dire

(iv) si $\bar{B}$ est le (2,1)-tenseur défini par

$$\bar{B}(X,Y) = \varphi_*^{-1}(\bar{\nabla}_{\varphi_*(X)}\varphi_*(Y)) - \bar{\nabla}_X Y,$$

alors toutes les dérivées de B sont bornées sur F.

4.3 . On se donne enfin Φ un automorphisme C^∞ de E relevant φ, tel que

(v) Φ^{-1} est borné par Λ : $\forall \eta \in E,\ \|\Phi^{-1}(\eta)\| \leq \Lambda \|\eta\|$.

On suppose également que les dérivées de Φ sont uniformément bornées, c'est-à-dire

(vi) si B est le tenseur de $TF^* \otimes E^* \otimes E$ défini par

$$B(X, \eta) = \Phi^{-1} \nabla_{\varphi_*(X)} \Phi(\eta) - \nabla_X \eta,$$

alors toutes les dérivées de B sont bornées sur F.

4.4 . Remarquons maintenant que Φ agit à droite sur les sections de $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$ de la manière suivante : si $T\ : F \longrightarrow E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$ est une section, $\Phi^* T$ est la section définie par

$$(\Phi^* T)_x (X_1, ..., X_n) = \Phi^{-1} (T_{\varphi(x)} (\varphi_*(X_1), ..., \varphi_*(X_n))).$$

Notre but dans ce paragraphe est de montrer le

4.5 Lemme. *Soit T une section C^∞ de E dont toutes les dérivées sont bornées, soit S une section bornée -au sens C^0- et C^∞ et qui est une solution de l'équation homologique*

$$S - \Phi^* S = T,$$

alors toutes les dérivées de S sont bornées sur F.

Nous avons la proposition suivante

4.6 proposition. *Soit n tel que $\Lambda \lambda^n$ soit strictement plus petit que 1, et soient T et S deux sections bornées sur tout compact de $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$ qui vérifient l'équation*

$$S - \Phi^* S = T,$$

alors

$$\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0, r)} \|S\| \leq \frac{1}{1 - \Lambda \lambda^n} . \operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0, r)} \|T\| \ .$$

Preuve : En effet, nous avons tout d'abord par récurrence

$$S = (\Phi^*)^p S + \sum_{i=0}^{i=p-1} (\Phi^*)^i T.$$

Or pour toute section H de $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$, nous avons

$$\|\Phi^{-p} H_{\varphi^p(x)} (\varphi_*^p(X_1), ..., \varphi_*^p(X_n))\| \leq (\Lambda \lambda^n)^p \|H_{\varphi^p(x)}\| . \|X_1\| ... \|X_n\|.$$

et donc

$$\|((\Phi^*)^p H)_x\| \leq (\Lambda\lambda^n)^p \|H_{\varphi^p(x)}\|.$$

Nous en déduisons en particulier, puisque S est bornée,

$$S = \sum_{i=0}^{i=\infty} (\Phi^*)^i T$$

et donc

$$\|S_x\| \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} (\Lambda\lambda^n)^i \|T_{\varphi^i(x)}\|,$$

d'où le résultat, en remarquant que $\varphi(B(x_0, r)) \subset B(x_0, r)$. ∎

Nous avons maintenant

4.7 PROPOSITION. *Soit S et T vérifiant les hypothèses du lemme 4.5, alors pour tout entier n, nous avons*

$$\nabla^n S - \Phi^* \nabla^n S = \nabla^n T + \sum_{p=0}^{p=n-1} B_p^n(\nabla^p S),$$

où les B_p^n sont des opérateurs de $E \otimes (TF^*)^{\otimes^p}$ dans $E \otimes (TF^*)^{\otimes^n}$, bornés et dont toutes les dérivées sont bornées .

Preuve : ceci découle immédiatement d'un raisonnement par récurrence et des hypothèses (iv) et (vi). ∎

Des deux propositions précédentes, nous en déduisons immédiatement

4.8 PROPOSITION. *Avec les hypothèses du lemme 4.5, il existe p tel que pour tout n, $n > p$, il existe des constantes K_n et $\bar{K}_n$ vérifiant pour tout r,*

$$\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} \|\nabla^n S\| \leq K_n.(\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} (\|\nabla^i S\|;\ i \in [0,p])) + \bar{K}_n.$$

4.9 Preuve du lemme 4.5. D'après ce qui précède, il nous suffit de montrer la

4.10 PROPOSITION. *Soit S une section de E bornée et C^∞ telle qu'il existe K_1 et $\bar{K}_1$ vérifiant pour tout r,*

$$\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} \|\nabla^{p+1} S\| \leq K_1(\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} (\|\nabla^i S\|;\ i \in [0,p])) + \bar{K}_1,$$

alors il existe K_2 telle que

$$\forall i \in [0,p];\ \|\nabla^i S\| \leq K_2.$$

Preuve : Considérons la fonction

$$f = \sum_{i=0}^{i=p} \|\nabla^i S\|^2,$$

il est clair que d'après nos hypothèses, il existe K_3 et K_4 telle que

$$\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} \|\nabla f\| \leq K_3.(\operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r)} f) + K_4.$$

Raisonnons maintenant par l'absurde et supposons que f n'est pas bornée. Il existe donc une suite de points (x_n) de F telle que la suite $(f(x_n))$ tende vers l'infini et telle que de plus, en posant $r_n = d(x_0, x_n)$, nous ayons

$$f(x_n) = \operatorname*{Sup}_{y \in B(x_0,r_n)} f(y).$$

$(*)$ Démontrons tout d'abord qu'il existe α tel que si $d(x_0, y) \leq r_n + \alpha$, alors $f(y) \leq 2f(x_n) + 1$.

Soient en effet f_n^α la borne supérieure de f sur $B(x_0, r_n + \alpha)$ et y_n tel que $f_n^\alpha = f(y_n)$. Soit maintenant γ_n la géodésique joignant x_0 à y_n, de longueur $t_n = d(x_0, y_n)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} f_n^\alpha =& f(y_n) \\ =& f(\gamma_n(r_n)) + \int_{r_n}^{t_n} \frac{d}{ds}(f \circ \gamma_n) ds \\ \leq& f(x_n) + \alpha K_3 f_n^\alpha + \alpha K_4 \\ & . \end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de prendre $\alpha \leq \operatorname{Inf}(1/2K_3, 1/2K_4)$ pour démontrer $(*)$.

Reprenons nos hypothèses de géométrie bornée (i) et (ii), et extrayons une sous-suite telle que si (g_n) est la suite de métriques induite sur la boule B de $\mathbf{R}^f$ de rayon α et de centre 0 par l'application u_n, alors (g_n) converge C^∞ sur tout compact. De même, on suppose que sur le fibré trivial $B \times \mathbf{R}^q$ identifié isométriquement pour tout n à $u_n^*(E)$, la suite de connexions induites converge C^∞.

Posons maintenant $G_n = f(x_n)^{-\frac{1}{2}}.S$ que nous considérons également comme une section de E_n. Comme S est bornée, la suite (G_n) converge uniformément vers 0 ; par ailleurs d'après $(*)$, les dérivées de (G_n) jusqu'à l'ordre p sont uniformément bornées et grâce à notre hypothèse de départ les dérivées d'ordre $p+1$ sont également bornées. On en déduit que (G_n) tend vers 0 de manière C^p sur tout compact de B. Nous obtenons notre contradiction en remarquant que en x_n

$$\sum_{i=0}^{i=p} \|\nabla^i G_n\|^2 = 1.$$

4.11 Remarque. En fait, pour obtenir la conclusion du lemme, il suffit que S soit C^n avec un n tel que $\Lambda\lambda^n < 1$. On en déduit alors aisément que S est C^∞ et que toutes ses dérivées sont uniformément bornées.

5 LES FEUILLETAGES HOROSPHÉRIQUES SONT LISSES

Nous sommes maintenant en mesure de conclure et de montrer la proposition suivante qui terminera la démonstration de notre théorème

5.1 PROPOSITION. *Soit ϕ_t un flot d'Anosov topologiquement transitif sur une variété compacte M tel que les distributions stable et instable, notées E^+ et E^-, soient C^∞ sur un ouvert dense Ω, alors ces distributions sont C^∞ partout.*

Remarquons que l'ensemble des points qui possèdent un voisinage sur lequel les distributions stables et instables sont C^∞ est un ouvert invariant par le flot. Si cet ouvert est non vide, il est automatiquement dense dans le cas d'un flot topologiquement transitif. Toujours dans ce cas, il contient une orbite périodique par densité des orbites périodiques ainsi que les feuilles centrales stable et instable de cette orbite. La proposition précédente se déduit donc de la suivante

5.2 PROPOSITION. *Soit ϕ_t un flot d'Anosov topologiquement transitif sur une variété compacte M tel que la distribution instable E^- soit C^∞ le long d'une feuille centrale stable d'une orbite périodique, alors cette distribution est C^∞ partout.*

Preuve : rappelons tout d'abord le résultat fondamental suivant : les feuilletages $E^\pm$ et $E^\pm \oplus \mathbf{R}X$ sont intégrables, chaque feuille est C^∞ et dépend continûment du point dans la topologie C^∞ [H-P].

Démontrons que la distribution instable E^- est C^∞ le long des feuilles stables. Soit donc γ une orbite périodique du flot de période t_0 incluse dans Ω. La feuille centrale stable, que nous noterons F, de cette orbite va alors également être incluse dans Ω et va être stable par $\varphi = \phi_{t_0}$.

Munissons M d'une métrique annexe C^∞ de connexion de Levi-Cività $\bar{\nabla}$, pour laquelle φ soit contractant de F dans elle même. Soit enfin N le fibré orthogonal à $E^+ \oplus \mathbf{R}X$, où X désigne le générateur du flot. Notons π la projection orthogonale de TM sur $E^+ \oplus \mathbf{R}X$, et π_N la projection orthogonale sur N. Le fibré N restreint aux feuilles centrales stables est muni d'une connexion ∇ déduite de la connexion de Levi-Cività de M , connexion qui s'obtient en posant $\nabla_Y Z = \pi_N \bar{\nabla}_Y Z$, pour Y dans $E^+ \oplus \mathbf{R}X$ et un champ Z tangent à N. Cette connexion est C^∞ le long des feuilles centrales stables, elle a en fait la même régularité que $E^+ \oplus \mathbf{R}X$.

Il est clair maintenant grâce à la compacité de M et au résultat fondamental de Hirsch et Pugh, que le couple (F, N) muni des métriques et des connexions que nous venons de construire est à géométrie bornée C^∞ au sens de (i) et (ii) de 4.1.

Considérons maintenant le fibré $E = N^* \otimes TF$ et munissons le des connexions et métriques déduites de celle de N et F ; le couple (F, E) est lui aussi à

géométrie bornée C^∞. Le fibré E est également muni d'un automorphisme naturel Φ relevant φ, défini par

$$\Phi(A)(Y) = \varphi_* A \pi_N \varphi_*^{-1}(Y) \ ,$$

pour tout Y de N et A de E.

Toujours grâce à la compacité de M, φ et Φ vérifie les hypothèses (iii), (iv), (v) et (vi) de 4.2. et 4.3.

Nous pouvons maintenant voir la distribution E^- le long de F comme une section S de E, puisqu'en tout point x de M, E_x^- est le graphe d'une application linéaire de N dans TF. Le fait que E^- soit stable par le flot se traduit par l'équation

$$S_{\varphi(x)}(\pi_N \varphi_*(Y)) - \varphi_* S(Y) = \pi f_*(Y),$$

pour tout Y de N. Autrement dit, en considérant la section T de E donnée par $T = -\varphi_*^{-1} \pi \varphi_*$, nous avons l'équation homologique

$$S - \Phi^* S = T.$$

A nouveau, T a toutes ses dérivées uniformément bornées sur F. On peut donc appliquer notre lemme 4.5, et en déduire que les dérivées de S sont uniformément bornées sur F.

La densité des feuilles centrales stables pour un flot d'Anosov topologiquement transitif entraîne que S et donc E^- est C^∞ le long des feuilles centrales stables. En effet, soit x un point quelconque de M et (x_n) une suite de points de notre feuille centrale stable périodique convergeant vers x. La suite de boules B_n centrées sur x_n de rayon r et tracées sur la feuille centrale stable, converge de manière C^∞ vers la boule de centre x de rayon r tracées sur la feuille centrale stable de x. Ceci résulte toujours d'une utilisation du résultat fondamental de Hirsch et Pugh. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème d'Ascoli à la suite definie par la distribution instable sur cette suite de boules.

Pour conclure, nous pouvons utiliser un théorème de J.-L. Journé qui nous dit que si une fonction est uniformément C^∞ le long de chacune des feuilles de deux feuilletages transverses ayant la régularité des feuilletages stables et instables d'Anosov, alors elle est C^∞ partout [J]. Il nous suffit maintenant d'appliquer ce résultat à E^- qui est uniformément C^∞ le long des feuilles centrales instables -ce qui découle du résultat fondamental de Hirsch et Pugh- et des feuilles centrales stables -ce que nous venons de démonter. ∎

5.3 Remarque finale. Toujours dans l'optique de 5.2., pour obtenir la conclusion de la proposition, il suffit de supposer que le long de la feuille centrale stable d'une orbite périodique, la distribution S est C^n avec un n qui ne dépend que des exposants de contraction (*cf* 4.11.). Pour des résultats analogues dans cet ordre d'idée, voir plus précisemment [H].

Bibliographie

[B-F-L] Benoist (Y.), Foulon (P.), Labourie (F.), *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables,* à paraître au Journal of the Amer. Math. Soc.

[D-R] Damek (E.), Ricci (F.), *A Class of Non-Symmetric Harmonic Riemannian Spaces,* prépublication, Univ. Torino (1990).

[H1] Hamenstädt (U.), *oral communication.,*

[H] Hasselblatt (B.), *Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations,* prépublication, I.H.E.S. (1991).

[H-P] Hirsch (M.), Pugh (C.), *Stable manifolds and hyperbolic sets,* in Proc. Symp. Pure Math., **33**, pp 133-164. Amer. Math. Soc., 1970.

[H-K] Hurder (S.), Katok (A.), *Rigidity and Godbillon-Vey Classes* , Publications de l'I.H.E.S. **72**, 5-61 (1991).

[Le] Ledrappier (F.), *harmonic measures and Bowen-Margulis measures,* Israël J. of Math. **71**, 275-287 (1990).

[Li] Lichnerowicz (A.), *Sur les espaces Riemanniens complètement harmoniques,* Bull. Soc. Math. France **72**, 146-168 (1944).

[Sz] Szabo (Z.), *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds,* J. Diff. Geom. **31**, 1-28 (1990).

[J] Journé (J.-L.), *On a regularity problem occurring in connection with Anosov diffeomorphisms,* Comm. Math. Phy. **106**, 345-351 (1986).

Patrick Foulon : Centre de Physique Théorique, LP 014 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau (Cedex)

François Labourie : Centre de Mathématiques, URA D.0169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau (Cedex)