Exemples
de courbes pseudo-holomorphes
en géométrie riemannienne.

Rappelons qu'une *structure presque complexe* sur une variété est la donnée d'un champ d'endomorphismes de carré -1 du fibré tangent. Une application *pseudo-holomorphe* entre deux variétés presque complexes est une application dont la différentielle commute avec les structures complexes. Enfin une *courbe pseudo-holomorphe* dans une variété presque complexe est une surface réelle dont le plan tangent est stable par rapport à la structure complexe.

Notre but dans cet article est, dans un premier temps, de traduire dans le langage des courbes pseudo-holomorphes un certain nombre de problèmes classiques de géométrie riemannienne sur les surfaces. Nous utiliserons en particulier cette interprétation pour étudier les dégénérescences possibles des solutions de ces problèmes. Nous étudierons ainsi

1. les immersions isométriques elliptiques (problème de Weyl), d'une surface S dans une 3-variété M,
2. les surfaces à courbure de Gauss prescrite (problème de Minkowski, Monge Ampère ellliptique) dans une 3-variété M,
3. les surfaces à courbure moyenne prescrite, et en particulier les surfaces minimales, dans une variété M
4. les applications harmoniques de surfaces,
5. les équations elliptiques du deuxième ordre sur les surfaces.

Pour chacun de ces cas, nous expliciterons la construction permettant de transcrire ces exemples dans le langage pseudo-holomorphe. En général, l'interprétation est la suivante: les solutions des problèmes considérés sont a priori des surfaces dans une variété, $S \times M$ dans le premier exemple (en considérant le graphe de l'immersion) et M dans les autres. Ces surfaces se relèvent alors comme des surfaces tangentes à un sous-fibré d'holonomie - au sens de [G2] - dans un certain espace de jets E se fibrant sur notre espace de base. Dans le cas des deux derniers exemples, le fibré que nous considérerons est le fibré unitaire tangent et le relevé se fait par l'application de Gauss. Chacune des fibres du sous-fibré d'holonomie sera alors muni d'une structure presque complexe qui stabilise l'espace tangent du relevé de notre surface. Réciproquement, si une courbe pseudo-holomorphe tangente à ce sous-fibré se projette sur une surface dans notre espace de base, cette surface est solution du problème.

Ces données suffisent alors pour appliquer la théorie des courbes pseudo-holomorphes. En particulier, nous nous sommes intéressés dans les deux premiers exemples au problème d'existence. Les résultats obtenus l'ont été en utilisant (comme dans le cas des courbes pseudo-holomorphes) la méthode de continuité. Cette méthode consiste schématiquement à partir d'une solution pour un problème proche, à la déformer et obtenir notre solution comme limite de cette déformation.

L'un des points cruciaux, est alors bien entendu d'obtenir un résultat de compacité pour une suite de solutions, et c'est à ce moment que les résultats de Gromov et en particulier le lemme de Schwarz s'avèrent particulièrement efficaces pour contrôler la convergence et décrire les dégénérescences.

Essayons de dérire les dégénérescences de solutions, à nouveau schématiquement, dans notre cas. Si on étudie une suite de solutions, deux types de divergences peuvent apparaître. D'une part, celles liées à l'apparition de bulles dans la suite de courbes pseudo-holomorphes qui se traduisent elles mêmes par des bulles pour les solutions ; l'exemple des surfaces minimales est bien connu. D'autre part, c'est le nouveau phénomène, ceux provenant de l'existence de courbes pseudo-holomorphes parasites non associées à des solutions de notre problème. En effet, une courbe pseudo-holomorphe dans notre espace de jets ne se projette pas nécessairement sur une surface dans notre espace de base. Si la projection est de rang zéro, elle est incluse dans la fibre ce qui dans le cas des surfaces minimales correspond à l'apparition de singularités différentiables. Si la projection est de rang un, on obtient une dégénérescence *filiforme* comme dans le cas des immmersions isométriques elliptiques (voir théorème 1.3.). Ce dernier type de dégénéresecences apparait lorsque l'on ne borne plus l'aire, comme nous allons l'expliquer maintenant.

Pour simplifier imaginons que notre espace Esoit un fibré au dessus du disque D et que les courbes pseudo-holomorphes sont des graphes au dessus de D. A aire bornée, la théorie de Gromov - qu'il faut adapter très soigneusement dans le cas de variétés à bord - montre que toute suite de courbes pseudo-holomorphes converge vers une limite elle-même pseudo-holomorphe, modulo le détachement de bulles. Pour des raisons très simples, dans le cas d'une suite de courbes graphes, les bulles apparaissent dans la fibre. Dans le cas des immersions isométriques elliptiques par exemple, la fibre ne peut contenir de courbes pseudo-holomorphes pour la raison très forte que son espace tangent ne contient pas de sous-espaces complexes. Si maintenant l'on ne borne plus l'aire et que les bulles sont exclues, la suite des courbes pseudo-holomorphes va converger vers une *lamination* (imaginons une spirale s'enlaçant sur un cercle). Les points récurrents de cette lamination ne peuvent être tracés sur des courbes graphes dans un de leurs voisinages. Dans le cas des immersions isométriques, ces points récurrents se trouvent sur ces courbes pseudo-holomorphes *parasites* qui se projettent sur le disque en des géodésiques. Une description précise de l'apparition de ces points récurrents permet d'obtenir de nouveaux résultats.

En ce qui concerne les deux premiers exemples, nous présenterons également les résultats géométriques que cette interprétation nous a permis d'obtenir.

Dans une deuxième partie, nous rappellerons et énoncerons quelques lemmes concernant les courbes pseudo-holomorphes. Les deux premiers, et en particulier le lemme de Schwarz, permettent de faire converger une suite d'applications pseudo-holomorphes. Les deux suivants permettent de décrire la limite, en particulier de contrôler l'apparition de singularités et le comportement du bord d'une

suite de courbes pseudo-holomorphes.

A la fin du paragraphe sur les immersions isométriques elliptiques, nous esquisserons une démonstration utilisant ces lemmes.

Une partie de ce qui est rédigé ici est déjà paru ailleurs de manière dispersée, nous avons choisi de réunir les passages utilisant les courbes pseudo-holomorphes (exemples 1 et 2), de présenter de nouveaux exemples (3,4 et 5) d'isoler des résultats pseudo-holomorphes (6) et de donner dans l'introduction un guide de lecture, afin d'essayer de montrer l'utilité de l'application de la théorie de Gromov à l'analyse globale.

Signalons encore que le codage pseudo-holomorphes permet également d'obtenir des résultats d'unicité de solutions, en particulier pour les immersioms elliptiques. Nous ne developperons pas ce point de vue ici et renvoyons á [L1].

Je tiens à remercier ici Pierre Pansu, qui m'a patiemment expliqué le lemme de Schwarz, et Misha Gromov qui m'a suggéré ces problèmes.

1 Immersions isométriques elliptiques

Ce paragraphe est un résumé de la première partie de [L1].

1.1 Définitions et résultats. Une immersion isométrique *elliptique* (ou localement convexe) (resp. $\epsilon -$ *elliptiques*) d'une surface S dans une variété M de dimension 3, est une immersion isométrique telle que le discriminant de la deuxième forme fondamentale - par rapport á la premiére forme fondamentale - est positif en tout point (resp. supérieur à un ϵ positif). Ceci est automatiquement le cas si, par exemple, la courbure sectionnelle de M inférieure à K_0, et la courbure de S est en tout point strictement supérieure à K_0.

Nous nous sommes intéressés à la divergence d'une suite de telles immersions. On se donne donc (f_n) une suite d'immersions ϵ-elliptiques d'une surface S dans une variété riemannienne (M, g) de dimension 3, telle que les métriques induites convergent de façon C^∞ vers une métrique g_0. On suppose également que (f_n) converge de façon C^0 vers une application f_0; il suffit pour cela par exemple que M soit compacte. Notre premier résultat exhibe un critère permettant d'affirmer sous une hypothèse assez faible que notre suite converge de façon C^∞. Remarquons que les théorèmes de ce type exigent habituellement une borne uniforme sur la courbure moyenne.

1.2 Théorème. *Si l'intégrale de la courbure moyenne des $f_n(S)$ est majorée, la suite (f_n) converge C^∞ sur tout compact vers une immersion isométrique f_0 de (S, g_0) dans (M, g).*

Notre deuxième résultat nous permet de décrire la façon dont dégénère notre suite d'immersions. Tout d'abord, une définition : Si la suite (f_n) ne converge pas de manière C^∞ au voisinage d'un point x de S, dont nous dirons alors qu'il est *singulier*.

1.3 THÉORÈME. *Soit (f_n) d'immersions ϵ-elliptiques de (S, g_0) dans (M, g) convergeant de manière C^0 vers une application f_0. Il existe alors une unique géodésique de S, γ, passant par x, telle que f_0 est une isométrie de γ dans une géodésique de M. De plus, tous les points de γ sont singuliers.*

Donnons un exemple du phénomène décrit par ce théorème. On peut construire (voir [S]) une famille (f_n) d'immersions isométriques de la sphère moins deux points antipodaux dans $\mathbf{R}^3$. Chaque immersion f_n s'enroule alors n fois autour de l'axe des pôles, la limite étant un segment (figure 1).

Figure 1

Nous nous proposons maintenant de décrire le 1-jet d'une immersion isométrique d'une surface S dans une variété M de dimension 3. Ce jet est à valeur dans l'ensemble $E = Isom(TS, TM)$ des isométries linéaires de TS dans TM. Notre but est de munir un ouvert O de E d'une structure presque complexe telle que le 1-jet d'une immersion isométrique elliptique (ou localement convexe) définisse une courbe pseudo-holomorphe de O. L'aire induite sur ces courbes pseudo-holomorphes sera alors l'intégrale de la courbure moyenne.

Ceci est la première étape de la démonstration de 1.2.

Nous verrons aussi que d'autres courbes pseudo-holomorphes "parasites", les *surfaces de pli*, s'introduisent naturellement (1.12). Démontrer le théorème 1.3 revient alors à démontrer que le graphe du 1-jet d'une suite d'immersions isométriques elliptiques converge soit vers un graphe, soit vers une telle *surface de pli*.

1.4 Espace des jets d'immersions isométriques. Notre première étape va être de décrire E et plus particulièrement son espace tangent.

L'espace E est naturellement un fibré sur $S \times M$. On notera π_S et π_M, les projections sur S et M respectivement et pour simplifier on notera leur différentielle de la même manière.

La fibre au point (s,m) est $Isom(T_sS, T_mM)$, l'ensemble des isométries de T_sS dans T_mM. L'espace tangent à la fibre en un point (s,m,g) s'identifie à l'ensemble des applications linéaires f de T_sS dans T_mM qui vérifient

$$\langle f(u) \mid g(u)\rangle = 0$$

où u appartient à T_sS et $\langle \mid \rangle$ désigne le produit scalaire de T_mM. Une telle f s'écrit nécessairement $f = g \wedge v$, où v appartient à T_mM, et $\wedge$ désignant le produit vectoriel dans T_mM (nous supposerons M orienté). Cet espace tangent s'identifie donc canoniquement à T_mM.

On munit ce fibré de la connexion induite par les connexions de Levi-Civita sur S et M, on note alors π_F la projection sur l'espace tangent à la fibre qui s'en déduit.

Nous avons donc décomposé l'espace tangent à E en

$$T_{(s,m,g)}E = T_sS \oplus T_mM \oplus T_mM$$

à l'aide des projections π_S, π_M et π_F.

1.5 1-jet d'immersion isométrique. Soit maintenant f une immersion isométrique de S dans M. Nous noterons f_* la différentielle de f, j^1f son 1-jet, ∇ la connexion de M, n le vecteur normal extérieur à la surface $f(S)$ et J_0 la structure complexe naturelle sur $f_*(TS)$ induite par la métrique et l'orientation, donnée par $J_0(u) = n \wedge u$.

Nous allons maintenant décrire l'espace des vecteurs tangents à la surface $j^1f(S)$ dans E.

1.6 PROPOSITION. *A l'aide de la décomposition précédente, cet espace se décrit comme l'ensemble des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), -J_0\nabla_{f_*(u)}n)$$

où u désigne un vecteur de TS.

Preuve: Seul le dernier terme est à identifier. Considérons tout d'abord l'espace tangent à la fibre comme un espace d'applications linéaires. Le dernier terme est alors l'application $\pi_F(v)$ qui à w associe $\pi_F(v)(w)$ où

$$\begin{aligned}\pi_F(v)(w) &= \nabla_{f_*(u)}f_*(w) - f_*(\nabla_u w)\\ &= \mathrm{II}(u,w)n\end{aligned}$$

où $\mathrm{II}(,)$ désigne la deuxième forme fondamentale de la surface immergée. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{II}(u,w)n &= -\langle \nabla_{f_*(u)}n \mid f_*(w)\rangle n\\ &= (n \wedge \nabla_{f_*(u)}n) \wedge f_*(w)\\ &= f_*(w) \wedge -J_0\nabla_{f_*(u)}n\end{aligned}$$

■

1.7 Cas elliptique. Dans le cas elliptique, la deuxième forme fondamentale est une métrique. On a alors

$$\nabla_{f_*(u)} n = kJ_0 J$$

où k^2 est la courbure de Lipschitz-Killing de la surface - le produit des courbures principales - , c'est-à-dire la différence des courbures extrinsèque et intrinsèque du plan tangent à la surface,

$$k = K(TS) - K(f_*(TS))$$

et J désigne la structure complexe associé à la deuxième forme fondamentale qui respecte l'orientation, c'est-à-dire la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour cette métrique.

En particulier, nous avons

1.8 PROPOSITION. *L'espace tangent à $j^1 f(S)$ dans E est constitué des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), kf_*(Ju))$$

où u désigne un vecteur de TS.

On remarquera que k est une fonction parfaitement définie sur E.

1.9 Structure presque complexe. Soit O l'ouvert de E constitué des points où la courbure de Lipschitz-Killing k est strictement positive. Nous allons munir O d'une structure presque complexe telle que $j^1 f(S)$ soit une courbe pseudo-holomorphe lorsque f est une immersion isométrique elliptique.

Nous allons décomposer TE d'une nouvelle manière

$$\begin{aligned} T_{(s,m,g)}E =& V \oplus W \\ \text{où } V =& \{G(u,v) = (u, g(u), kg(v)); \forall u, v \in TS\} \\ \text{et } W =& \{(u, -g(u) + \alpha n, \beta n)\} \end{aligned}$$

Munissons TE de la structure presque complexe

$$\begin{aligned} J\mid_V &: G(u,v) \mapsto G(v,-u) \\ J\mid_W &: (u, -g(u) + \alpha n, \beta n) \mapsto (J_0 u, -g(J_0 u) + \beta n, -\alpha n) \end{aligned}.$$

En fait, la structure complexe sur W n'a aucune incidence sur la suite. Munissons V de la métrique hermitienne μ

$$\mu(G(u_1, v_1), G(u_2, v_2)) = k\langle u_1 \mid u_2\rangle + k\langle v_1 \mid v_2\rangle,$$

où $\langle \mid \rangle$ désigne la métrique de S. On munit ensuite W de n'importe quelle métrique.

1.10 Courbes pseudo-holomorphes. Nous allons maintenant exhiber des courbes pseudo-holomorphes.

1.11 PROPOSITION. *Si f est une immersion isométrique elliptique de S dans M, $j^1 f(S)$ est une courbe pseudo-holomorphe de O. De plus la structure presque complexe induite sur S est celle donnée par la deuxième forme fondamentale. L'élément d'aire ω induit est $H\omega_0$ où H désigne la courbure moyenne de l'immersion et ω_0 l'elément d'aire de la métrique initiale.*

La preuve découle de 1.8 .

Il existe d'autres courbes pseudo-holomorphes. Celles que nous allons introduire sont celles qui produisent les dégénérescences du théorème 1.3.

1.12 PROPOSITION, DÉFINITION. *Soient $\gamma(t)$ une géodésique de S et $\Gamma(t)$ une géodésique de M, toutes deux paramétrées par l'arc. La surface $F = F(\gamma, \Gamma)$ de E constituée des isométries de $T_{\gamma(t)}S$ dans $T_{\Gamma(t)}M$ qui envoient $\frac{d\gamma}{dt}$ sur $\frac{d\Gamma}{dt}$, est une courbe pseudo-holomorphe. Nous l'appellerons* **Surface de pli .**

A nouveau la preuve est immédiate.

1.13 Idée de la démonstration de 1.2..

Nous avons vu que les immersions isométriques elliptiques se relèvent en courbes pseudo-holomorphes dans un espace de jets E se fibrant sur $S \times M$, la structure conforme induite étant celle de la deuxième forme fondamentale.

Une première étape de la démonstration consiste à démontrer que chaque fibre de cette fibration admet un voisinage calibré 6.2. Si (f_n) est une suite d'immersions isométriques de S dans M, convergeant de façon C^0, nous pouvons alors supposer en prenant un voisinage U d'un point x_0 de S -homéomorphe au disque- que $j_1 f_n(U)$ est inclus dans ce voisinage.

On considère maintenant g_n la représentation conforme de D dans $j_1 f_n(U)$ envoyant l'origine dans le relevé de x_0. D'après le lemme de Schwarz, nous pouvons extraire de (g_n) une sous-suite convergeant sur tout compact vers une application g_0. Il nous reste donc à comprendre ce qu'est l'image de g_0, et en particulier de montrer que c'est une surface immergée.

Supposons donc que l'intégrale de la courbure moyenne est uniformément bornée sur U, ce qui est l'hypothèse du théorème 1.2.

Ceci entraîne que l'aire de $g_n(D)$ est bornée. Par ailleurs, le bord de $g_n(D)$ est inclus dans $\pi_S^{-1}(\partial U)$. Le lemme 6.8. nous assure alors que le bord de $g_0(D)$ est également inclus dans $\pi_S^{-1}(\partial U)$. Comme $\pi_S g_0(0)$ est x_0, $g_0(D)$ n'est pas réduit à un point.

Ensuite, on considère $\mathbf{CP}^1(W)$, le fibré sur E dont la fibre en tout point est l'espace des droites complexes du plan complexe W. Notre application g_n se relève alors par l'application de Gauss en une application $\bar{g}_n$ à valeurs dans $\mathbf{CP}^1(W)$. De plus en chaque point de E, $\mathbf{CP}^1(W)$ est séparé en deux hémisphères par le cercle

des droites complexes dont la projection sur TS est singulière. Or $\bar{g_n}$ ne rencontre jamais ce cercle. Le lemme 6.3. nous assure alors que $(\bar{g_n})$ converge également.

Le lemme 6.6. nous assure ensuite que g_0 est bien une immersion.

La suite de la démonstration revient alors à montrer que $g_0(D)$ est soit un graphe d'immersion isométrique, soit inclus dans une surface de pli.

2 Courbure de Lipschitz-Killing prescrite

Nous allons montrer que de nombreux problèmes à courbure de Lipschitz-Killing prescrite sur les surfaces, en particulier le problème de Minkowski, mais aussi le problème de Monge-Ampère et celui des plongements radiaux (cf [O], [D]) s'interprètent en terme de courbes pseudo-holomorphes. On s'interessera ici au problème suivant qui contient les cas cités:

Problème (A). *Soit M une variété riemanienne orientée de dimension 3, et g une fonction définie sur $U(M)$, le fibré unitaire de M, et strictement supérieure à la fonction courbure sectionnelle k. On cherche alors une surface orientée, dont la courbure en tout point x vaille $g(n)$, n étant la normale orientée en ce point.*

On remarquera que de telles surfaces sont nécessairement localement convexes, grâce à nos hypothèses sur k.

La traduction pseudo-holomorphe nous a été utile dans [L2], où nous l'avons appliqué au problème de Minkowski dans les variétés hyperboliques.

Le problème de Minkowski dans l'espace euclidien s'énonce ainsi: Quelles fonctions sur la sphère sont obtenues en poussant la fonction courbure d'une surface immergée par l'application de Gauss? Lorsque nous nous intéressons aux fonctions positives, c'est-à-dire aux surfaces convexes, ce problème une solution dont l'énoncé est simple et élégant ([N] et dans un autre cadre [Po]):

Théorème. (Nirenberg,Alexandrov,Pogorelov) *Il existe une surface convexe solution du problème de Minkowski pour une fonction k positive définie sur la sphère S^2, si et seulement si*

$$\int_{S^2} \frac{u}{k} ds = 0,$$

où u est le vecteur position sur la sphère et ds l'élément d'aire. De plus une telle surface est unique à translation près.

Nous nous sommes intéressés à un problème analogue dans le cadre des variétés hyperboliques. La solution de ce problème nous a permis d'étudier les surfaces à courbure de Gauss constante de ces variétés. Enonçons ce problème:

Soit M une variété hyperbolique géométriquement finie et sans cusp, c'est-à-dire à coeur de Nielsen N compact. La variété $M \setminus N$ est alors la réunion finie de variétés (voir [T]) B_i homéomorphe à $S_i \times \mathbf{R}$, où les S_i sont les surfaces de Riemann compactes qui sont les composantes connexes du bord M_∞ de M à l'infini.

Dans une telle variété ou plus généralement dans un *bout géométriquement fini* B (voir [L2]) associé à une lamination géodésique mesurée, dont le bord à l'infini est B_∞, se pose naturellement un problème de Minkowski.

Soit en effet S, une surface convexe lisse incompressible dans B, on définit l'application de Gauss ϕ de S dans B_∞ en associant à tout point de S la géodésique normale en ce point (figure 2).

Figure 2

On associe donc à toute telle surface convexe S une fonction $F(S)$ sur B_∞ donnée par

$$(*) \qquad F(S) = k \circ \phi^{-1}$$

où k est la fonction courbure de S. Le problème que nous considérons est, étant donné une fonction k sur B_∞, de résoudre $(*)$.

Notre résultat est le suivant

2.1 Théorème. *Soit k une fonction C^∞ sur B_∞ á valeurs dans $]-1,0[$. Il existe alors une unique surface convexe S incompressible dans B, telle que*

$$k = F(S)$$

Ce résultat est, pour le problème de Minkowski, l'analogue du résultat de M.S.Berger ([Br]) pour le problème de Nirenberg:

Théorème. (M.S.Berger) *Toute fonction négative sur une surface de Riemann de genre au moins 2 est la courbure d'une unique métrique conforme á une métrique donnée.*

En appliquant notre résultat au cas où k est une fonction constante, on en déduit l'existence et l'unicité d'une surface S_k à courbure constante k. Un exemple bien connu de cette situation est le cas où M est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe fuchsien: les surfaces équidistantes de l'hyperplan de symétrie sont alors à courbure constante et de plus forment un feuilletage.

2.2 Traduction pseudo-holomorphe.

Revenons au problème sous sa forme géneral, et montrons

2.3 Lemme. *Il existe une structure presque complexe sur un sous-fibré W du fibré tangent à $U(M)$, telle que les champs de vecteurs normaux unitaires $N(S)$, aux surfaces S solutions de (A) soient des courbes pseudo-holomorphes tangentes à W.*

La structure conforme induite est alors celle donnée par la deuxième forme fondamentale. Enfin, il existe une métrique hermitienne sur W telle que l'aire d'une courbe pseudo-holomorphe est l'intégrale de la courbure moyenne de la surface sous-jacente.

Preuve: $U(M)$ est un fibré sur M muni d'une connexion qui se déduit de la connexion de Levi-Civita sur M. Grâce à cette connexion le fibré tangent à $U(M)$ en un point n se décompose en

$$T_nU(M) = P \oplus TM,$$

où P est le plan orthogonal à n. Remarquons que P étant orienté, il est muni naturellement d'une structure complexe J_0. Le sous fibré W est alors en tout point n de $U(M)$ donné à l'aide de cette décomposition par

$$W(n) = P \oplus P.$$

Il est facile de vérifier qu'une surface tangente à W dont la projection sur M est régulière est un champ de vecteurs normaux $N(S)$ à une surface S de M.

Dans cette décomposition, l'espace tangent à une telle surface $N(S)$ est constitué des vecteurs de la forme $(u, A(u))$, où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale. Soit maintenant c la fonction telle que

$$c^2 = g - k.$$

On munit alors W de la structure complexe J, telle que

$$J(u, v) = (c^{-1}J_0v, cJ_0u).$$

On vérifie maintenant aisément que dire que $N(S)$ est une courbe pseudo-holomorphe entraîne

$$\det(A) = c^2,$$

c'est à dire que S est solution de (A). Enfin, si g_0 est la métrique de M, si l'on munit W de la métrique donnée par

$$g((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = c\, g_0(u_1, u_2) + c^{-1} g_0(v_1, v_2),$$

la métrique induite sur S, solution de (A), est alors la métrique

$$g_1(u, v) = \det(A)^{-1/2} tr(A) g_0(A(u), v).$$

Ceci finit de démontrer notre lemme. ∎

A nouveau comme dans l'exemple précédent, des courbes parasites tubulaires apparaissent.

2.4 Proposition. *Soit γ une géodésique de M, la surface $S(\gamma)$ de $U(M)$ constituée des vecteurs normaux a γ est une courbe pseudo-holomorphe.*

Elles apparaissent comme dégénérescence dans l'exemple déjà cité en 1.3.

3 Courbure moyenne prescrite

Soit M une variété riemannienne, $G = G^2(M)$ la grassmannienne des 2-plans orientés de M et $F \to G$ le fibré sur G dont la fibre en un point P est l'orthogonal P^o du plan P. Si S est une surface orientée immergée dans M on notera également $\Sigma(S)$ son relevé par l'application de Gauss dans G.

On se pose alors le problème suivant

Problème (B). *Soit H une section du fibré F, existe-t-il une surface S orientée et immergée dans M dont le vecteur courbure moyenne en un point x est $H(T_x S)$?*

Les surfaces minimales sont des solutions du cas particulier de ce problème correspondant à la section nulle. En dimension 3, le fibré F a une section n canonique correspondant au vecteur normal et les surfaces à courbure moyenne constante λ sont les solutions du problème pour la section λn.

Notre but est de démontrer le lemme suivant, analogue à celui sur la courbure de Lipschitz-Killing:

3.1 Lemme. *Il existe une structure presque complexe sur un sous-fibré W du fibré tangent à G, telle que les relevés $\Sigma(S)$ par l'application de Gauss d'une surface S solution de (B) soient des courbes pseudo-holomorphes tangentes à W. La structure conforme induite est alors celle de la métrique induite S.*

Preuve: G est un fibré sur M muni d'une connexion qui se déduit de la connexion de Levi-Civita sur M. Grâce à cette connexion le fibré tangent à G en un point P se décompose en

$$T_P G = Hom(P, P^o) \oplus TM,$$

où P^o est l'orthogonal à P. Remarquons que, P étant orienté, il est muni naturellement d'une structure complexe J_0. Le sous-fibré W est alors en tout point P de G donné à l'aide de cette décomposition par

$$W(P) = Hom(P, P^o) \oplus P.$$

Il est facile de vérifier qu'une surface tangente à W, dont la projection sur M est régulière, est un relevé $\Sigma(S)$ d'une surface S de M.

Dans cette décomposition, l'espace tangent à une telle surface $\Sigma(S)$, est constitué des vecteurs de la forme $(u, A(u))$, où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale.

Nous allons construire à l'aide de H (la section de F associée à notre problème) une structure presque complexe sur W. Pour cela soit u un vecteur de P, nous pouvons lui associer l'élement $B(u)$ de $Hom(P, P^o)$ défini par

$$B(u) : v \to g(J_0 u, v) H(P).$$

Ceci nous permet de définir l'endomorphisme J de W dans lui-même donné par

$$J(A, u) = (A \circ J_0 + B(u), J_0 u),$$

dont on vérifie aisément qu'il a les propriétés requises. ∎

Les courbes pseudo-holomorphes parasites sont maintenant incluses dans la fibre, et correspondent à l'apparition de singularités sur notre surface.

4 Applications harmoniques de surfaces

Rappelons que si f est une application différentiable d'une variété riemanienne (S, g) dans une variété riemanienne (M, h), on peut définir l'énergie de f comme

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_S \|Df\|^2 v_g$$

Les points critiques de l'énergie sont, par définition, les *applications harmoniques*. Ces points critiques sont ceux qui vérifient l'équation suivante:

$$trace(\nabla Df) = 0.$$

On considére ici ∇Df comme une 2-forme sur TS à valeurs dans TM, définie par

$$\nabla_X Df(Y) = \nabla^M_{Df(X)} Df(Y) - Df(\nabla^S_X Y),$$

oú X et Y sont deux champ de vecteurs de S, et ∇^M (resp. ∇^S) désigne la connexion de Levi-Civitá de M (resp. S). La trace est prise relativement à g.

Dans le cas où S est une surface, l'énergie est en fait invariante conforme. Notons maintenant $E = J^1(S, M)$ l'espace des 1-jets d'applications de S dans M. On peut donc maintenant associer á toute application f de S dans M une surface $\Sigma(f)$ dans E.

On montre maintenant aisément la proposition suivante

4.1 Lemme. *Il existe une structure presque complexe sur un sous fibré W du fibré tangent à E, tel que le relevé $\Sigma(f)$ d'une application harmonique f, soit une courbe pseudo-holomorphe tangente à W. La structure conforme induite est alors celle de la métrique de S.*

Preuve: E est un fibré sur $M \times S$ muni d'une connexion qui se déduit des connexions de Levi-Civita sur $M \times S$. Un point g de E est la donnée d'un point s de S, d'un point m de M et d'une application linéaire L de T_sS dans T_mM. Grâce à la connexion le fibré tangent à E en un point g se décompose en

$$T_gE = TS \oplus TM \oplus Hom(TS, TM).$$

L'espace tangent à $\Sigma(f)$ est constitué des vecteurs de la forme

$$(u, Df(u), \nabla_u Df).$$

On considère donc le sous-fibré W dont la fibre en $g = (s, m, L)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(u, L(u), H)$. Si J_0 est la structure complexe de S, la structure complexe à construire sur W est celle donnée par

$$J(u, L(u), H) = (J_0u, L(J_0u), H \circ J_0),$$

dont on vérifie aisément qu'elle a toutes les propriétés requises. ∎

5 Equations non linéaires elliptiques du deuxième ordre

Soit donc S une surface et considérons $E = T^*S \times \mathbf{R}$ l'espace des 1-jets de fonctions de S dans $\mathbf{R}$. Soit maintenant F une fonction de E dans $\mathbf{R}$. Nous allons montrer

5.1 Lemme. *Il existe une structure complexe J_F sur le sous fibré d'holonomie W, telle que $\Sigma(f)$, le graphe du 1-jet d'une fonction f, soit pseudo-holomorphe si et seulement si, la fonction f est solution de l'équation*

$$\Delta(f) = F(j^1(f)).$$

Preuve: L'espace tangent à E se décompose, à l'aide de la connexion, en

$$TE = TS \oplus T^*S \oplus \mathbf{R},$$

Considérons alors le sous-fibré d'holonomie W consitué des vecteurs de la forme $(u, \omega, g(u))$ au point g de E où u est un vecteur tangent à S et ω un vecteur cotangent et munissons le de la structure complexe

$$J_F(u, \omega, g(u)) = (J_0u, \omega \circ J_0 + F < J_0u, . >, g(J_0u)),$$

où J_0 désigne la structure complexe de S. A nouveau, cette structure presque complexe remplit bien son office. ∎

6 Appendice: convergence d'applications pseudo-holomorphes

Dans cette appendice, nous allons, d'une part rappeler le lemme de Schwarz (6.2.), qui exhibe un critère permettant de faire converger une suite d'applications pseudo-holomorphes, et d'autre part, démontrer deux lemmes (6.6. et 6.8.) qui nous permettent de décrire la limite.

Nous avons vu en 1.13. comment ces lemmes s'empilent pour démontrer le théorème 1.2.

6.1 Lemme de Schwarz. Nous allons extraire de la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov (voir [G1]) le lemme fondamental qui nous sera utile par la suite.

Nous considérons une variété E munie d'une structure presque complexe J et d'une métrique hermitienne μ. Le lemme est le suivant:

6.2 lemme de Schwarz. (Gromov) *Soit g une application pseudo-holomorphe de D, le disque unité de $\mathbf{C}$, dans E. Si $g(D)$ est incluse dans un compact de E calibré, c'est-à-dire sur lequel il existe une 1-forme β telle que, pour tout x vecteur non nul*

$$(**) \qquad d\beta(x, Jx) > 0,$$

alors g a ses dérivées à tous les ordres, à l'origine, a priori majorées.

Ce lemme est le résumé de la première partie du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov tel qu'il est exposé dans [Pa].

Dans le cas où nous nous intéressons aux courbes pseudo-holomorphes tangentes à un sous-fibré, il suffit de supposer $(**)$ vérifié pour les vecteurs tangents au sous-fibré considéré.

On peut trouver des compacts calibrés de la manière suivante: soit $F \longrightarrow E$ un fibré, muni d'une connexion, sur une variété presque complexe E et dont la fibre est kählerienne. L'espace total est alors également une variété presque complexe. Si maintenant K est un compact de la fibre , qui possède un voisinage, dans la fibre, dont le H^2 de Rham est nul, K est alors calibré. Cette remarque et le lemme de Schwarz nous permettent de montrer un lemme, utilisé implicitement dans [Pa].

6.3 lemme. *Soit $\pi : F \longrightarrow E$ un fibré, muni d'une connexion, sur une variété presque complexe E et dont la fibre est kählérienne. On munit l'espace total de la structure presque complexe induite. Soit ensuite (f_n) une suite d'applications pseudo-holomorphes de D dans F telle que*

(i) $(\pi \circ f_n)$ converge,
(ii) $f_n(D)$ est inclus dans un compact K,
(iii) K possède un voisinage U, tel que $H^2(U \cap \pi^{-1}(x))$ soit nul, pour tout x de E.

Alors les dérivées des f_n sont uniformément majorées.

En fait, dans [Pa], on montre le lemme de Schwarz pour la première dérivée et l'on applique le lemme que nous venons d'énoncer (sur la première dérivée) à l'espace des jets. Ceci permet d'amorcer la récurrence démontrant le lemme de Schwarz à tous les ordres.

6.4 Hypothèses. A l'aide du théorème d'Ascoli et du lemme de Schwarz, nous pourrons extraire des suites convergentes d'applications pseudo-holomorphes pour la topologie C^∞ sur tout compact. Il nous reste à décrire un peu mieux la limite et en particulier de nous intéresser a l'apparition de singularités et au comportement du bord. Nous nous intéresserons donc dans la suite de cette section à la situation suivante:

(i) une variété E munie d'une suite (J_n) de structures presque complexes convergeant de façon C^∞ vers J_0,

(ii) une suite (f_n) d'applications pseudo-holomorphes de D dans (E, J_n) convergeant de façon C^∞ sur tout compact vers f_0, application pseudo-holomorphe de D dans (E, J_0),

(iii) nous supposerons également que E est muni d'une suite (μ_n) de métriques hermitiennes convergeant vers μ_0.

6.5 Singularités. Considérons $G_2(E)$, la grassmannienne des 2-plans tangents à E. Si maintenant f est une immersion d'une surface S dans E, on peut lui associer une application $\bar{f}$ de S dans $G_2(E)$ qui, à un point, associe le plan tangent à l'image. Nous allons montrer le

6.6 LEMME. *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

(i) les f_n sont des immersions,

(ii) $(\bar{f}_n)$ converge,

(iii) f_0 n'est pas constante,

alors f_0 est une immersion.

Preuve: Remarquons, tout d'abord, que f_0 étant pseudo-holomorphe et non constante, ses singularités sont isolées. Nous pouvons donc supposer, pour simplifier, que f_0 est une immersion sur D moins l'origine. Nous voulons montrer que λ_0 est non nulle partout.

Considérons $g_n = f_n^* \mu_n$, les métriques induites par les f_n sur D. Nous savons que $g_n = \lambda_n g$ où g est la métrique canonnique. De même, $g_0 = f_0^* \mu_0$ est de la forme $\lambda_0 g$. Nous allons voir que λ_0 est partout non nulle."

Nous allons tout d'abord montrer que (ii) entraîne que, si k_n est la courbure de la métrique g_n, il existe une constante C telle que sur un voisinage de l'origine

$$| k_n | \leq \frac{C}{\lambda_n}.$$

Notre deuxième hypothèse peut se traduire de la manière suivante: Soient $F_n = f_n^*(TE) \longrightarrow D$ les fibrés induits par les f_n du fibré tangent à E, alors les fibrés $D_n = f_{n*}(TD)$ vus comme sous-fibrés de F_n, convergent. En particulier:

d'une part, la courbure des plans tangents aux images est uniformément bornée;

d'autre part, les deuxièmes formes fondamentales S_n de D_n dans F_n sont uniformément bornées : si u est un vecteur de D_n et v un vecteur tangent à D alors

$$\mid S_n(f_{n*}(v), u) \mid^2 \leq C\, g(v, v)\, \mu_n(u, u).$$

Ceci entraîne que si w, u sont des vecteurs tangents à l'image

$$\mid S_n(w, u) \mid^2 \leq \frac{C}{\lambda_n} \mu_n(w, w) \mu_n(u, u).$$

En combinant ces deux remarques et l'équation de Gauss pour la surface $f_n(D)$, nous en déduisons l'inégalité recherchée.

Maintenant nous savons que

$$k_n = \frac{\Delta(\log(\lambda_n))}{2\lambda_n},$$

et donc

$$\Delta(\log(\lambda_n)) \leq C.$$

Nous en déduisons que sur D moins l'origine

$$\Delta(\log(\lambda_0)) \leq C.$$

Il est alors facile de montrer à l'aide de la formule de Green que λ_0 est non nulle partout. ∎

6.7 Bord. On note dans ce paragraphe $f(\partial D)$, l'ensemble des points d'adhérence des suites $(f(x_n))$ lorsque (x_n) tend vers le bord du disque unité. Notre but est de montrer le

6.8 LEMME. *Si l'aire de $f_n(D)$ est uniformément bornée, alors $f_0(\partial D)$ est inclus dans la limite de Haussdorff des $f_n(\partial D)$.*

Montrons tout d'abord la proposition suivante:

6.9 PROPOSITION. *Fixons une métrique riemanienne auxiliaire d, on suppose que notre suite (f_n) d'applications pseudo-holomorphes vérifie de plus*

(i) $d(f_n(\partial D), f_n(0))$ est minorée par un nombre strictement positif indépendant de n,

(ii) l'aire de $f_n(D)$ est uniformément majorée.

Alors f_0 n'est pas constante.

Preuve: Raisonnons par l'absurde, si (f_n) tend vers une fonction constante alors, pour tout disque $D(r)$ de rayon r et tout ϵ strictement positif, $f_n(D(r))$ est inclus dans $B(f_0(0), \epsilon)$, pour tout n grand.

Considérons l'anneau $A(r) = D \setminus D(r)$ et notons A_0 et A_1 les deux composantes de son bord, $A_1 = \partial D$ et $A_0 = \partial D(r)$. D'après nos hypothèses, nous avons alors pour tout n grand

(iii) $d_n(f_n(0), f_n(A_0)) \leq \epsilon$

(iv) $d_n(f_n(0), f_n(A_1)) \geq \beta$

Rappelons maintenant la notion de module d'un anneau. Tout anneau métrique A est conforme à $S^1 \times [0, L(A)]$, le réel $L(A)$ est alors appelé *module* de l'anneau A. On peut également le calculer par la formule

$$(*) \qquad \frac{1}{L(A)} = \inf_{u \in B} \int_A \mid du \mid^2$$

où B désigne l'ensemble des fonctions u telles que $u \mid_{A_0} \leq 0$ et $u \mid_{A_1} \geq 1$, A_0 et A_1 désignant les deux composantes connexes du bord.

Revenons à notre anneau $A(r)$, si nous faisons tendre r vers 1 son module tend vers 0. Par ailleurs $A(r)$ est conforme à son image par f_n, et nous pouvons minorer son module à l'aide de (*): nous injectons dans la formule la fonction $u(y) = d_n(y, f_n(0))$. Son gradient ayant une norme inférieure à 1, nous obtenons pour n grand grâce à (ii),(iii) et (iv),

$$L(f_n(A(r))) \geq C(\epsilon, \beta, K).$$

Ceci nous fournit la contradiction recherchée. ∎

Nous pouvons maintenant démontrer notre lemme.

Preuve: Soit y un point de $f_0(\partial D)$, par définition il existe une suite de points (y_n) tel que $y = \lim(f_0(y_n))$. Puisque f_n converge sur tout compact vers f_0, nous pouvons supposer que pour toute suite p_n telle que $p_n \geq n$,

$$(*) \qquad y = \lim_{n \to \infty} (f_{p_n}(y_n)).$$

Munissons D de la métrique hyperbolique et supposons que les boules B_n de rayon 1 autour des y_n soient disjointes.

Maintenant puisque l'aire de $f_n(D)$ est uniformément majorée, l'aire de $f_0(D)$ est bornée et donc

$$\lim_{n \to \infty} (Aire(f_0(B_n))) = 0.$$

Il existe donc une suite p_n telle que $p_n \geq n$ et

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} (Aire(f_{p_n}(B_n))) = 0.$$

Considérons maintenant la famille g_n de transformations conformes de D telle que $g_n(0) = y_n$ et la famille d'applications pseudo-holomorphes $\bar{f}_n = f_{p_n} \circ g_n$. D'après (**), g_n tend sur tout compact vers une application constante. Par ailleurs, $g_n(D) = f_{p_n}(D)$ a une aire uniformément majorée. Notre proposition précédente nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} (d(g_n(\partial D), g_n(0))) = 0,$$

et donc que

$$\lim_{n\to\infty} (d(f_{p_n}(y_n), f_{p_n}(\partial D))) = 0.$$

r Ceci et (*) nous permettent de conclure que y appartient à $\lim(f_n(\partial D))$. ∎

[B] D. Bennequin, *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques,* Séminaire Bourbaki, exposé No 657 (Février 1986)

[Br] M.S. Berger, *Riemannian Structure of prescribed Gaussian Curvature for compact 2-Manifolds,,* J. Diff. Geom., **5** (1971), pp 325-332.

[D] P. Delanoë, *Plongements radiaux à courbure de Gauss positive prescrite,* - Ann. sci. Ec. Norm. Sup.,4e série, **18** (1985), pp.635-649

[G1] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifold,* Invent. Math.**82**, (1985), pp. 307-347

[G2] M. Gromov, *Partial Differential Relations,* Springer Verlag, Berlin 1986

[L1] F. Labourie, *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes,* J. Diff. Geom. **30**, (1989) pp 395-44

[L2] F. Labourie, *Problème de Minkowski dans les variétés hyperboliques.* , Bull. Soc. Math. Fr. **119** (1991) pp 307-325

[N] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large,* Comm. Pure Appl. Math., **6**, (1953), pp. 337-394.

[O] V.I. Oliker, *Hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{n+1}$ *with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampère type,* Comm. P.D.E., **9**, (1984), pp 807-838

[P] P. Pansu, *Notes sur la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov,* dans ce volume

[Po] A.V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces,* Israel program for scientific translation, Jerusalem (1973).

[S] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry,* Publish or Perish, Boston (1975).

[T] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds,* ch.8, mimeographic notes.