QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES COMPACTS

en l'honneur d'Eugenio Calabi

François Labourie Equipe de Topologie et Dynamique Université Paris-Sud F-91405 Orsay URA 1169 du C.N.R.S.

Le but de cet article est d'effectuer un bref survol de la question suivante : quels sont les espaces homogènes sur lesquels se modèlent des variétés compactes ? Plus précisément, si G est un groupe de Lie de dimension finie agissant effectivement et transitivement sur une variété V = G/H, nous dirons que M admet une (V, G) structure (ou est localement modelée sur (V, G)) s'il existe un atlas (U_i, φ_i) où les U_i sont des ouverts de M formant un recouvrement, chaque φ_i est un difféomorphisme de U_i sur un ouvert V_i de V, tels que pour tout i et j, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est la restriction à V_i d'un élément de G.

Il est bien connu que si V est simplement connexe, cette donnée est équivalente à celle d'une représentation ρ , appelée représentation d'holonomie, du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M à valeurs dans G, ainsi que d'une immersion φ du revêtement universel \widetilde{M} de M dans V, appelée développement, ladite immersion étant équivariante, c'est-à-dire :

$$\forall \gamma \in \pi_1(M), \ \forall x \in \widetilde{M}, \ \varphi(\gamma x) = \rho(\gamma)\varphi(x).$$

Une structure est dite complète si le développement est un difféomorphisme. Dans ce cas, $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ est un sous-groupe discret de G agissant proprement discontinuement sans point fixe sur V, et M s'identifie avec $\Gamma \backslash V$. On dira alors alternativement que V admet un quotient compact.

Nous allons nous intéresser aux deux questions suivantes :

1° Quels sont les espaces homogènes sur lesquels se modèlent des variétés compactes ?

2° Quels sont ceux qui admettent des quotients compacts?

Bien sûr cette étude n'a d'intérêt que si l'espace homogène modèle est lui-même non compact. Au-delà de son clair intérêt géométrique, signalons dès maintenant une motivation dynamique de cette étude. Autour de travaux de Robert Zimmer, puis de Mikhail Gromov, s'est dégagé le problème suivant : comprendre les actions de "gros" (dans divers sens) groupes, en particulier lorsque cette action préserve une structure géométrique. Par exemple, un résultat de Gromov assure que dans certains cas la variété est - presque - localement homogène. Nous reviendrons sur cette discussion et ces résultats plus loin (3.).

La plupart du temps, dans un souci de simplification, nous n'énoncerons que des cas particuliers de résultats généraux, et nous allons restreindre notre discussion, bien que certains des résultats présentés aient une extension en dehors de ce cadre, au cas où G est un groupe de Lie semi-simple non compact algébrique et où H est unimodulaire. Ceci se traduit par le fait que V possède une forme volume G-invariante. Dans ce cas, V est automatiquement non compacte, et nos questions ont bien un sens.

Nous avons donc exclu de notre cadre d'étude, des géométries telles que conformes plates ou affines plates, etc.

La suite de cet article se distribue naturellement en deux parties : des résultats d'existence de variétés modelées en premier lieu, puis une série d'obstructions en second lieu, dont la plus ancienne est un résultat de Calabi et Markus, qui tendent à montrer que les espaces homogènes sur lesquels se modèlent des variétés compactes sont plutôt rares. Notre but ne sera pas de donner les résultats plus généraux, mais d'essayer de faire sentir sur quelques cas particuliers les idées mathématiques - et souvent géométriques - à la base des preuves.

Cependant, malgré ces diverses réponses, l'état du problème est encore assez insatisfaisant ; ce n'est que très récemment [B] - et postérieurement à l'exposé fait danc ce colloque - que nous savons qu'il n'existe pas de quotients compacts de l'un des plus simples espaces homogènes de notre catégorie : $SL(3, \mathbf{R})/SL(2, \mathbf{R})$.

Fixons par ailleurs dès maintenant une convention : si L est un groupe de Lie, nous noterons K_L son compact maximal.

1. RÉSULTATS D'EXISTENCE

Tous ces résultats trouvent leur origine dans le théorème suivant d'A. Borel [B]:

Théorème (Borel).— Tous les espaces symétriques admettent des quotients compacts.

Autrement dit, lorsque H est compact, la réponse à notre deuxième question est affirmative. Rappelons que la condition H compact entraı̂ne l'existence d'une métrique riemannienne invariante sur V.

On peut alors construire de nouveaux quotients compacts à l'aide du procédé suivant dû à Kulkarni.

Supposons qu'un sous-groupe semi-simple L de G agisse proprement et transitivement sur V. D'après Borel, il existe donc Γ tel que $\Gamma \setminus L/K_L$ est compact $(K_L$ est le compact maximal), et dès lors, $\Gamma \setminus V$ est également compact.

Un premier exemple, trivial, de cette situation est donné par $V = G \times G/G^{\Delta}$, où G^{Δ} est le graphe de l'identité dans $G \times G$, nous pouvons alors prendre pour L le groupe $G \times \{e\}$.

De même, si nous prenons G un groupe de Lie semi-simple simplement connexe, le groupe des isométries H de G muni de sa forme de Killing est en général plus gros que G et alors G s'identifie à H/J. L'exemple de $\widehat{PSL}(2,\mathbf{R})$ qui s'identifie avec le revêtement universel de Anti-de Sitter : SO(2,2)/SO(1,2) est bien connu [Ku-Ra].

Un exemple plus intéressant est dû à Kulkarni [Ku] : l'espace homogène SO(2,2n)/SO(1,2n) s'identifie au sous-ensemble V de \mathbf{R}^{2n} constitué des 2n-uples $(X_1,X_2,X_3,\ldots,X_{2n})$ vérifiant

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 - \dots - X_{2n}^2 = 1$$
.

Considérons maintenant \mathbb{R}^{2n} comme \mathbb{C}^n , V est alors l'ensemble des n-uples

$$(z_1,\ldots,z_n)$$

tels que

$$z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 - \dots - z_n\bar{z}_n = 1$$

sur lequel SU(1,n) agit proprement et transitivement.

Dans [Ko1], T. Kobayashi a traduit au niveau des algèbres de Lie la condition sur L, et a produit toute une liste de triplets (L, G, H) correspondant à cette situation.

Il est possible maintenant d'essayer de déformer Γ qui a priori est un sous-groupe de L, dans G, ou plus généralement, d'essayer de déformer la structure localement homogène sur M. C'est ce qu'a fait W. Goldman dans le cas de SO(2,2)/SO(1,2). Il a ainsi produit des variétés compactes modelées sur cet espace homogène telles que l'image de la représentation est Zariski dense, et en particulier n'est pas incluse dans un sous-groupe algébrique propre de G [Go].

Se basant sur une idée de Carrière dans le cas plat [Ca], à laquelle il est fait allusion dans [M], Klingler [Kl] a montré en particulier que ces exemples sont nécessairement complets. Ce sont ainsi, pour le moment, les seuls exemples de quotients compacts $\Gamma \backslash G/H$ où G est semi-simple, H unimodulaire, et Γ Zariski dense.

2. OBSTRUCTIONS

Nous allons présenter une série d'obstructions qui empêchent l'existence de variétés compactes modelées sur un espace homogène, ou celle de quotients compacts. Ces obstructions résultent de plusieurs approches.

La première approche est topologique, il s'agit d'étudier la propreté de l'action des groupes discrets infinis sur un espace homogène, elle remonte à Calabi et Markus, elle se sépare elle même en deux temps : étudier les actions propres de \mathbf{Z} ,([C-M], [Ko1] et [Ku]), puis celle des groupes libres, et c'est le très récent article de Benoist [B]. La deuxième approche repose sur une utilisation de classes caractéristiques. La troisième approche utilise des résultats issus de la théorie ergodique, et nous nous étendrons un peu sur ses motivations.

2.1 - Actions propres de groupes infinis

2.1.1 - Après le phénomène de Calabi-Markus. En 1963, E. Calabi et L. Markus se sont intéressés aux espaces relativistes (c'est-à-dire munis d'une métrique lorent-zienne) à courbure constante [C-M]. Ils ont montré le

Théorème (Calabi-Markus).— Les seuls sous-groupes discrets de SO(1, n) agissant proprement sur l'espace de Sitter SO(1, n)/SO(1, n-1) sont finis. En particulier, ces espaces n'admettent pas de quotients compacts.

Ce "phénomène de Calabi-Markus" a ensuite été élargi à d'autres situations par J. Wolf et R.S. Kulkarni [Wo], [Ku]. Plus récemment, T. Kobayashi, en poursuivant dans cette direction, a démontré le théorème suivant dont la première étape est la généralisation de ce phénomène [Ko2].

Théorème (T. Kobayashi).— Soient G un groupe semi-simple, H un sous-groupe réductif. Supposons qu'il existe un sous-groupe L réductif tel que

- (i) $L \subset K_G \cdot H \cdot K_G$
- (ii) d(L) > d(H)

où d(G) désigne la dimension de l'espace symétrique associé. Alors G/H n'admet pas de quotient compact.

La condition (i) a une traduction simple au niveau des algèbres de Lie, en termes de sous-groupes de Cartan.

La preuve repose sur le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme.— Supposons que L, G, H vérifient (i), alors si Γ agit proprement sur G/H, Γ agit également proprement sur G/L.

Un corollaire de ce lemme contient exactement la généralisation du phénomène de Calabi-Markus.

Corollaire.— Si les rangs réels de G et H coïncident et G est de centre fini, alors seuls les groupes finis agissent proprement sur G/H.

En effet, si Γ agit proprement sur G/H, d'après la décomposition d'Iwasawa et le lemme précédent, Γ agit proprement sur G/G qui est réduit à un point. T. Kobayashi montre également la réciproque de ce corollaire.

Pour déduire le théorème du lemme, il utilise la notion de la dimension cohomologique d'un groupe discret Γ . Celle-ci vérifie les deux conditions suivantes.

(i) Si Γ agit proprement discontinuement sans points fixes sur ${\bf R}^N \times M$ où M est une variété compacte, alors

$$cd(\Gamma) \leq N$$

(ii) de plus, si $\Gamma \backslash \mathbf{R}^N \times M$ est compact, alors

$$cd(\Gamma) = M$$
.

Dans notre cas G/H est difféomorphe à $\mathbf{R}^{d(G)-d(H)} \times K_G/K_H$, le lemme et l'inégalité (ii) nous donnent alors une paire d'inégalités contradictoires sur la dimension cohomologique de Γ .

Dans ce même article, T. Kobayashi exhibe toute une série de triplets (L, G, H) vérifiant les conditions de son théorème.

2.1.2 Actions propres de groupes libres

Après que cet exposé ait eu lieu, Yves Benoist [B] a complètement caractérisé les espaces homogènes réductifs sur lesquels agissent proprement des groupes libres à deux générateurs. Il en a déduit de nouvelles obstructions à l'existence de quotients compacts.

Précisons quelques notations. Soient A_H un sous-espace de Cartan de H, A un sous-espace de Cartan de G contenant A_H , A^+ un choix de chambre de Weyl fermée, ι l'involution d'opposition de A^+ (pour a dans A^+ , $\iota(a)$ est l'unique élément de A^+ conjugué à a^{-1}) et B^+ l'ensemble des points fixes de ι .

Théorème (Y. Benoist).— Avec ces notations, G contient un sous-groupe discret Γ non virtuellement abélien qui agit proprement sur G/H si et seulement si pour tout choix de chambre de Weyl A^+ , A_H ne contient pas B^+ .

Dans ce cas, on peut choisir Γ libre et Zariski dense.

La preuve de ce théorème repose en partie sur une étude fine de la projection sur la chambre de Weyl du produit de deux éléments. De ce résultat, Yves Benoist déduit le

Corollaire.— Si pour tout choix de chambre de Weyl A^+ , A_H ne contient pas B^+ , G/H n'admet pas de quotients compacts

En particulier, $SL(2n+,\mathbf{R})/SL(2n,\mathbf{R})$ n'admet pas de quotients compacts non plus que d'actions propres de groupes libres, alors que SL(2n)/SL(2n-1) admettent de telles actions. Il est à remarquer que de nombreux exemples dont on sait par ailleurs qu'ils n'admettent pas de quotients compacts admettent par ce résultat des actions propres de groupes libres. Ce phénomène était bien connu pour les espaces affines.

En conclusion, remarquons que cette idée - étude des actions propres de groupes discrets - vaut pour l'étude des quotients compacts, mais pas pour ceux des variétés compactes modelées. A part les résultats de Carrière, étendus par Klingler, on ne connait que très peu de choses sur la complétude des espaces homogènes.

2.2 - Classes caractéristiques.

Dans cette approche, la contradiction va être obtenue grâce à des classes caractéristiques dont on montrera qu'elles sont à la fois triviales et non triviales.

2.2.1.- La classe d'Euler.

Voici exposée schématiquement et inspirée du principe de proportionnalité de Hirzebruch, une méthode due à T. Kobayashi et K. Ono, permettant d'exhiber des classes caractéristiques non triviales sur des variétés homogènes modelées sur G/H [K-O].

Supposons H semi-simple. Nous pouvons associer à G/H un espace symétrique compact G_u/H_u de la manière suivante.

On considère G_u la forme réelle (le compact maximal) du complexifié $G_{\mathbf{C}}$ de G, et H_u le sous-groupe $G_u \cap H_{\mathbf{C}}$.

De façon plus terre à terre, ceci revient à intervertir formellement des + et des -, un peu à la manière dont Gauss avait construit l'espace hyperbolique à partir de la sphère.

Tout ceci étant purement formel, les formes G_u -équivariantes sur G_u/H_u donnent naissance à des formes G-équivariantes sur G/H et vice-versa, de telle sorte que la cohomologie des formes G-équivariantes sur G/H, $H^{*G}(G/H)$ s'identifie à la cohomologie des formes G_u -équivariantes sur G_u/H_u , $H^{*G_u}(G_u/H_u)$.

Le groupe G_u étant compact, supposons le de plus connexe, $H^{*G_u}(G_u/H_u)$ représente toute la cohomologie de G_u/H_u , $H^*(G_u/H_u)$. Enfin, si M est une variété modelée sur G/H, $H^{*G}(G/H)$ s'envoie naturellement dans $H^*(M)$. De plus, puisque G/H admet une forme volume invariante, si M est compacte, la dualité de Poincaré - ici en fait, la formule de Stokes suffit - fait que $H^{*G}(G/H)$ s'injecte dans $H^*(M)$.

Si maintenant H est semi-simple, le fibré $G \to G/H$ est muni d'une connexion dont formellement les classes caractéristiques s'identifient à celles du H_u fibré principal $G_u \to G_u/H_u$. Le trajet décrit précédemment permet de conclure que si une classe caractéristique de ce dernier fibré - ou de tout fibré associé - est non nulle, la classe caractéristique du fibré correspondant sur M est non nulle.

Appliquons ce raisonnement à la classe d'Euler. Il est connu depuis longtemps que $\chi(R/S)$ est non nulle si et seulement si le rang de R et celui de S sont les mêmes, lorsque R est compact.

Nous en déduisons donc que si le rang de G et celui de H sont égaux, $\chi(M)$ est non nul pour M modelée sur G/H.

Ainsi nous avons les deux obstructions suivantes.

Théorème (Kobayashi-Ono [K-O]).— Soient G un groupe semi-simple, H un sous-groupe semi-simple de même rang. Si la dimension de $K_G/K_G \cap H$ est impaire, alors il n'existe pas de variété compacte modelée sur G/H.

En effet, si $\dim(K_G/K_G \cap H)$ est impaire, le fibré tangent à M peut se décomposer en somme de deux fibrés dont l'un est de dimension impaire. La caractéritique d'Euler de M est donc nulle, ce qui amène la contradiction.

Ce critère s'applique par exemple à $SO(i+k,j+\ell)/SO(i,j)\times SO(k,\ell)$ lorsque - un et un seul - des i,j,k, et $\ell,$ est pair, de même

Théorème (Kobayashi [Ko1]).— Si G est un groupe semi-simple, H un sous-groupe semi-simple de même rang, si enfin le rang de K_G et celui de K_H diffèrent, alors G/H n'admet pas de quotient compact.

Rappelons que G/H est difféomorphe à $\mathbf{R}^{d(G)-d(H)} \times K_G/K_G \cap H$, si $M = \Gamma \backslash G/H$ est un quotient compact, une application simple de la suite spectrale pour les fibrés donne que

$$\chi(M) = \chi(\Gamma) \cdot \chi(K_G/K_H).$$

D'après notre deuxième hypothèse, $\chi(K_G/K_H)$, et donc $\chi(M)$, est nulle, ce qui nous donne notre contradiction.

Ceci s'applique à $SO(i+j,k+\ell)$, $SO(i,j)SO(k,\ell)$ dans le cas où $jk\ell$ est impair.

2.2.2.- Forme de courbure de fibrés en droites.

Une autre approche du même type repose sur l'étude des fibrés en droites sur l'espace homogène modèle. Grâce à cette étude Y. Benoist et moi-même avons obtenu par exemple le résultat suivant [B-L1].

Théorème (Y. Benoist-F. Labourie).— Soient G un groupe semi-simple, H un sous-groupe unimodulaire, s'il existe un élément hyperbolique non nul dans l'algèbre de Lie du centre de H, alors aucune variété compacte n'est modelée sur G/H.

Un élément X de l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple est dit hyperbolique si $ad(\chi)$ est diagonalisable sur \mathbf{R} .

Ce résultat s'applique par exemple aux espaces $SL(n, \mathbf{R})/\exp(\mathbf{R}\Delta)$. Pour un tel élément X notons Z(X) le sous-groupe de G qui centralise X:

$$Z(X) = \{g \in G, \quad Ad(g)X = X\}.$$

Ce sous-groupe Z(X) se décompose naturellement en $Z(X) = \mathbf{R} \times H(X)$ où \mathbf{R} est ici le groupe à 1 paramètre engendré par $\exp(tX)$. En particulier, à chaque élément hyperbolique non nul X de \mathfrak{g} est associé un fibré en droites réelles $E_X : G/H(X) \to G/Z(X)$.

Le point de départ de notre travail est alors la remarque suivante : ce fibré E_X est muni d'une connexion naturelle. En effet, la 1-forme duale sur \mathfrak{g} de X par la forme de Killing descend en une 1-forme sur G/H(X) qui possède les qualités d'une connexion. La courbure ω_X de cette connexion est une forme symplectique.

Il est alors évident qu'aucune variété compacte ne peut être modelée sur G/Z(X).

En effet, ce fibré E_X étant G-équivariant, il donne naissance à un fibré en droite réelle sur M, fibré dont la forme de courbure - modelée sur ω_X - est symplectique. Or la forme de courbure d'un fibré en droite réelle est exacte : le fibré admettant une section jamais nulle - après éventuellement un revêtement fini ; la courbure est la différentielle de la 1-forme de connexion associée à une section. Or une forme symplectique sur une variété compacte ne peut jamais être exacte ; rappelons-en, pour la suite, la raison : si $\omega_X = d\beta$, alors la forme volume $\Omega = \omega_X^{\wedge d}$ est la différentielle de $\beta \wedge \omega_X^{d-1}$.

Si maintenant H est inclus dans Z(X), - ou alternativement, si X appartient à l'algèbre de Lie du centralisateur de H - grâce à la submersion $G/H \to G/Z(X)$, on induit du fibré E_X un fibré \widehat{E}_X sur G/H, puis un fibré sur M.

La forme de courbure de ce fibré en droite est toujours exacte, par contre elle n'est plus symplectique. La forme de courbure $\widehat{\omega}_X$ de \widehat{E}_X sur G/H possède un noyau intégrable, dont les feuilles du feuilletage associé correspondent par construction aux fibres de la submersion $G/H \to G/Z(X)$. Si de plus, H est unimodulaire, il existe

une forme μ_X sur G/H, G-équivariante, dont la restriction à ces fibres est volume. La forme volume Ω de G/H est alors $\mu_X \wedge \omega_X^{\wedge d}$. Par G-équivariance, toutes ces formes donnent naissance à des formes, que nous noterons de la même manière, sur M.

Nous voulons à nouveau montrer que Ω est exacte. Mais maintenant,

$$d(\beta \wedge \omega_X^{\wedge d-1} \wedge \mu) = \Omega + \beta \wedge \omega_X^{\wedge d-1} \wedge d\mu_X.$$

Le cœur de la démonstration, sur laquelle nous n'allons pas maintenant nous étendre davantage, est de démontrer que grâce au fait que le centre de H possède un élément hyperbolique dans son algèbre de Lie, nous pouvons choisir un élément X hyperbolique dans l'algèbre de lie du centralisateur de H tel que

$$d(\mu_X) \wedge \omega_X^{d-1} = 0.$$

3. UNE APPROCHE DYNAMIQUE

Notre étude a une motivation d'origine plus dynamique. Une conjecture floue, issue des travaux de Zimmer, est que les "grosses" actions (par exemple ergodiques, topologiquement transitives) de "gros" groupes (par exemple de rang réel plus grand que 2) sont essentiellement géométriques.

On espère de même que les structures géométriques ayant un gros groupe d'isométries sont classifiables, comme le suggère le théorème de Lelong-Ferrand, Obata [L][O] qui montre qu'une variété conforme ayant un groupe de transformations conformes non compact est conformément équivalent à la sphère. De même, après les travaux de d'Ambra [d'A], on pense que les variétés lorentziennes ayant un groupe non compact d'isométries sont rares. S'y rattachent aussi les travaux sur les flots d'Anosov de [Gh][Ka][B-F-L][B-L2]. Un rapport sur ces questions se trouve dans [d'A-G].

Une étape de cette classification est un résultat de Gromov montrant q'une "grosse" action préservant une structure géométrique est localement homogène.

La dernière étape est alors de comprendre les structures localement homogènes ayant un gros groupe d'isométries, ce à quoi vont se rattacher les résultats présentés maintenant.

Précisons à nouveau nos idées. Que signifie un "gros" groupe à une action essentiellement géométrique ? Le prototype d'un résultat de cette nature est très certainement la profonde généralisation par R. Zimmer de la super-rigidité de Margulis :

Théorème (Super-rigidité de Zimmer [Z1][Z2]).— Soit $E \to M$, un fibré principal de groupe structural H sur une variété compacte M.

Soit G un groupe de Lie de rang réel plus grand que 2. On suppose que G agit continuement sur E par automorphismes du fibré - c'est-à-dire commutant avec H - et que l'action quotient sur M préserve une mesure finie ergodique μ .

Alors G préserve une "connexion mesurable plate" sur E_K , le H/K_H fibré associé, c'est-à-dire qu'il existe

- (i) une section mesurable σ du fibré E
- (ii) une représentation ρ de G dans H

telles que, si π est la projection naturelle de E sur E_K , alors pour μ presque tout x, et tout g de G

$$\pi\sigma(g\cdot x) = \pi(\rho(g)\cdot g\cdot \sigma(x))$$
.

La terminologie "connexion mesurable plate" s'explique par le fait qu'une connexion plate peut être définie par le faisceau des sections plates, la condition d'invariance par un groupe, se traduisant par l'apparition d'une holonomie - ici ρ .

Nous avons préféré cette terminologie et la présentation en termes de fibrés - par rapport au langage des cocycles - pour son attrait géométrique.

Signalons enfin que le véritable théorème de Zimmer est dans un cadre entièrement mesurable [Z1] - les actions sont mesurables, M est un espace de Lebesgue - mais il faut alors rajouter une hypothèse qui sort un peu du cadre de cet exposé mais dont R. Zimmer [Z2] a démontré qu'elle était verifiée dans le cas des actions continues.

Si ce résultat de Zimmer démontre que dans certains cas les actions sont géométriques, un théorème de Gromov [Gr] montre que des actions géométriques suffisamment grandes proviennent nécessairement d'une structure localement homogène.

Théorème (Gromov).— Soit M une variété munie d'une connexion - ou plus généralement d'une A-structure rigide - telle que le pseudo groupe préservant cette connexion a une orbite dense, alors celle-ci est ouverte.

Une orbite du pseudo-groupe préservant la connexion est constituée de points x, y tels qu'il existe un difféomorphisme préservant la connexion d'un voisinage de x sur un voisinage y.

Une orbite ouverte est donc "localement homogène". Attention, elle n'est pas toujours modelée sur un espace homogène ; en effet, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs préservant la connexion et s'annulant en un point, qui a vocation à être l'algèbre de Lie du sous-groupe d'isotropie, ne correspond pas nécessairement à un sous-groupe fermé du groupe associé à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs préservant la connexion [L-T].

La situation, après ces deux théorèmes, est la suivante : d'une part, les actions de gros groupes préservent une géométrie mesurable (Zimmer), d'autre part, si une grosse action de groupes préserve une géométrie lisse, celle-ci est automatiquement homogène. Bien sûr, à ce stade il serait très intéressant de montrer que cette géométrie mesurable est lisse, point sur lequel nous reviendrons plus tard.

Dans ce contexte, un problème naturel est de comprendre les variétés compactes modelées sur un espace homogène, et qui possèdent un important groupe d'isométries.

Dans le cas d'une variété compacte M modelée sur G/H, tout groupe J commutant avec H va agir sur M. En effet, J agit alors à droite sur G/H, et l'algèbre de Lie des champs de vecteurs est G-invariante. Ainsi, on obtient sur M une algèbre de Lie des champs de vecteurs isomorphe à celle de J, qui en s'intégrant, puisque M est compacte, donne l'action d'un groupe isogène à J.

Les deux résultats que nous allons présenter maintenant tirent partie de la présence d'un important centralisateur pour H. A nouveau, rappelons qu'il ne s'agit ici que de cas particuliers de résultats plus généraux, cas dont nous espèrons que la preuve est plus transparente.

Théorème (F. Labourie-S. Mozes-R. Zimmer) [L-M-Z]. — Soient G un groupe simple algébrique, H un sous-groupe algébrique unimodulaire. On suppose qu'il existe un sous-groupe J de G tel que

- (i) J est semi-simple et contient un sous-groupe simple de rang réel plus grand que 2 ;
 - (ii) J commute à H;
 - (iii) il n'existe pas de représentations injectives de J dans H.

Alors, aucune variété compacte n'est modelée sur G/H si H est non compacte.

Ce critère s'applique par exemple à $SL(5, \mathbf{R})/SL(2, \mathbf{R})$, le groupe $SL(3, \mathbf{R})$ jouant le rôle de J.

Nous allons expliquer le début de la démonstration pour expliquer comment intervient la super-rigidité de Zimmer.

Nous avons bien sûr un H-fibré principal E naturel sur M: celui qui est modelé sur le fibré $H \to G \to G/H$. Par G-équivariance, l'action de J sur M décrite plus haut se relève en automorphismes du fibré E.

Par ailleurs, H étant unimodulaire, l'action de J sur M va préserver une mesure de Lebesgue.

Nous allons montrer rapidement comment la mesure de Lebesgue de E va se décomposer en somme de mesures finies et invariantes sous J. Tout d'abord, décomposons la mesure de Lebesgue m de M en somme de mesures finies ergodiques : $m = \int m_e de$. Supposons, pour simplifier, J simple.

Pour chacun des m_e , nous pouvons alors appliquer la super-rigidité de Zimmer et obtenir une section σ_e du fibré E - pour simplifier, nous supprimons $K \dots$ -, section invariante sous l'action de J puisqu'il n'y a pas de représentation non triviale de J dans H. Cette section σ_e peut être conçue comme une métrique invariante mesurable sur le fibré E. Par construction, la mesure $\mu_e = (\sigma_e)_*(m_e)$ est finie et invariante par J, de même le sont les mesures $\mu_e^h = h_*\mu_e$.

Par le théorème de Fubini, la mesure de Lebesgue m_e de E n'est rien d'autre que $\int \mu_e^h dedh$ où dh est la mesure de Haar de H.

La deuxième étape que nous n'allons pas développer ici consiste à démontrer, grâce au théorème de Birkhoff et un argument classique de contraction dilatation analogue à celui de la preuve du théorème de Moore, qu'en fait, m_e est finie. La mesure de Haar dh de H sera alors finie et H sera compact.

En somme, la super-rigidité de Zimmer sert ici à produire une géométrie supplémentaire : cette section σ_e . C'est également le point de départ du théorème suivant de R. Zimmer. Le résultat précédent en est un descendant car, avec sa méthode, R. Zimmer le démontrait pour le cas des quotients compacts dans le cas J simple.

Théorème (R. Zimmer [Z3]).— Soient G un groupe simple, H un sous-groupe algébrique unimodulaire. On suppose qu'il existe un groupe J tel que

- (i) J est simple et de rang réel plus grand que 2 ;
- (ii) J commute à H.

Supposons maintenant qu'il existe un quotient compact $\Gamma \backslash G/H$ de G/H tel que l'action de J y soit ergodique. Alors il existe un groupe L agissant proprement et transitivement sur G/H tel que Γ soit un réseau cocompact de L.

Autrement dit, nous sommes ramenés à la construction remarquée par Kulkarni. Ce résultat s'applique par exemple à $SL(n, \mathbf{R})/SL(n-3, \mathbf{R})$ pourvu que l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ sur le quotient compact soit ergodique. Le problème est ensuite d'examiner le problème - algébrique - de l'existence de L.

Comme précédemment, on applique la super-rigidité de Zimmer pour obtenir une section σ_e du fibré E. A nouveau, nous pouvons pousser, grâce à σ_e , la mesure de Lebesgue m de $\Gamma \backslash G/H$ pour obtenir une mesure \widetilde{m} finie sur Γ / G - à un compact près -. Cette mesure est invariante sous le groupe que nous noterons J' image par J du morphisme $i \cdot \rho$, où i est l'injection de J dans G, et ρ la représentation d'holonomie apparaissant dans la super-rigidité de Zimmer.

La nouvelle idée est maintenant d'utiliser un cas particulier du remarquable théorème mesurable de M. Ratner [R].

Théorème (Ratner).— Soient G un groupe simple, Γ un sous-groupe discret, \widetilde{m} une mesure finie sur $\Gamma \backslash G$ invariante sous un groupe simple J et ergodique, alors il existe un groupe L, tel que \widetilde{m} soit la mesure de Haar portée par une orbite de L.

Dans notre cas, nous en déduisons, par des arguments topologiques standards, que cette orbite de L fibre - avec des fibres compactes - sur $\Gamma \backslash G/H$, et que Γ est un réseau cocompact de L.

Une des manières de voir l'intervention du théorème de Ratner est la suivante : grâce à lui, la géométrie obtenue par le théorème de super-rigidité - cette mesure \widetilde{m} est lisse. D'une manière générale, la théorie ergodique permet d'obtenir de nouvelles structures mesurables invariantes sur un espace localement homogène. Démontrer que ces structures mesurables sont lisses permettrait alors d'appliquer le théorème de Gromov et obtenir ainsi une nouvelle structure homogène, plus fine (dans le résultat précédent L). Cette démarche est certainement prometteuse, mais passer du mesurable au lisse est une véritable gageure.

Enfin - et c'est encore un ajoût par rapport à l'exposé initial - en travaillant dans cette direction R. Zimmer et moi-même avons montré [L-Z]

Théorème (Labourie-Zimmer).— Si m est supérieur ou égal à 2, et n à m+3, alors $SL(n, \mathbf{R})/SL(m, \mathbf{R})$ n'a pas de quotients compacts.

Références

- [B] BENOIST, Y.: Actions propres de groupes libres sur les espaces réductifs, prépublication (1994).
- [B-F-L] BENOIST, Y. FOULON, P. LABOURIE, F. : Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables, J. Am. Math. Soc. 5 (1992), 33-74.
 - [B-L1] BENOIST, Y. LABOURIE, F. : Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **76** (1992), 99-109.
 - [B-L2] BENOIST, Y. LABOURIE, F. : Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math. 111 (1993), 285-308.
 - [B] BOREL, A.: Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963), 111-112.
 - [C-M] CALABI, E. MARKUS, L. : Relativistic space forms, Ann. Math. **75** (1963), 63-76.

- [Ca] CARRIÈRE, Y. : Autour de la conjecture de Markus, Inv. Math. 95 ((1989), 615-628.
- [d'A] d'AMBRA, G.: Isometry groups of Lorentz-manifolds, Inv. Math. **92** (1988), 555-565.
- [d'A-G] d'AMBRA, G. GROMOV, M. : Lectures on transformations groups : geometry and dynamics. Collections : Surveys in Differential Geometry. (Cambridge, MA, 1990), 19-111.
 - [Gh] GHYS, E.: Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **20** (1987), 251-270.
 - [Go] GOLDMAN, W.M.: Nonstandard Lorentz space forms, J. Diff. Geom. 21 (1985), 301-308.
 - [Gr] GROMOV, M.: Rigid tranformation groups, in Bernard, D. Choquet-Bruhat, Y. (Eds.), Géométrie différentielle, Hermann, Paris (1988).
 - [Ka] KANAI, M.: Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, Erg. Th. Dyn. Syst. 8 (1988), 215-240.
 - [KI] KLINGLER, K.: Complétude des variétés Lorentziennes à courbure constante, prépublication (1994).
 - [Ko1] Kobayashi, T.: Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. **285** (1989), 249-263.
 - [Ko2] Kobayashi, T.: A necessary condition for the existence of a uniform lattice, Duke Math. Journ. 67 (1992), 653-664.
 - [K-O] KOBAYASHI, T. ONO, K.: Note on Hirzebruch's proportionality principle, Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, **37** (1990), 71-87.
 - [Ku] KULKARNI, R.S.: Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, Adv. in Math., 40 (1981), 10-51.
- [Ku-Ra] KULKARNI, R.S. RAYMOND F. : 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces, J. Diff. Geom. 21 (1985), 231-268.
- [L-M-Z] LABOURIE, F. MOZES, S. ZIMMER, R.J. : On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces, prépublication (1994).
 - [L-Z] LABOURIE, F. ZIMMER, R.J. : On the non existence of cocompact lattices for $SL(n, \mathbf{R})/SL(m, \mathbf{R})$, Math. Res. Letters **2** (1995), 75-77.
 - [L-T] LASTARIA, F. TRICERRI, F. : Some remarks about the curvatures of locally homogeneous spaces, preprint.

- [L] LELONG-FERRAND, J.: Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes, application à la démonstration d'une conjecture d'A. Lichnerowicz, C.R.A.S. Sér. AB **269** (1969), A583-586.
- [M] MESS, G. : Lorentz space-time of constant curvature, prépublication I.H.E.S. (1990)
- [O] OBATA, M.: The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 6 (1971-1972), 247-258.
- [R] RATNER, M.: On Ragunathan's measure conjecture, Ann. Maths (2) **134** n° 3 (1991), 545-607.
- [Wo] WOLF, J.A.: The Clifford Klein space forms of indefinite metric, Ann. Math. **75** (1963), 77-80.
- [Z1] ZIMMER, R.J.: Ergodic Theory and Semisimple Groups, Birkhäuser, Boston (1984).
- [Z2] ZIMMER, R.J.: On the algebraic hull of an automorphism groups of a principal bundle, Comm. Math. Helv. **65** (1990), 375-387.
- [Z3] ZIMMER, R.J.: Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces, J. of Amer. Math. Soc., to appear.