

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

October 14, 2024

Contents

1	Sous-variétés	4
1.1	Difféomorphismes, immersions et submersions	4
1.1.1	Définitions	4
1.1.2	Les théorèmes	4
1.2	Sous-variétés	5
1.2.1	Espace tangent	7
1.2.2	Courbes complexes affines et des quadriques	8
2	Variétés	9
2.1	Cartes et atlas	9
2.1.1	Premiers exemples	10
2.1.2	Structure différentielle sur la droite projective	10
2.1.3	Structure différentielle sur l'espace projectif	10
2.2	Objets différentiables	11
2.2.1	Fonctions différentiables	11
2.2.2	Applications différentiables	11
2.2.3	Difféomorphismes, immersions et submersions	12
2.2.4	Sous-variétés	13
2.2.5	Revêtements et structures différentielles	14
3	Partitions de l'unité	15
3.0.1	Motivation	15
3.0.2	Construction	15
3.0.3	Plongement	17
3.0.4	Cas de l'espace projectif	17
4	Les espaces cotangent et tangent	19
4.1	L'espace cotangent et la différentielle d'une fonction	19
4.2	L'espace tangent et les courbes	20
4.2.1	Exemples de vecteurs tangents	21
4.2.2	Espace tangent à une sous-variété	21
4.3	Application tangente et cotangente	21
5	Formes différentielles	23
5.1	Formes différentielles de degré 1	23
5.2	Définitions et premières propriétés	23
5.2.1	Intégration des formes différentielles	24

5.2.2	Formes exactes et différentielle des formes	25
6	Formes différentielles et différentielle extérieure	27
6.1	Rappels d'algèbre linéaire	27
6.1.1	Formes multilinéaires alternées	27
6.1.2	Produit intérieur	27
6.1.3	Produit extérieur	28
6.1.4	Induction	28
6.2	Formes différentielles	28
6.2.1	Un exemple de forme de degré 2	29
6.3	Différentielle extérieure	30
6.3.1	Unicité de la différentielle extérieure	30
6.3.2	Existence de la différentielle extérieure	31
6.4	Formes différentielles induites	32
6.5	Un premier formulaire	33
6.6	Champ de vecteur et produit intérieur	34
6.6.1	Champ de vecteurs	34
6.6.2	Produit intérieur	34
6.6.3	Dérivation en un point	34
7	Lemme de Poincaré et cohomologie	36
7.1	Présentation	36
7.1.1	Espace contractile et homotopie	36
7.1.2	Lemme de Poincaré et formule d'homotopie	37
7.2	Démonstration de la formule d'homotopie	37
7.2.1	Formes différentielles sur $M \times [0, 1]$	37
7.2.2	Un cas particulier de la formule d'homotopie	39
7.2.3	Preuve de la formule d'homotopie	39
7.3	Cohomologie de Rham	40
7.4	Calculs de cohomologie	41
7.4.1	La cohomologie du cercle	41
7.4.2	La cohomologie des sphères	42
7.4.3	Cohomologie de $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points	43
8	Orientation et variétés à bord	44
8.1	Formes volumes et orientation	44
8.2	Variétés à bord	45
8.2.1	Le demi-espace	45
8.2.2	Variétés à bord	46
8.2.3	Orientation du bord d'une variété à bord	46
9	Intégration des formes différentielles	47
9.1	Intégration sur $\mathbb{R}^n$	47
9.2	Intégration sur une variété	47
9.3	La formule de Stokes	49
9.4	Applications de la formule de Stokes	50
9.4.1	Divergence et formule de Green-Ostrogradski	50
9.4.2	Le théorème du point fixe de Brouwer	51
9.4.3	Cohomologie en degré maximal	52

10 Champ de vecteurs	55
10.1 Flot d'un champ de vecteurs	55
10.1.1 Flot d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$	55
10.1.2 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété	56
10.1.3 Flot d'un champ de vecteur dépendant du temps	56
10.2 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs	57
10.2.1 Dérivations	57
10.2.2 Crochet de Lie	58
10.2.3 Champ de vecteur et difféomorphismes	58
10.3 Calcul de Lie-Cartan	60
10.3.1 La formule de Lie-Cartan	60
10.3.2 Un formulaire	61
10.4 Applications : construction de difféomorphismes	61
10.4.1 Transitivité du groupe des difféomorphismes	61
10.4.2 Le lemme de Moser	62

Chapter 1

Sous-variétés

1.1 Difféomorphismes, immersions et submersions

Soit f une application de classe C^1 d'un espace affine dans un autre. On notera par $D_x f$ sa différentielle au point x .

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. Soit U et V deux ouverts d'espaces affines E et F de dimension finie et f une application de classe C^r définie de U à valeurs dans V , pour $r \geq 1$.

- (i) L'application f est un C^r -difféomorphisme de U sur V , si f est une bijection de classe C^r ainsi que sa réciproque.
- (ii) L'application $f : U \rightarrow F$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang n).
- (iii) L'application f est une submersion en x de U si sa différentielle en x est surjective (i.e. si sa matrice jacobienne est de rang p). f est une submersion au dessus de $y \in F$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.

Il faut penser à un difféomorphisme d'un ouvert d'un espace affine à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ comme le choix de nouvelles coordonnées sur l'espace affine.

Nous utiliserons donc la définition suivante.

Définition 1.1.2. Soit m un point d'un espace affine $\mathcal{E}$. Une carte au voisinage de m est un couple (U, X) où U est un ouvert de $\mathcal{E}$ contenant m et $X = (x_1, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme de U sur un ouvert $X(U)$ de $\mathbb{R}^n$. les fonctions $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de la carte.

Si un C^1 -difféomorphisme f est de classe C^r , alors f^{-1} est de classe C^r . On rappelle enfin le théorème d'inversion locale

1.1.2 Les théorèmes

Théorème 1. [INVERSION LOCALE] Soit U et V deux ouverts d'espaces affines E et F de dimension finie et f une application de classe C^r définie de U à valeurs dans V . Soit m un point de U telle que $D_m f$ est inversible. Alors f est un difféomorphisme au voisinage de m .

Le théorème d'inversion locale permet d'affiner notre compréhension des immersions et des submersions.

Théorème 2. [DES IMMERSIONS ET DES SUBMERSIONS] *Soit f une application C^r d'un ouvert U d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension p à valeurs dans un espace affine $\mathcal{F}$ de dimension n . Alors*

- (i) *On suppose que f est une immersion en m . Alors, il existe un voisinage U de m , une carte (V, ϕ) au voisinage de $f(m)$, tel que $f(U) \subset V$, tels que $\phi \circ f$ définie de U dans $\mathbb{R}^n$ est une application affine injective.*
- (ii) *On suppose que f est une submersion en m . Alors, il existe une carte (U, ϕ) au voisinage x , tels que $f \circ \phi^{-1}$ est une application affine surjective de $\phi(U)$ dans $\mathcal{F}$.*

Autrement dit, en choisissant de nouvelles coordonnées, une immersion devient une application linéaire injective et une submersion une application linéaire surjective.

DÉMONSTRATION : Traitons tout d'abord le premier cas. Nous choisissons des coordonnées linéaires sur E et F de façon à ce que $m = 0$, $f(m) = 0$ et $D_m f(u_1, u_2, \dots, u_p) = (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0)$. Notons $f = (f_1, \dots, f_n)$. Nous considérons alors l'application F définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_p(x_1, \dots, x_p), f_{p+1}(x_1, \dots, x_p) + x_{p+1}, \dots, f_n(x_1, \dots, x_p) + x_n).$$

Par construction, la différentielle de F en m est l'identité. Par le théorème d'inversion locale, F est donc un difféomorphisme d'un voisinage U de x sur un voisinage V de $f(m)$. Posons $\phi = F^{-1}$, alors $\phi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ est une application affine injective.

Traitons de manière analogue le deuxième cas. Nous avons ici $p \geq n$. Choisissons des coordonnées sur E et F de façon à ce que $x = 0$, $f(x) = 0$ et $D_x f(u_1, u_2, \dots, u_p) = (u_1, \dots, u_n)$. Notons $f = (f_1, \dots, f_n)$. Nous considérons alors l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, par

$$\phi(x_1, \dots, x_p) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_p(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Par construction $D_m \phi$ est l'identité. D'après le théorème d'inversion locale ϕ est un difféomorphisme local. Alors par construction, $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ est une application linéaire surjective. $\square$

Ce dernier théorème se généralise

Théorème 3. [THÉORÈME DU RANG CONSTANT] *Soit f une application de classe C^r tel que le rang de df est constant au voisinage de m . Alors il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ de classe C^r telles que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est linéaire de même rang que $D_m f$.*

1.2 Sous-variétés

Définition 1.2.1. *Soit M un sous-ensemble d'un espace affine $\mathcal{E}$. M est une sous-variété de dimension d si pour tout point m de M il existe une carte (U, X) au voisinage de m tel que $X(U \cap M)$ est un sous-espace vectoriel de dimension d .*

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Un ouvert d'une sous-espace affine est une sous-variété.

2. La réunion de deux droites parallèles est une sous variété.
3. Une sous-variété est localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe.

Théorème 4. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r .

- (i) Si f est une immersion en $x \in U$, alors il existe un ouvert $x \in U' \subset U$ tel que $f(U')$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension n de $\mathbb{R}^p$.
- (ii) Si f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^p$, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de classe C^r et de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Le graphe Γ_f de f défini par

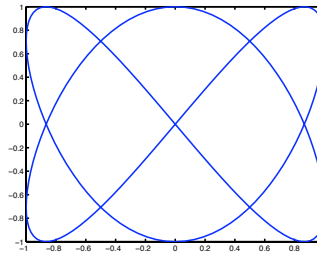
$$\Gamma_f = \{(x, F(y)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

est une sous-variété de dimension p .

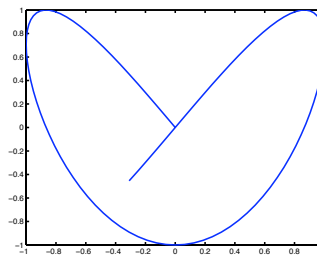
Théorème 5. Soit Φ un difféomorphisme d'un ouvert U d'un espace affine dans $\Phi(U)$. Si M est une sous-variété incluse dans U alors $\Phi(M)$ est une sous-variété.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point mais son image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.



2. L'application $\eta :]-\pi/10, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$ est une immersion en tout point, elle est injective, mais son image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.



3. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ est une submersion au-dessus de tout réel non nul. Les sphères de rayon non nul sont donc des sous-variétés de dimension $n - 1$ (i.e. de codimension 1).

EXERCICE :

1. Vérifier que la projection stéréographique est une immersion du plan dans $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer de deux manières différentes que la sphère

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\},$$

est une sous-variété. Tout d'abord en montrant que S^n est localement un graphe. D'une autre manière, en montrant que la sphère est la preimage d'un point par une submersion.

1.2.1 Espace tangent

On rappelle qu'une *courbe lisse* γ à valeurs dans un espace affine $\mathcal{E}$ est une application de classe C^1 d'un intervalle à valeurs dans $\mathcal{E}$. Le *vecteur tangent* à γ en t_0 est le vecteur de l'espace tangent à $\mathcal{E}$ défini par

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Une courbe lisse est *tracée* sur une sous-variété X , si elle est à valeurs dans X .

Définition 1.2.2. Soit X une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$, et $x \in X$. L'espace tangent à X en x , noté $T_x X$, est l'ensemble des vecteurs tangents en x aux courbes contenues dans X et passant par x .

Théorème 6. Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent à X en x est un espace vectoriel de dimension d . De plus

- (i) si Φ est un difféomorphisme d'un ouvert U d'un espace affine dans un autre alors si x est dans U et $M \subset U$

$$T_{\Phi(x)} \Phi(M) = D_x \Phi(T_x(M)),$$

- (ii) Si $M = f(U)$ est l'image d'une immersion f , alors $T_{f(x)} M = \text{Im}(D_x f)$.
 (iii) Si $M = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion f , alors $T_x M = \ker(D_x f)$.
 (iv) Si $M \subset E \times F$ est le graphe d'une application f , alors $T_{(x, f(x))} M$ est le graphe de l'application linéaire $D_x f$.

En effet, si $\phi : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme qui redresse M sur $\mathbb{R}^d$ au voisinage de x , alors $T_x X = (D_x \phi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 1.2.3. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d si et seulement si au voisinage de tout point $x \in X$, X s'écrit comme le graphe d'une application f de $T_x X$ dans $(T_x X)^\perp$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$. En particulier, si $y \in X$ est voisin de $x \in X$, la distance de y à $T_x X$ est un $o(|y - x|)$. De même, si $v \in T_x X$ est assez petit, la distance de $x + v$ à X est un $o(|v|)$.*

DÉMONSTRATION : Notons π la projection orthogonale sur $T_x X$. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion qui paramètre X au voisinage de x . Alors $\pi \circ g$ est une immersion de $\mathbb{R}^d$ dans $T_x X$ en 0 donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage U de 0 dans $T_x X$. Notons $h : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ le difféomorphisme réciproque. Alors $f = \pi^\perp \circ h : U \rightarrow (T_x X)^\perp$ est différentiable, sa différentielle en 0 est nulle, et son graphe coïncide avec X au voisinage de x . Si $v \in U$, $x + v + f(v) \in X$ donc $x + v$ est proche (en $o(|v|)$) de X .

L'application $y \mapsto y - f \circ \pi(y - x)$ est différentiable, sa différentielle en x est l'identité, c'est un difféomorphisme local qui redresse X sur le plan affine $x + T_x X$. Il déplace le point y d'une distance en $o(|y - x|)$, donc si $y \in X$, y est proche du plan tangent. $\square$

1.2.2 Courbes complexes affines et des quadriques

Définition 1.2.4. *Par définition une courbe complexe affine plane est une sous-variété X de $\mathbb{C}^2$ définie par*

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\},$$

où P est un polynôme à deux variables tel que $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial w}$ ne s'annule pas simultanément le long de X .

Les courbes complexes affines sont des *surfaces*, c'est-à-dire des sous-variétés de dimension 2.

Proposition 1.2.5. *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique affine de $\mathbb{R}^n$ définie par l'équation affine $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$. Alors Q est une sous-variété de classe C^∞ , et son hyperplan tangent en $x = (x_1, \dots, x_n, 1)$ est défini par l'équation linéaire en v ,*

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n S_{i,j} x_i v_j + \sum_{j=1}^n S_{n+1,j} v_j = 0.$$

DÉMONSTRATION : Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $p = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de composantes $(x_1, \dots, x_n, 1)$. L'équation de Q est $f(x) = q(p) = p^\top S p = 0$. Alors, pour $v \in \mathbb{R}^n$, $d_x f(v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}^\top S p + p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que $x \in Q$. Notons $S p = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$. Alors $f(x) = w x + z = 0$. Comme S est inversible et p non nul, $S p$ est non nul, donc $w \neq 0$ et $z \neq 0$. Alors la forme linéaire $d_x f : v \mapsto 2p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 2w^\top v$ est surjective. Autrement dit, f est une submersion au dessus de 0. En particulier, $Q = f^{-1}(0)$ est une sous-variété d'espace tangent $\ker(d_p)f$. $\square$

Chapter 2

Variétés

On voudrait traiter le cas des quadriques projectives. Pour cela, il faut définir la notion de sous-variété de l'espace projectif.

2.1 Cartes et atlas

Définition 2.1.1. Soit M un espace topologique.

- (i) Une carte sur M est une paire (U, X) où U est un ouvert de M et $X = (x_1, \dots, x_p)$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Les fonctions x_i sont les coordonnées, l'ouvert U est le domaine de la carte, l'entier p est la dimension de la carte..
- (ii) Deux cartes (U, X) et (V, Y) sont C^∞ -compatibles si le changement de cartes $Y \circ X^{-1}$ de $X(U \cap V)$ vers $Y(U \cap V)$ est un C^r -difféomorphisme.
- (iii) Un atlas est un ensemble de cartes $\{(U_i, X^i)\}$ de même dimension qui sont C^∞ compatibles et telles que $\{U_i\}$ est un recouvrement de M .
- (iv) Deux atlas sont équivalents si toutes leurs cartes sont compatibles, ou de manière équivalente si la réunion est encore un atlas.
- (v) Une structure différentielle sur M est une classe d'atlas compatibles.

Ceci nous amène à la définition suivante

Définition 2.1.2. [VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES] Un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts et muni d'une structure différentielle est une variété différentielle. Une carte est compatible avec la structure de variété si elle est compatible avec un atlas définissant la structure de variété.

Par abus de langage, on dira que les fonctions $(x_1, \dots, x_p)$ définies au voisinage de m sont des coordonnées au voisinage d'un point m d'une variété M si il existe un ouvert U contenant m tel que $(u, (x_1, \dots, x_p))$ est une carte compatible avec la structure de variété. Autrement dit, on sera souvent amené à parler de coordonnées sans préciser le domaine de la carte correspondante.

On remarque que, par définition, l'ensemble des cartes compatibles avec une structure de variété forme un atlas appelé *atlas maximal*.

2.1.1 Premiers exemples

EXEMPLE :

1. Un ouvert d'un espace affine est muni d'une structure de variété. plus généralement tout ouvert d'une variété a une structure de variété.

2. Sur $\mathbb{R}$ considérons les deux atlas à une carte ($U = \mathbb{R}, \phi : x \mapsto x$) et ($W = \mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3$). Ces deux atlas ne sont pas compatibles.

En effet, $x \mapsto x^3$ n'est pas un difféomorphisme. Il y a donc plein de structures différentielles différentes sur $\mathbb{R}$. On verra cependant qu'elles sont toutes équivalentes.

3. Sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ considérons l'atlas à deux cartes $U_1 =]0, 1[\bmod 1$, $\phi_1(x \bmod 1) = x$ et $U_2 =]-1/2, 1/2[\bmod 1$, $\phi_2(x \bmod 1) = x$. Cela définit une structure différentielle sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

En effet, $U_1 \cap U_2 =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\bmod 1$, $\phi_1(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, $\phi_2(U_1 \cap U_2) =]0, 1/2[$ et pour $y \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$, deux cas,

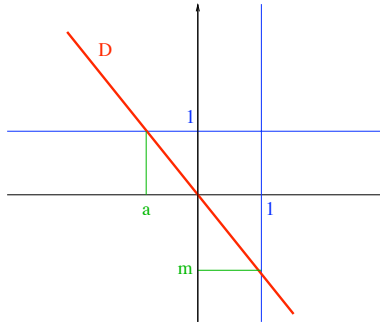
- si $y \in]0, 1/2[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y$;
- si $y \in]1/2, 1[$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y) = y - 1$.

Dans les deux moitiés, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un C^∞ -difféomorphisme.

4. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure de variété.

2.1.2 Structure différentielle sur la droite projective

Une droite vectorielle D non verticale de $\mathbb{R}^2$ est représentée par une pente $m = \phi_1(D)$, c'est le réel tel que $(1, m) \in D$. Si D n'est pas horizontale, elle possède une antipente $a = \phi_2(D)$, c'est le réel a tel que $(a, 1) \in D$. Les deux applications pente et antipente constituent des cartes, et le changement de carte $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : m \mapsto a = 1/m$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cet atlas définit une structure différentielle sur la droite projective.



2.1.3 Structure différentielle sur l'espace projectif

Définition 2.1.3. On appelle ouvert affine U_i de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'ensemble des points dont la i -ème coordonnée homogène est non nulle. On appelle carte affine l'application réciproque de l'homéomorphisme $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$.

Alors $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{j'} \neq 0\}$, où $j' = j$ si $j < i$, $j' = j - 1$ si $j > i$. Comme

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_{j'}}, \dots, \frac{1}{x_{j'}}, \dots, 1, \dots, \frac{x_1}{x_{j'}} \right)$$

est un C^∞ -difféomorphisme, on obtient ainsi une structure différentielle sur $\mathbb{I}^n(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.4. De la même façon, on définit une structure différentielle de dimension $2n$ sur $\mathbb{I}^n(\mathbb{R})$.

2.2 Objets différentiables

2.2.1 Fonctions différentiables

Définition 2.2.1. (i) Soit f une fonction définie sur un ouvert V d'un espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à la carte (U, X) si $f \circ X^{-1}$ est de classe C^r .

(ii) Soit f une fonction définie sur un espace topologique M . On dit que f est C^r par rapport à un atlas, si f est de classe C^r dans toutes les cartes de l'atlas.

(iii) Soit f une fonction sur une variété, alors elle est de classe C^r , si elle est de classe C^r pour l'un des atlas définissant la structure différentielle.

Autrement dit une fonction f est de classe C^r au voisinage d'un point, s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ avec F de classe C^r .

On a alors les propriétés immédiates suivantes qui utilise le fait que si une fonction est de classe C^r sur un ouvert d'un espace affine, alors $f \circ \phi$ est de classe C^r pour tout difféomorphisme ϕ .

Proposition 2.2.2. Pour qu'une fonction soit de classe C^r au voisinage d'un point, il suffit de trouver une carte compatible avec la structure de variété telle que f est de classe C^r pour cette carte. En particulier, les coordonnées d'une carte sont des fonctions de classe C^∞ .

En particulier pour qu'une fonction F définit au voisinage de m soit C^r au voisinage de m , il suffit de trouver des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_p)$ définies au voisinage de m , telle que la fonction f vérifiant $F = f(x_1, \dots, x_p)$ soit de classe C^r .

Par exemple, la restriction de toute fonction C^∞ à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est à nouveau une fonction C^∞ .

2.2.2 Applications différentiables

Les fonctions de classe C^∞ vont nous permettre la notion d'application différentiable. Alternativement, nous verrons que tout peut se définir en fonction de cartes.

Définition 2.2.3. Une application continue $\phi : M \rightarrow N$ entre variétés est de classe C^r si pour toute fonction ϕ de classe C^r au voisinage de $f(x)$, $\phi \circ f$ est de classe C^r au voisinage de x .

Nous venons de voir que l'injection d'une sous-variété dans $\mathbb{R}^n$ est une application C^∞ . Nous déduisons immédiatement de cette définition que la composée d'applications de classe C^r est de classe C^r .

Alternativement, la caractérisation suivante est plus efficace.

Proposition 2.2.4. *Une application ϕ entre deux variétés est de classe C^r au voisinage de m , s'il existe des coordonnées X au voisinage de m , des coordonnées Y au voisinage de $f(m)$, telles que $X \circ \phi \circ Y^{-1}$ est de classe C^r .*

Par exemple, les coordonnées sont des exemples d'applications C^∞ .

2.2.3 Difféomorphismes, immersions et submersions

Définition 2.2.5. (i) *Une application $f : M \rightarrow N$ entre variétés est un difféomorphisme de classe C^r si c'est une bijection de classe C^r dont l'inverse est aussi de classe C^r si elle est de classe C^r .*

(ii) *Une application $f : M \rightarrow N$ entre variétés est un difféomorphisme au voisinage de m , s'il existe un ouvert U contenant m telle que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

(iii) *Une application $f : M \rightarrow N$ est une immersion au voisinage de m , si il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ tel que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une immersion au voisinage de $X(m)$.*

(iv) *Une application $f : M \rightarrow N$ est une submersion au voisinage de m , si il existe des coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$ tel que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une submersion au voisinage de $X(m)$.*

Comme premier exemple, remarquons que les coordonnées sont des difféomorphismes locaux. **Terminologie.** Dans la suite, *différentiable* signifie de classe C^r , où r est déterminé par le contexte.

Nous avons alors

Proposition 2.2.6. *Si f est une immersion – respectivement submersion – au voisinage de m , alors pour toutes coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$, $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une immersion – respectivement submersion – au voisinage de $X(m)$.*

En particulier, si f est une immersion – respectivement submersion, difféomorphisme – il existe des cartes coordonnées X au voisinage de m et Y au voisinage de $f(m)$, telles que $Y \circ f \circ X^{-1}$ est une application linéaire injective – respectivement surjective, bijective.

Retour sur le cas des espaces projectifs

A titre d'exemple, nous allons interpréter les applications dont le but où la source sont des espaces projectifs.

Lemme 2.2.7. (i) *Soit M une variété de classe C^r . Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ une application de classe C^r . Alors l'application induite $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est de classe C^r .*

(ii) *Soit Y une variété de classe C^r . Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow Y$ une application de classe C^r telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et tout $\lambda \neq 0$, $f(\lambda v) = f(v)$. Alors l'application induite $\tilde{f} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ est de classe C^r .*

DÉMONSTRATION : 1. Écrivons $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$. Soit $x_0 \in X$, $w = f(x_0)$. Pour simplifier les

notations, supposons que $w_{n+1} = f_{n+1}(x_0) \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(w)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} \circ \tilde{f}(x) &= \phi_{n+1}[f_1(x) : f_2(x) : \dots : f_{n+1}(x)] \\ &= \left(\frac{f_1(x)}{f_{n+1}(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} \right).\end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de X dans $\mathbb{R}^n$, donc $\tilde{f}$ est de classe C^r .

2. Soit $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$. Pour simplifier les notations, supposons que $v_{n+1} \neq 0$. Alors, au voisinage de $\mathbb{P}(v)$, on peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} , et

$$\begin{aligned}\tilde{f} \circ \phi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}[1 : x_1 : \dots : x_n] \\ &= f(1, x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

C'est bien une application de classe C^r d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans Y , donc $\tilde{f}$ est de classe C^r . $\square$

EXEMPLE : Une application projective est de classe C^∞ là où elle est définie.

En effet, on applique successivement les énoncés 1 et 2 du lemme.

2.2.4 Sous-variétés

Définition 2.2.8. *Un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété si au voisinage de tout point x de N il existe une carte (U, X) telle que $X(U \cap N)$ soit une sous-variété.*

Alternativement, un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété si au voisinage de tout point x de N il existe une carte (U, X) telle que $X(U \cap N)$ soit un ouvert d'un sous-espace affine.

EXEMPLE : Une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est une sous-variété.

En effet, dans toute carte affine, une sous-variété linéaire est envoyée sur un sous-espace affine.

Cas des quadriques projectives

Proposition 2.2.9. *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $n + 1$ variables, de matrice S . Soit Q la quadrique projective de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ définie par q . Alors Q est une sous-variété de classe C^∞ . Soit $p \in Q$. Alors l'hyperplan polaire de p est tangent à Q en p . Cet énoncé reste vrai sans changement si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION : On peut supposer que la dernière coordonnée homogène de p est non nulle. On utilise la carte affine $\phi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap Q) = Q$ est la quadrique affine d'équation $q(x_1, \dots, x_n, 1) = 0$, qui est une sous-variété. Cela prouve que Q est une sous-variété. $\phi_{n+1}(U_{n+1} \cap \mathbb{P}(p^\perp))$ est un hyperplan affine, parallèle à l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $p^\top S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, i.e. à l'hyperplan tangent à Q en $\phi_{n+1}(p)$. On conclut que H est tangent à Q en p . $\square$

EXERCICE : A quelle condition l'intersection de deux quadriques projectives non dégénérées est-elle une sous-variété de l'espace projectif ?

2.2.5 Revêtements et structures différentielles

Proposition 2.2.10. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. Étant donnée une structure différentielle sur X , il existe une unique structure différentielle sur E qui rend p différentiable. Inversement, si E est une variété et si pour toute section locale s de p , $s \circ p$ est un difféomorphisme, alors il existe une unique structure différentielle sur X qui rend p différentiable*

DÉMONSTRATION : Si X est une variété, on recouvre X par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et trivialisant pour le revêtement, i.e. $p^{-1}(U_i) = \sqcup_j s_j(U_i)$. Les cartes $\phi \circ p|_{s_j(U_i)} : s_j(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour E .

Inversement, supposons que E est une variété. On recouvre E par des ouverts U_i qui sont à la fois contenus dans des ouverts de cartes $\phi_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ et tels que $p(U_i)$ soit trivialisant, i.e. $p^{-1}(p(U_i)) = \sqcup_j s_j(p(U_i))$. Les cartes $\phi_i \circ s_j : s_j(p(U_i)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment un atlas pour X . En effet, deux choix j et j' différents donnent un changement de carte $\phi_i \circ s_{j'} \circ (\phi_i \circ s_j)^{-1} = \phi_i \circ s_{j'} \circ p \circ (\phi_i)^{-1}$ qui est un difféomorphisme. $\square$

EXEMPLE : Soit G un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété E . Alors l'espace quotient $X = G \div E$ hérite d'une structure différentielle qui rend le revêtement $p : E \rightarrow X$ différentiable.

En effet, si s est une section locale de p , $s \circ p$ est la restriction à un ouvert d'un élément de G , donc $s \circ p$ est un difféomorphisme.

Chapter 3

Partitions de l'unité

3.0.1 Motivation

Comment fabriquer des objets différentiables, ne serait-ce qu'une fonction non constante, sur une variété ? En combinant des morceaux donnés dans des cartes.

3.0.2 Construction

Définition 3.0.1. Soit X un espace topologique. Soit u une fonction continue sur X . Le support de u est le plus petit fermé en dehors duquel u est nulle.

Rappel 3.0.2. Il existe une fonction paire χ sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , à support dans $] -1, 1[$, qui vaut 1 sur un voisinage de 0.

Le lemme suivant utilise de manière cruciale qu'une variété est séparée

Lemme 3.0.3. Soit X une variété de classe C^r , soit K un compact de X , soit U un ouvert contenant K . Il existe un voisinage ouvert V de K et une fonction χ de classe C^r sur X , à support dans U , qui vaut 1 sur V .

DÉMONSTRATION : On traite d'abord le cas où $K = \{x\}$. La structure différentielle fournit au voisinage de x une carte $\phi : W \rightarrow V$ avec $W \subset U$, telle que $\phi(x) = 0$. On peut toujours supposer que V contient une boule de rayon 1. Pour $y \in W$, on pose $\chi_x(y) = \chi(\phi(y))$, où χ est la fonction modèle sur $\mathbb{R}$, à support dans $] -1, 1[$. Alors le support de χ_x est un fermé inclus dans $\phi^{-1}(B(\phi(x), 1))$ de U , en particulier ce support est compact. Comme X est séparé, c'est un fermé de X . Tout point $z \notin U$ possède un voisinage disjoint de K . On peut donc prolonger χ_x par 0 en dehors de U , elle reste de classe C^r .

Passons au cas général, on choisit pour tout x de K une fonction χ_x qui vaut 1 sur un voisinage V_x relativement compact de x inclus dans U et à support dans U . On extrait du recouvrement $\{V_x\}_{x \in K}$ un recouvrement fini indexé par une partie finie F de K . On pose alors

$$\rho = \sum_{x \in F} \chi_x.$$

Par construction, on a $\rho = 0$ sur U et $\rho \geq 1$ sur K . On pose enfin

$$\chi = \zeta \circ \rho,$$

où ζ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, qui vaut 0 pour $x \geq 0$ et 1 pour $x \geq 1$. $\square$

Définition 3.0.4. Soit X un espace topologique. Soit W_α des ouverts qui recouvrent X . On appelle partition de l'unité subordonnée à (W_α) la donnée, pour chaque α , d'une fonction positive ou nulle χ_α sur X , à support compact dans W_α , de sorte que

(i) Pour tout $x \in X$, seuls un nombre fini parmi les nombres $\chi_\alpha(x)$ sont non nuls.

(ii) $\sum_\alpha \chi_\alpha \equiv 1$.

On rappelle qu'un *recouvrement localement fini* de l'espace X est un recouvrement par des ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ tels pour tout x de X il existe un voisinage V de x tel que

$$\#\{i \in I \mid V \cap U_i \neq \emptyset\} < \infty.$$

Le recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$ est un *sous-recouvrement* de $\{W_j\}_{j \in J}$, si pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $V_i \subset W_j$.

On peut extraire de tout recouvrement d'un espace *localement compact et réunion dénombrable de compacts* un sous-recouvrement localement fini.

Théorème 7. Soit X une variété de classe C^r . Soit $\{W_\alpha\}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts d'adhérence compacte. Alors X possède une partition de l'unité de classe C^r subordonnée à $\{W_\alpha\}$.

DÉMONSTRATION : Le recouvrement W_α étant localement fini, il est dénombrable. On construit par récurrence un recouvrement par des ouverts U_i tels que $\bar{U}_i \subset W_i$: supposons que nous ayons construit par récurrence $U_1, \dots, U_n$ tels que $\{U_1, \dots, U_n, W_{n+1}, \dots\}$ recouvre X , on choisit alors U_{n+1} inclus dans W_{n+1} qui contient le compact K_{n+1} défini par

$$K_{n+1} := X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{j=n} U_j \cup \bigcup_{j \geq n+2} W_j \right).$$

Pour construire U_{n+1} , on pose

$$U_{n+1} = \xi^{-1} \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

où ξ est une fonction qui vaut 1 au voisinage de K_{n+1} et à support dans W_{n+1} . En utilisant le fait que W_α est localement fini on montre enfin que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un revêtement.

On construit une fonction χ_i qui vaut 1 sur U_i et à support fermé (et donc compact dans W_i).

La fonction $\eta = \sum_i \chi_i$ est bien définie et C^∞ car elle est égale à une somme finie de χ_i sur un voisinage d'un point quelconque : en effet, soit O un voisinage de x tel que

$$\#\{j \mid O \cap W_j \neq \emptyset\} < \infty.$$

Par construction,

$$\eta|_O = \sum_{i \mid O \cap W_i \neq \emptyset} \chi_i,$$

et donc η est finie et C^∞ .

On peut poser puisque η est strictement positive

$$\psi_i = \frac{\chi_i}{\eta}.$$

Par construction, c'est une fonction de classe C^r à support dans W_i et $\sum_i \psi_i \equiv 1$. $\square$

3.0.3 Plongement

Théorème 8. [H. WHITNEY (1936)]. *Toute variété compacte est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION : Soit X une variété compacte de dimension n . Soit $(U_i, \phi_i)_{i=1,\dots,N}$ un atlas fini pour la structure différentielle de X . On construit comme dans la proposition précédente un recouvrement par des ouverts V_i d'adhérences contenues dans U_i . On considère ensuite une fonction ψ_i à support dans U_i et égale à 1 sur V_i .

On définit une application différentiable $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{nN+N}$ par

$$df(x) = (\psi_1(x)\phi_1(x), \dots, \psi_n(x)\phi_n(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)).$$

L'application f est bien définie, car lorsque $x \notin U_i$, $\psi_i(x) = 0$ donc on n'a pas besoin de connaître $\phi_i(x)$.

Alors f est une immersion. En effet, au voisinage de x , l'une des fonctions ψ_i vaut 1, donc la différentielle en x de la i -ème composante $\psi_i\phi_i$ est de rang n . *A fortiori*, $d_x f$ est de rang n .

Enfin f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, il existe z telle que $\psi_i(x) = \psi_i(y) > 0$. Donc x et y appartiennent à U_i . Comme $\phi_i(x).\psi_i(x) = \phi_i(y).\psi_i(y)$, on a $\phi_i(x) = \phi_i(y)$. Comme ϕ_i est injective, on conclut que $x = y$.

L'application f est un homéomorphisme sur son image, par compacité.

Dès lors, $f(X)$ est une sous-variété. En effet, pour tout $w \in f(X)$, $w = f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U)$ soit une sous-variété. Comme $f(U)$ est un voisinage de w dans $f(X)$, cela prouve que $f(X)$ est une sous-variété.

Enfin f est un difféomorphisme, car f est un difféomorphisme local bijectif. $\square$

REMARQUES : Le théorème de H. Whitney contient davantage d'information.

1. Il s'applique aussi à des variétés non compactes (voir ci-dessous).
2. Il donne une meilleure borne sur la dimension de l'espace d'arrivée : Whitney plonge une variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.
3. Whitney montre que pour certaines valeurs de n , cette borne ne peut pas être améliorée.
4. Le théorème de immersions de Ralph Cohen montre que toute variété de dimension n peut-être immergée dans $\mathbb{R}^{2n-a(n)}$ où $a(n)$ est le nombre de 1 dans la décomposition dyadique de n . C'est un théorème difficile ! (et vraisemblablement inutile)

3.0.4 Cas de l'espace projectif

Dans le cas de l'espace projectif, il y a des plongements explicites.

EXERCICE : Soit $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ l'application qui à une droite p associe le projecteur orthogonal sur p . Vérifier que f est un difféomorphisme sur son image.

Solution. Soit p une droite, soit w un vecteur directeur de p . Le projecteur orthogonal sur p est donné par la formule

$$f(p)(u) = \frac{w^\perp u}{w^\perp w} w = \frac{1}{w^\perp w} w w^\perp u,$$

donc sa matrice est $\frac{1}{w^\perp w} w w^\perp$. C'est une fonction de classe C^∞ de w , donc f est de classe C^∞ .

L'image de f est l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs orthogonaux de rang un. L'application réciproque associe à un projecteur son image. Cela montre que f est un homéomorphisme de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{P}$.

Soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \cdots : 0 : 1]$. On peut utiliser la carte affine ϕ_{n+1} au voisinage de p . Dans cette carte,

$$g = f \circ \phi_{n+1}^{-1}(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\perp & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + |x|^2} \begin{pmatrix} x x^\perp & x^\perp \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de g en $x = 0$ est

$$v \mapsto \begin{pmatrix} v x^\perp + x v^\perp & v^\perp \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

qui est injective, puisque le troisième bloc l'est. Cela prouve que f est une immersion en p . Comme on l'a vu lors de la démonstration du théorème de Whitney, une immersion qui est un homéomorphisme sur son image est un difféomorphisme sur une sous-variété. $\square$

Chapter 4

Les espaces cotangent et tangent

4.1 L'espace cotangent et la différentielle d'une fonction

Nous commençons par définir ce qu'est une fonction de différentielle nulle

Définition 4.1.1. Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété. Nous dirons que f est de différentielle nulle en m si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes

- (i) Il existe des coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m avec $d_{X(m)}F = 0$.
- (ii) Pour toutes coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ si F est définie par $f = F(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m alors $d_{X(m)}F = 0$.

L'équivalence entre les deux propriétés est facile.

REMARQUES : Nous laissons en exercice le soin de montrer qu'une fonction f sur un espace affine est de différentielle nulle en m si et seulement si il existe

- un entier k ,
- des fonctions h_i s'annulant en m , dérivable en m et définies au voisinage de m , et des fonctions ϵ_i pour $i \in \{1, \dots, k\}$ également définies au voisinage de m

telle que au voisinage de m on ait

$$f = \sum_{i=1}^{i=k} \epsilon_i h_i^2.$$

Nous pouvons donc alternativement définir une fonction comme étant de différentielle nulle en un point d'une variété par la même condition. Ceci nous évite de parler de coordonnées.

Nous avons alors la proposition immédiate

Proposition 4.1.2. *L'espace $\mathcal{E}(m, U)$ des fonctions définies sur un voisinage U de m , nulle en m et de différentielle nulle est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{G}(m, U)$ des fonctions de classe C^1 s'annulant en m et définie sur U de m . De plus, si V est un voisinage de m inclus dans U , alors la restriction donne un isomorphisme de $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{E}(m, U)$ avec $\mathcal{G}(m, V)/\mathcal{E}(m, V)$.*

DÉMONSTRATION : le point délicat est la surjectivité de la restriction : elle s'obtient en utilisant une fonction cloche constante au voisinage de m et de support dans V . $\square$

Ceci nous permet de proposer la définition suivante

Définition 4.1.3. [ESPACE COTANGENT ET DIFFÉRENTIELLE] *Avec les notations de la proposition précédente, l'espace cotangent de la variété M en m , noté T_m^*M est l'espace vectoriel $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{F}(m, U)$. La différentielle d'une fonction f de classe C^1 définie au voisinage de m – notée $d_m f$ – est alors la classe de $f - f(m)$.*

On remarque en particulier que la différentielle d'une constante est nulle et que $d(fg) = f dg + g df$.

Le théorème suivant permet de comprendre ce qu'est l'espace cotangent et la différentielle d'une fonction.

Théorème 9. *Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m . Alors*

$$(d_m x_1, \dots, d_m x_n)$$

*est une base de T_m^*M . En particulier $\dim T_m^*M = \dim M$. De plus si $f = F(x_1, \dots, x_n)$, alors*

$$d_m f = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_{X(m)} d_m(x_i).$$

Définition 4.1.4. [DÉRIVÉES PARTIELLES] *Les dérivées partielles de la fonction f en m par rapport au coordonnées x_i sont les composantes de df dans la base dx_i . Elles sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m$ de telle sorte que l'on a*

$$d_m f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m d_m(x_i).$$

D'après la proposition précédente, si $f = F(x_1, \dots, x_n)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Corollaire 4.1.5. *Si une fonction f a un maximum ou un minimum local en m alors $d_m f = 0$.*

4.2 L'espace tangent et les courbes

Définition 4.2.1. *L'espace tangent de la variété M en m , noté $T_m M$ est l'espace vectoriel dual de l'espace cotangent. Ces éléments sont les vecteurs tangent. On note $df_m(u)$ la valeur du vecteur tangent u appliqué à la différentielle $d_m f$.*

4.2.1 Exemples de vecteurs tangents

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m . On note alors $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ la base duale de $(d_m x_1, \dots, d_m x_n)$, de telle sorte que

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Définition 4.2.2. [VECTEUR TANGENT À UNE COURBE] Soit c une courbe C^1 à valeurs dans M telle que $c(t_0) = m$. Le vecteur tangent à la courbe c en t_0 , noté $\dot{c}(t_0)$, est le vecteur défini par

$$df_m(\dot{c}(t_0)) = \left. \frac{df \circ c}{dt} \right|_{t_0}.$$

Nous avons alors

Théorème 10. [VECTEURS TANGENTS ET COORDONNÉES LOCALES] Tous les vecteurs sont des vecteurs tangents à une courbe. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Soit c une courbe telle que $c(t_0) = m$. Si on pose $c_i = x_i(c)$ alors

$$\dot{c}(t_0) = \sum_i \dot{c}_i(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si f est une fonction, alors

$$df(\dot{c}(t_0)) = \sum_i \dot{c}_i(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

4.2.2 Espace tangent à une sous-variété

Si N est une sous-variété de M , on identifiera l'espace tangent à N en m à un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à M . Plus précisément, l'espace tangent à N est identifié à l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur N .

4.3 Application tangente et cotangente

Soit ϕ une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété M à valeurs dans une variété N .

Définition 4.3.1. Il existe une unique application linéaire, appelée application tangente à ϕ et notée $T_m \phi$ définie de $T_m M$ à valeurs dans $T_{\phi(m)} N$, vérifiant

$$d_{\phi(m)} f \circ T_m \phi = d_m (f \circ \phi).$$

De même, il existe une unique application linéaire, appelée application cotangente à ϕ et notée $T_m^* \phi$ définie de $T_{\phi(m)}^* N$ à valeurs dans $T_m^* M$, vérifiant

$$T_m^* \phi(d_{\phi(m)} \phi) = d_m (f \circ \phi).$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

La proposition suivante résume aussi les propriétés importantes de l'application tangente.

Proposition 4.3.2. *Soit ϕ et ψ des applications différentiables.*

- (i) *Nous avons $T_m(\phi \circ \psi) = T_{\psi(m)}\phi \circ T_m\psi$.*
- (ii) *Si c est une courbe, alors $T_{c(t_0)}\phi(\dot{c}(t_0)) = (\phi \circ c)'(t_0)$.*
- (iii) *Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Soit $Y = (y_1, \dots, y_p)$ sont des coordonnées au voisinage de $\phi(m)$. Posons $\phi_j = y_j(\phi)$. Alors les coefficients de la matrice de $T_m\phi$ dans les bases associées aux coordonnées sont $\frac{\partial(\phi_j)}{\partial x_i}$.*

Enfin l'analogie des théorèmes d'inversion locale et des submersions immersions se reproduit dans le cadre des variétés.

Théorème 11. *Soit ϕ une application différentiable.*

- (i) *On suppose que l'application tangente à ϕ en m est inversible, alors ϕ est un difféomorphisme au voisinage de m*
- (ii) *Une application ϕ est une submersion en m si et seulement si $T_m\phi$ est surjective.*
- (iii) *Une application ϕ est une immersion en m si et seulement si $T_m\phi$ est injective.*

Chapter 5

Formes différentielles

5.1 Formes différentielles de degré 1

5.2 Définitions et premières propriétés

Définition 5.2.1. [FORME DIFFÉRENTIELLE DE DEGRÉ 1] Une 1-forme différentielle ou forme différentielle de degré 1 sur une variété M est une application $\omega : m \rightarrow \omega_m$ définie de M dans T^*M telle que pour tout m de M on a $\omega_m \in T_m^*M$.

REMARQUES :

1. La différentielle d'une fonction f définie par

$$df : x \rightarrow d_x f,$$

est une 1-forme différentielle.

2. Si α et β sont deux 1-formes différentielles. La somme $\alpha + \beta$ définie par

$$\alpha + \beta : m \rightarrow \alpha_m + \beta_m$$

est une 1-forme différentielle.

3. Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le produit

$$f \cdot \omega : m \rightarrow f(m)\omega_m,$$

est également une 1-forme différentielle.

4. Si ω est une forme différentielle et $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage U d'un point m . Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot dx_i.$$

Cette dernière remarque nous permet de donner un sens à la notion de 1-forme différentiable.

Définition 5.2.2. [FORME DIFFÉRENTIELLE LISSE] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle ω est de classe C^k au voisinage du point m , s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles qu'au voisinage de m nous ayons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (5.1)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de m . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M .

Comme précédemment nous remarquons

REMARQUES :

1. La somme de deux 1-formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit d'une fonction et d'une forme de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage d'un point, nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \quad (5.2)$$

pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 5.2.3. Nous notons $\Omega^1(M)$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ sur M . L'espace $\Omega^1(M)$ est un espace vectoriel. La multiplication par les fonctions C^∞ lui donne la structure d'un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M .

Les différentielles de fonctions jouent un rôle particulier et nous dirons

Définition 5.2.4. [FORMES EXACTES] Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est exacte si elle est la différentielle d'une fonction.

5.2.1 Intégration des formes différentielles

Définition 5.2.5. [INTÉGRATION SUR UN CHEMIN] Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ un chemin de classe C^1 par morceaux sur M et ω une 1-forme différentielle définie sur M . L'intégrale de ω sur c est le nombre réel

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt.$$

Nous vérifions que si f est une fonction alors

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

En particulier, si c est un *lacet*, c'est-à-dire si $c(a) = c(b)$, alors pour toute forme exacte ω nous avons

$$\int_c \omega = 0.$$

EXERCICE :

1. si ϕ est un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ on a

$$\int_c \omega = \int_{c \circ \phi} \omega.$$

2. Soit $\omega = xdy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrez en utilisant des carrés que ω n'est pas exacte.
3. Soit $d\theta = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer l'intégrale de $d\theta$ sur le chemin $c : [0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$s \rightarrow (\cos(s), \sin(s)).$$

Montrez que $d\theta$ n'est pas exacte. La notation " $d\theta$ " est standard mais est un abus de langage : il n'existe pas de fonction θ bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont $d\theta$ serait la différentielle.

5.2.2 Formes exactes et différentielle des formes

Quand une forme différentielle est-elle exacte ? Dans des coordonnées une condition nécessaire est donnée par le lemme de Schwarz : si ω est une 1-forme différentielle exacte, alors pour tout système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ nous avons

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i},$$

où les fonctions ω_i sont définies par

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i.$$

Autrement dit une condition nécessaire d'exactitude s'obtient en différenciant les composantes de ω .

A ce stade, nous pouvons faire un certain nombre de remarque qui justifient les constructions que nous allons faire par la suite

REMARQUES :

1. Un bref calcul montre que cette condition nécessaire est indépendante du choix des coordonnées. Ceci suggère fortement qu'il doit y avoir une manière élégante – c'est-à-dire sans choix de coordonnées – d'énoncer cette condition nécessaire.
2. Cette condition nécessaire est suffisante pour $M = \mathbb{R}^2$: si ω est une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \frac{\partial \omega_y}{\partial x}$, alors la fonction f définie par

$$f(x, y) = \int_0^x \omega_x(t, 0) dt + \int_0^y \omega_y(x, s) ds,$$

vérifie $df = \omega$.

3. Cette condition n'est pas suffisante sur $\mathbb{R}^2$ privé d'un point : la forme $d\theta$ définie dans l'exercice précédent vérifie cette condition nécessaire. Pourtant elle n'est pas exacte. Nous verrons que la présence du "trou" est responsable de cette situation.

Chapter 6

Formes différentielles et différentielle extérieure

6.1 Rappels d'algèbre linéaire

6.1.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Une forme *multilinéaire alternée* de degré p – ou *p -forme extérieure* – est une application multilinéaire $\omega : E^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ on ait

$$\omega(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\omega(u_1, \dots, u_p).$$

L'ensemble des formes extérieures de degré p est un espace vectoriel que l'on note $\bigwedge^p(E^*)$. Cet espace est de dimension $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Notons en effet $\mathcal{I}(p)$ l'ensemble des *multi-indices ordonnés d'ordre p* , c'est-à-dire de p -uplets $I = (i_1, \dots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. Alors, si $(e^1, \dots, e^n)$ est une base de E , une base de $\bigwedge^p(E^*)$ est donnée par les formes e_I pour I dans $\mathcal{I}(p)$ définies par

$$e_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 1,$$

et

$$e_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0,$$

si $\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}$.

On remarque en particulier que $\dim \bigwedge^p(E^*) = 0$ si $p > n$ et que $\dim \bigwedge^p(E^*) = \dim \bigwedge^{n-p}(E^*)$

6.1.2 Produit intérieur

Définition 6.1.1. Si v est un vecteur de E et ω une p -forme extérieure, le produit intérieur de ω par v noté $\iota_v \omega$ est la $(p-1)$ -forme définie par

$$\iota_v \omega(u_1, \dots, u_{p-1}) = \omega(v, u_1, \dots, u_{p-1}).$$

Pour calculer le produit intérieur efficacement, il suffit de remarquer que si $I = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(e^1, \dots, e^n)$ la base duale, alors

$$\iota_{e^1} e_I = e_{I \setminus \{1\}}.$$

6.1.3 Produit extérieur

Nous définissons le produit extérieur de deux formes de degré 1 α et β comme la 2-forme $\alpha \wedge \beta$ définie par

$$\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u).$$

Nous admettons que ce produit extérieur s'étend de manière unique en une application bilinéaire $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ de $\wedge^p(E^*) \times \wedge^k(E^*)$ dans $\wedge^{p+k}(E^*)$ qui vérifie les propriétés suivantes

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (6.1)$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha) \cdot \deg(\beta)} \beta \wedge \alpha. \quad (6.2)$$

On a besoin aussi de normaliser et on demande que si $I = (i_1, \dots, i_p)$ alors

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} = e_I.$$

Explicitement le produit extérieur est donné par si $(u_1, \dots, u_p)$ sont p -vecteurs et $p = m + n$ où $m = \deg(\alpha)$ et $n = \deg(\beta)$

$$(\alpha \wedge \beta)(u_1, \dots, u_p) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \alpha(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(m)}) \beta(u_{\sigma(m+1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$$

Vérifier que le produit ainsi défini est associatif demande plus de temps.

6.1.4 Induction

Si A est une application linéaire de E dans F , elle définit une application linéaire dite *induite* et noté A^* de $\wedge^p(F^*)$ dans $\wedge^p(E^*)$ définie par

$$(A^*\omega)(u_1, \dots, u_p) = \omega(A(u_1), \dots, A(u_p)).$$

On vérifie alors que

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = A^*\alpha \wedge A^*\beta, \quad (6.3)$$

$$A^* \circ B^* = (B \circ A)^*, \quad (6.4)$$

$$A^*(\iota_{A(u)}(\omega)) = \iota_u(A^*\omega). \quad (6.5)$$

6.2 Formes différentielles

Nous allons procéder pour les p -formes comme pour les 1-formes. Soit $\wedge^p(T^*M) = \bigsqcup_{m \in M} \wedge^p(T_m^*M)$.

Définition 6.2.1. Une p -forme différentielle est une application $\omega : m \rightarrow \omega_m$ défini de M à valeurs dans $\wedge^p(T^*M)$ telle que pour tout m , on a $\omega_m \in \wedge^p(T_m^*M)$.

REMARQUES :

- si α et β sont deux formes différentielles, on définit leur produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ par

$$\alpha \wedge \beta : m \mapsto \alpha_m \wedge \beta_m.$$

Si elles ont le même degré, on définit leur somme par

$$\alpha + \beta : m \mapsto \alpha_m + \beta_m.$$

- Si $X = (x_1, x_n)$ sont des coordonnées sur un ouvert U , et ω une p -forme, il existe des fonctions uniques ω_I appelées *composantes* définies sur U , où I appartient à l'ensemble $\mathcal{I}$ de multi-indices d'ordre p telles que

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I.$$

- Par convention, une fonction est une forme de degré 0.

De manière analogue à la situation en degré 1, nous avons

Définition 6.2.2. [FORMES DIFFÉRENTIELLE LISSE] *Nous dirons qu'une p -forme différentielle ω est de classe C^k au voisinage du point m , s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ telles qu'au voisinage de m , les composantes de ω sont de classe C^k au voisinage du point m . Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est de classe C^k si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M .*

Comme précédemment nous remarquons

REMARQUES :

1. La somme de deux p -formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit extérieur de deux formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage d'un point, les composantes de ω sont de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 6.2.3. *Nous notons $\Omega^p(M)$ l'espace des p -formes différentielles de classe C^∞ sur M . L'espace $\Omega^p(M)$ est un espace vectoriel. L'espace vectoriel*

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{p=0}^{p=n} \Omega^p(M),$$

est une algèbre pour le produit extérieur.

6.2.1 Un exemple de forme de degré 2

Nous allons donner sous forme de remarque un exemple important de forme de degré 2. Soit ω une 1-forme. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m . Notons $d\omega^X$ la forme de degré 2 définies au voisinage de m par

$$d\omega^X = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Un calcul laborieux – que nous ferons plus tard de manière intelligente – montre alors que si Y est une autre système de coordonnées au voisinage de m nous avons

$$d\omega^X = d\omega^Y. \quad (6.6)$$

Nous pouvons alors définir de manière non équivoque la différentielle $d\omega$ de ω comme la 2-forme définie au voisinage de tout point m par

$$d\omega = d\omega^X,$$

pour un système X de coordonnées au voisinage de m . Le lemme de Schwarz se traduit alors par l'équation

$$d(df) = 0.$$

Nous avons mené à bien un de nos projets : trouver une condition nécessaire pour qu'une forme soit exacte.

Bien sûr une nouvelle question se pose : sous quelle condition une 2-forme est-elle de la forme $d\beta$? Dans le prochain paragraphe nous allons généraliser la construction que nous venons de donner.

6.3 Différentielle extérieure

Définition 6.3.1. Nous dirons qu'une application linéaire d définie de $\Omega^*(M)$ dans lui-même, envoyant $\Omega^p(M)$ dans $\Omega^{p+1}(M)$, est une différentielle extérieure si elle étend la différentielle des fonctions et si

- pour toute forme α nulle au voisinage d'un point, $d\alpha$ est nulle au voisinage de ce point
- pour toute forme α de degré $p - 1$, pour toute fonction f nous avons

$$d(f.d\alpha) = df \wedge d\alpha. \quad (6.7)$$

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 12. Il existe une unique différentielle extérieure sur toute variété M

Nous montrons l'unicité puis l'existence de la différentielle extérieure.

6.3.1 Unicité de la différentielle extérieure

Dans cette section, soit d une différentielle extérieure. Nous nous proposons de démontrer les propriétés suivantes

Proposition 6.3.2. (i) Pour toute famille de fonctions $f_1, \dots, f_k$ avec $k \leq p$, on a

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k).$$

(ii) Si $x_1, \dots, x_n$ sont des coordonnées définies au voisinage de m et si

$$\omega = \sum_{I \in I(p)} \omega_I dx_I,$$

alors au voisinage de m

$$d\omega = \sum_{I \in I(p)} d\omega_I \wedge dx_I.$$

Le premier point suit d'une récurrence sur k . Le deuxième est une conséquence immédiate du premier.

Comme corollaire immédiat de la dernière propriété, nous obtenons l'unicité puisque la différentielle extérieure est donnée par une formule explicite dans des coordonnées locales:

Corollaire 6.3.3. *Il existe au plus une différentielle extérieure sur une variété M .*

Démontrons la proposition

DÉMONSTRATION : Montrons tout d'abord que si $f_1, \dots, f_k$, avec $k \leq p + 1$, sont des fonctions, alors

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k)$$

Montrons ceci par récurrence sur k . Cette propriété est évidemment vrai pour $k = 1$. Par ailleurs, si la propriété est vraie au rang $k - 1$, on a

$$df_2 \wedge \dots \wedge df_k = d\alpha,$$

où

$$\alpha = f_2 df_3 \wedge \dots \wedge df_k.$$

En appliquant (6.7), on a bien

$$d(f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_k) = d(f_1 \wedge d\alpha) = df_1 \wedge d\alpha = df_1 \wedge \dots \wedge df_k.$$

Il ne reste plus qu'à montrer la dernière propriété. Soit donc $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m et ω qui s'écrit

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I, \quad (6.8)$$

au voisinage de m . En multipliant par une fonction plateau on construit des fonctions – également notées x_i et ω_I définies sur M tout entier qui coïncident avec les précédentes au voisinage de m , et qui vérifie l'égalité (6.8) au voisinage de m .

Nous savons alors d'après la première propriété et la linéarité de d que

$$d\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} d\omega_I \wedge d(x_{i_1}(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) \quad (6.9)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}(p)} d\omega_I \wedge dx_I. \quad (6.10)$$

Enfin, comme $\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \omega_I dx_I$ et ω coïncide au voisinage de m , leur image par d coïncident également au voisinage de m . $\square$

6.3.2 Existence de la différentielle extérieure

Commençons par montrer le résultat suivant

Lemme 6.3.4. *Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte au voisinage d'un point, alors l'application linéaire d^X définie pour tout k par*

$$d^X\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(k)} \omega_I dx_I\right) = \sum_{I \in \mathcal{I}(k)} d\omega_I \wedge dx_I,$$

est une différentielle extérieure sur U

DÉMONSTRATION : Soit

$$\omega = \sum_{I \in I(k)} \omega_I dx_I.$$

Alors

$$d^X(f d\omega) = d^X \left(\sum_{I \in I(k)} f d\omega_I \wedge dx_I \right) \quad (6.11)$$

$$= d^X \left(\sum_{i,I} f \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) \quad (6.12)$$

$$= \sum_{i,I} d \left(f \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (6.13)$$

$$= \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} df \wedge dx_i \wedge dx_I + \sum_{i,I} f \left(d \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (6.14)$$

$$= df \wedge \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I + f \sum_{i,j,I} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (6.15)$$

$$= df \wedge d\omega + \sum_{i < j, I} \left(\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I \quad (6.16)$$

$$= df \wedge d^X \omega. \quad (6.17)$$

Nous avons bien montré que d^X est une différentielle extérieure $\square$

Nous en déduisons alors

Proposition 6.3.5. *Soit (U, X) et (V, Y) des ouverts de cartes. Nous avons $d^X = d^Y$ au voisinage de tout point de $U \cap V$.*

DÉMONSTRATION : Ceci suit de la deuxième partie de la proposition 6.3.2 appliqué à la variété $U \cap V$. $\square$

Nous pouvons construire alors la différentielle extérieure en posant $d\omega = d^X \omega$, au voisinage d'un point m , pour des coordonnées définies au voisinage de m .

6.4 Formes différentielles induites

Définition 6.4.1. *Soit M et N deux variétés et F une application C^∞ de M dans N . Si ω est une p -forme sur N , la forme induite par F est la forme*

$$F^* \omega : m \rightarrow (\mathbb{T}_m F)^* \omega_{F(m)}.$$

En particulier, on a

$$(F^* \omega)_m(u_1, \dots, u_p) = \omega_{F(m)}(\mathbb{T}_m F(u_1), \dots, \mathbb{T}_m F(u_p)).$$

REMARQUES :

1. On remarque que si α est une forme C^∞ qui s'écrit

$$\alpha = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_p.$$

Alors

$$F^*\alpha = (f_1 \circ F) d(f_2 \circ F) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ F),$$

et en particulier $F^*\alpha$ est C^∞ . Comme toute forme C^∞ est combinaison linéaire localement de fonction sous la forme $f_1 df_2 \wedge \dots df_p$, ceci nous garantit que la forme induite d'une forme C^∞ est bien C^∞ .

2. Si F est une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = J(F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

où $J(F) : x \rightarrow \det(D_x F)$ est le jacobien de F .

6.5 Un premier formulaire

Le théorème suivant réunit les propriétés importantes de la différentielle extérieure

Théorème 13.

$$d(d\alpha) = 0, \tag{6.18}$$

$$d(F^*\alpha) = F^*d\alpha, \tag{6.19}$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta. \tag{6.20}$$

DÉMONSTRATION : Soit α forme de degré k avec $k < p - 2$, soit ψ la fonction qui vaut constamment 1. Alors

$$d(d\alpha) = d(\psi d\alpha) = d\psi \wedge d\alpha = 0.$$

Remarquons que si f est une fonction, $F^*df = d(f \circ F)$.

Ensuite, par linéarité, il suffit de la vérifier la deuxième propriété, pour une forme α qui s'écrit

$$\alpha = f_1 df_2 \wedge \dots \wedge df_p,$$

puisque toute forme localement est sous de forme qui admettent cette écriture. Alors

$$F^*\alpha = (f_1 \circ F) d(f_2 \circ F) \wedge \dots \wedge d(f_p \circ F).$$

En particulier

$$d(F^*\alpha) = df_1 \circ F \wedge df_2 \circ F \wedge \dots \wedge df_p \circ F = F^*(df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_p) = F^*d\alpha.$$

Démontrons la dernière propriété. A nouveau, il suffit de le vérifier par récurrence pour

$$\alpha = f d\alpha_0 \quad \beta = g d\beta_0$$

On a alors puisque par récurrence $d\alpha_0 \wedge d\beta_0$ est exacte:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg d\alpha_0 \wedge d\beta_0) \quad (6.21)$$

$$= gdf\alpha_0 \wedge d\beta_0 + fdg\alpha_0 \wedge d\beta_0 \quad (6.22)$$

$$= (df\alpha_0) \wedge (gd\beta_0) + (-1)^{\deg(\alpha)} (fd\alpha_0) \wedge (dg \wedge d\beta_0) \quad (6.23)$$

$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta. \quad (6.24)$$

□

6.6 Champ de vecteur et produit intérieur

6.6.1 Champ de vecteurs

Nous commençons par reproduire un schéma connu.

Définition 6.6.1. (i) L'espace tangent à M est

$$TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M.$$

(ii) Un champ de vecteur est une application $\xi : m \mapsto \xi_m$ de M dans TM telle que pour tout m , ξ_m appartienne à $T_m M$.

(iii) Un champ de vecteur ξ est de classe C^∞ sur M au voisinage de m s'il s'écrit

$$\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

pour un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de m et des fonctions ξ_i de classe C^∞

(iv) L'espace vectoriel de champs de vecteurs de classe C^∞ sur M est noté $\chi^\infty(M)$.

6.6.2 Produit intérieur

Nous pouvons maintenant définir le produit intérieur

Définition 6.6.2. Le produit intérieur de la p -forme ω et du champ de vecteur ξ est la $p-1$ -forme $\iota_\xi \omega$ définie par

$$(\iota_\xi \omega)_m = \iota_{\xi_m} \omega_m.$$

On vérifie en utilisant de coordonnées locales que si ξ et ω sont C^∞ alors $\iota_\xi \omega$ est aussi C^∞ .

6.6.3 Dérivation en un point

Nous allons introduire un nouveau point de vue sur les champs de vecteurs.

Définition 6.6.3. Une dérivation en un point m d'une variété M est une application linéaire ∂ de $C^\infty(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) $\partial f = 0$ si f s'annule au voisinage de m ,

(ii) $\partial(fg) = f(m)\partial g + g(m)\partial f$.

Nous avons alors

Proposition 6.6.4. *Un vecteur tangent X en m_0 définit une dérivation ∂_X par $\partial_X := f \rightarrow df_{m_0}(X)$. Réciproquement toute dérivation provient d'un vecteur tangent en m_0 .*

DÉMONSTRATION : Soit ∂ une dérivation en m_0 . Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées au voisinage de m_0 telles que $x_i(m_0) = 0$. Si f est une fonction C^∞ on peut écrire au voisinage de m_0

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0)x_i + \sum_i h_i x_i,$$

où les fonctions h_i s'annulent en m_0 . Nous en déduisons que

$$\partial f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(m_0)(\partial x_i).$$

Soit donc X le vecteur tangent en m défini par

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} (\partial x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Alors, pour toute fonction f ,

$$df(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (\partial x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial f.$$

Nous venons de montrer que toute dérivation provient d'un vecteur tangent. $\square$

Chapter 7

Lemme de Poincaré et cohomologie

7.1 Présentation

Définition 7.1.1. Nous dirons qu'une forme différentielle est fermée si sa différentielle extérieure est nulle, et nous dirons qu'elle est exacte si elle est la différentielle d'une forme. Nous dirons enfin que deux formes sont cohomologues si leur différence est exacte.

Toute forme exacte est fermée car $d \circ d = 0$. La réciproque dépend de la forme de l'espace comme nous l'avons vu dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

7.1.1 Espace contractile et homotopie

En anticipant sur une définition plus générale, nous dirons qu'une application – ou un objet comme une forme différentielle – est C^∞ sur $[0, 1] \times M$, si il est la restriction d'un objet C^∞ défini sur $[-\epsilon, 1 + \epsilon] \times M$.

Définition 7.1.2. Nous dirons que deux applications F et G de classe C^∞ de M dans N sont homotopes s'il existe une application H – appelée homotopie – de classe C^∞ de $M \times [0, 1]$ dans N telle que $H(m, 0) = F(m)$ et $H(m, 1) = G(m)$.

Définition 7.1.3. Nous dirons qu'une variété M est contractile si l'identité est homotope à une application constante.

REMARQUES :

1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile de même que tout ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. La contraction H est donnée par $H(s, m) = sm$.
2. Nous verrons plus tard qu'une variété compacte n'est jamais contractile.

7.1.2 Lemme de Poincaré et formule d'homotopie

Notre but est de montrer le lemme de Poincaré

Lemme 7.1.4. [POINCARÉ] *Si M est contractile, alors toute forme fermée de degré non nulle est exacte.*

Ce lemme est une conséquence de la

Lemme 7.1.5. [FORMULE D'HOMOTOPIE] *Soit F et G deux applications homotopes de M dans N . Soit ω une forme fermée sur N . Alors $F^*\omega$ et $G^*\omega$ sont cohomologues.*

Montrons que la formule d'homotopie entraîne le lemme de Poincaré. Soit P une application constante. Soit ω une forme fermée. Alors $\text{Id}^*\omega - P^*\omega$ est exacte. Or $P^*\omega = 0$ et $\text{Id}^*\omega = \omega$. Le lemme de Poincaré suit.

Avant de démontrer la formule d'homotopie nous avons besoin de décrire les formes différentielles sur $M \times [0, 1]$

7.2 Démonstration de la formule d'homotopie

Introduisons quelques notations :

7.2.1 Formes différentielles sur $M \times [0, 1]$

- Pour tout m de M , notons c_m la courbe tracée sur M donnée par $u \rightarrow (m, u)$. Nous noterons ∂_t le champ de vecteur sur $M \times [0, 1]$ défini par

$$\partial_t(m, s) = \dot{c}_m(s),$$

- Nous noterons également t la projection de $M \times [0, 1]$ sur le deuxième facteur et dt sa différentielle. On a $dt(\partial_t) = 1$
- Pour tout t , nous noterons enfin j_t l'injection de M dans $M \times [0, 1]$ donné par $m \mapsto (m, t)$

Précisons les notations dans le lemme suivant. Si β est une forme $M \times [0, 1]$, $j_t^*\beta$ devient une famille de formes sur M , dépendant d'un paramètre, sur M . On pose alors

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} j_s^* \alpha : m \rightarrow \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (j_s^* \alpha)_m.$$

Lemme 7.2.1. [UN CAS PARTICULIER DE LA FORMULE DE LIE-CARTAN] *Soit α une forme sur $M \times [0, 1]$ alors*

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=s} j_u^* \alpha = j_s^* t_{\partial_t} d\alpha + j_s^* d(t_{\partial_t} \alpha). \quad (7.1)$$

DÉMONSTRATION : Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte sur M . Nous allons raisonner dans $U \times [0, 1]$.

Pour éviter les confusions, nous noterons $\hat{x}_i$, la fonction x_i vu comme fonction sur $M \times [0, 1]$, de telle sorte que pour tout s ,

$$j_s^* d\hat{x}_i = dx_i, \quad t_{\partial_t} d\hat{x}_i = 0.$$

Supposons α de degré p . Nous pouvons écrire

$$\alpha = dt \wedge \underbrace{\left(\sum_{I \in \mathcal{I}(p)} \alpha_0^I(X, s) d\hat{x}_I \right)}_{\alpha_0} + \underbrace{\sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \alpha_1^J(X, s) d\hat{x}_J}_{\alpha_1}.$$

Nous observons que $\iota_{\partial_t} \alpha = \alpha_0$ et que

$$j_s^* \alpha = j_s^* \alpha_1 = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \alpha_1^J(X, s) dx_J.$$

Nous obtenons donc

$$d(j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha) = d(j_s^* \alpha_0), \quad (7.2)$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) dx_i \wedge dx_I. \quad (7.3)$$

Par ailleurs,

$$d\alpha = \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge dt \wedge d\hat{x}_I \quad (7.4)$$

$$+ \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \sum_i \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge d\hat{x}_J + \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dt \wedge d\hat{x}_J. \quad (7.5)$$

Ainsi

$$\iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) d\hat{x}_J - \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) d\hat{x}_i \wedge d\hat{x}_I, \quad (7.6)$$

et

$$j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1)} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dx_J - \sum_{I \in \mathcal{I}(p), i} \frac{\partial \alpha_0^I}{\partial x_i}(X, s) dx_i \wedge dx_I. \quad (7.7)$$

En conclusion

$$j_s^* d(\iota_{\partial_t} \alpha) + j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha = \sum_{J \in \mathcal{I}(p-1), i} \frac{\partial \alpha_1^J}{\partial t}(X, s) dx_J, \quad (7.8)$$

$$= \left. \frac{d}{du} \right|_{u=s} j_u^* \alpha. \quad (7.9)$$

La démonstration de notre formule est terminée. $\square$

Nous généraliserons plus tard la formule de Lie–Cartan dans le lemme 10.3.2. Nous utiliserons alors le cas particulier démontré ci-dessus. En exercice, nous proposerons une

démonstration indépendante utilisant une récurrence sur le degré de la forme ; cet exercice peut se faire dès maintenant.

EXERCICE : Nous proposons en exercice une approche plus conceptuelle de la formule de Lie-Cartan. La démonstration se fait par récurrence sur le degré de la forme α

1. Montrez la formule pour $k = 0$.
2. Supposez vraie la formule pour toute les formes de degré k , montrez la formule de Lie-Cartan pour les formes de degré $k + 1$ qui s'écrivent $f d\alpha$ avec f une fonction et α de degré k . On utilisera la propriété fondamentale de la différentielle extérieure : $d(f d\alpha) = df \wedge d\alpha$.
3. Conclure.

7.2.2 Un cas particulier de la formule d'homotopie

Nous allons démontrer un cas particulier mais plus précis de la formule d'homotopie qui entraînera la cas général. Nous montrons

Lemme 7.2.2. Soit H défini de $\Omega^{k+1}(M \times [0, 1])$ dans $\Omega^k(M)$ par

$$H(\beta) = \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} \beta ds.$$

Alors pour toute forme α définie sur $M \times [0, 1]$ nous avons

$$j_1^* \alpha - j_0^* \alpha = d(H\alpha) + Hd(\alpha).$$

DÉMONSTRATION : En effet

$$j_1^* \alpha - j_0^* \alpha = \int_0^1 \frac{d}{du} \Big|_{u=s} j_u^* \alpha ds, \quad (7.10)$$

$$= \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha + d(j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha) ds, \quad (7.11)$$

$$= \int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} d\alpha ds + d \left(\int_0^1 j_s^* \iota_{\partial_t} \alpha ds \right), \quad (7.12)$$

$$= Hd(\alpha) + d(H\alpha). \quad (7.13)$$

□

7.2.3 Preuve de la formule d'homotopie

Nous considérons une homotopie F entre F_0 et F_1 . Autrement dit,

$$F_0 = F \circ j_0,$$

$$F_1 = F \circ j_1.$$

Nous en déduisons que

$$F_1^* \alpha - F_0^* \alpha = d(H \circ F^*(\alpha)) - H \circ F^* d\alpha.$$

Le lemme suit de cette observation.

7.3 Cohomologie de Rham

Définition 7.3.1. Le k -ème groupe de cohomologie de Rham de la variété M – noté $H^k(M)$ – est le quotient des formes fermées de degré k par les formes exactes :

$$H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} / \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\}.$$

Si ω est une forme fermée, nous noterons $[\omega]$ sa classe de cohomologie, c'est-à-dire sa projection dans $H^k(M)$.

Le k -ème nombre de Betti de la variété M – noté $b^k(M)$ – est la dimension de son k -ème groupe de cohomologie de Rham.

REMARQUES :

1. Le nombre de composantes connexes de M est $b^0(M)$.
2. Le lemme de Poincaré nous dit que pour une variété contractile M , $b^k(M) = 0$ pour $k > 0$.
3. Un théorème de Rham affirme que les nombres de Betti d'une variété compacte sont finis.
4. Par définition deux formes sont cohomologues si leur classes de cohomologie sont égales.

Introduisons de nouvelles notions relatives à l'homotopie

Définition 7.3.2. Une application F de classe C^∞ d'une variété M vers une variété N est une équivalence d'homotopie s'il existe une application C^∞ de N dans N telle que $G \circ F$ est homotope à l'identité dans M et $F \circ G$ est homotope à l'identité de N . Une sous-variété N de M est un retract par déformation de M si il existe une application R de $M \times [0, 1]$ dans M telle que

- (i) Pour tout m de M , $R(m, 0) = m$.
- (ii) Pour tout n de N et tout t , $R(n, t) = n$.
- (iii) Pour tout m de M , $R(m, 1)$ appartient à N .

REMARQUES :

1. L'injection d'un retract par déformation est une équivalence d'homotopie.
2. L'injection d'un point dans une variété contractile est une équivalence d'homotopie.
3. L'application $m \mapsto (m, 0)$ est une équivalence d'homotopie de M dans $M \times]-1, 1[$.
4. Un difféomorphisme est une équivalence d'homotopie.
5. La composée de deux équivalences d'homotopie est une équivalence d'homotopie.

La proposition-définition suivante est une conséquence de l'égalité $d \circ F^* = F^* \circ d$ et sa démonstration est laissée en exercice

Proposition 7.3.3. *Soit F une application C^∞ d'une variété M dans une variété N . Il existe alors une unique application notée $[F^*]$ et dite induite en cohomologie par F – ou F^* lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté – définie de $H^k(N)$ dans $H^k(M)$ par*

$$[F^*](\omega) = [F^*(\omega)].$$

Nous avons alors

Théorème 14. *Si F et G sont deux applications C^∞ homotopes d'une variété M dans une variété N , alors*

$$[F^*] = [G^*].$$

Nous en déduisons immédiatement

Corollaire 7.3.4. *Nous avons*

- (i) *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie.*
- (ii) *Deux variétés difféomorphes ont les mêmes nombres de Betti.*
- (iii) *Si N est un retract par déformation de M , M et N ont des cohomologies isomorphes.*

DÉMONSTRATION : La démonstration du théorème est une conséquence immédiate de la formule d'homotopie. $\square$

7.4 Calculs de cohomologie

7.4.1 La cohomologie du cercle

Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Nous montrons

Théorème 15. *Nous avons*

$$b^0(S^1) = 1 \tag{7.14}$$

$$b^1(S^1) = 1 \tag{7.15}$$

$$\tag{7.16}$$

DÉMONSTRATION : On écrit $S^1 = U \cup V$, où $U = S^1 \setminus \{u\}$ et $V \setminus \{u\}$ sont deux ouverts contractiles telle que $U \cap V = A \sqcup B$, où A et B sont deux ouverts connexes disjoints.

Soit ω une 1-forme sur S^1 . Il existe f définie sur U telle que $df = \omega$ et g définie sur V telle que $dg = \omega$. En particulier $f - g$ est localement constante sur $U \cap V$. Dès lors $f - g = a$ sur A et $f - g = b$ sur B , où a et b sont deux constantes réelles.

L'application $\omega \rightarrow a - b$ ne dépend pas du choix de f et g , elle ne dépend que de la classe de cohomologie de ω . Nous venons de construire une application J de $H^1(S^1)$ dans $\mathbb{R}$. On vérifie que si $J(\omega) = 0$ alors on peut choisir les primitives f et g de façon à ce qu'elles coïncident sur $U \cap V$ et en particulier ω est exacte.

L'application J est donc injective et puisque $H^1(S^1)$ est non trivial, J est un isomorphisme. Nous venons de montrer que $b^1(S^1) = 1$. Par ailleurs S^1 étant connexe, $b^0(S^1) = 1$. $\square$

Nous notons c l'application définie de $[0, 1]$ dans S^1 par $c(t) = e^{2\pi i t}$. Remarquons que

$$\int_c df = 0.$$

En particulier l'application $[c] : H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $[\omega]$ associe $\int_c \omega$ est bien définie.

Proposition 7.4.1. *L'application $[c]$ est un isomorphisme*

DÉMONSTRATION : Nous savons que $[c]$ est surjective car $\int_c d\theta$ est non nulle. Elle est donc injective car $b^1(S^1) = 1$. $\square$

7.4.2 La cohomologie des sphères

Théorème 16. *Nous avons*

$$b^0(S^n) = 1 \tag{7.17}$$

$$b^n(S^n) = 1 \tag{7.18}$$

$$b^k(S^n) = 0 \text{ si } 0 < k < n. \tag{7.19}$$

On montre tout d'abord $H^1(S^n) = 0$ si $n > 1$. On construit ensuite un isomorphisme entre $H^k(S^n)$ et $H^{k-1}(S^{n-1})$ si $k > 2$. Détaillons cette construction.

On considère deux points u et v de S^n . On pose $U = S^n \setminus \{u\}$ et $V = S^n \setminus \{v\}$. On remarque alors que $U \cup V = S^n$ et que U et V sont contractiles.

La proposition cruciale est la suivante

Proposition 7.4.2. *Il existe une unique application J linéaire définie de $H^k(S^n)$ dans $H^{k-1}(U \cap V)$ caractérisée par*

$$J([\omega]) = [\beta - \alpha].$$

- Pour toute forme $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ telle que $d\alpha = \omega$ sur U .
- Pour toute forme $\beta \in \Omega^{k-1}(V)$ telle que $d\beta = \omega$ sur V

DÉMONSTRATION : Avec les notations de la proposition, on remarque que $\beta - \alpha$ est effectivement fermée. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que $[\beta - \alpha]$ ne dépend que de la classe de cohomologie de ω . C'est une vérification que nous laissons en exercice. La linéarité suit de l'unicité. $\square$

Nous avons alors

Proposition 7.4.3. *L'application J décrite par la proposition est une bijection si $k > 1$.*

DÉMONSTRATION : On utilise la fonction ψ qui vaut 1 au voisinage de u et 0 au voisinage de v . On remarque que si ξ est une forme définie sur $U \cap V$ alors $\psi\xi$ est définie sur U et $(1 - \psi)\xi$ est définie sur V .

Montrons l'injectivité de J . Supposons $\beta - \alpha = d\gamma$. Alors $\hat{\beta} = \beta + d((1 - \psi)\gamma)$ est définie sur U et $\hat{\alpha} = \alpha - d(\psi\gamma)$ est définie sur V . Par ailleurs $d\hat{\beta} = \omega$ sur U et $d\hat{\alpha} = \omega$ sur V . Enfin

par construction $\hat{\beta} = \hat{\alpha}$ sur $U \cap V$. Nous obtenons une primitive de ω en posant $\hat{\omega} = \hat{\beta}$ sur V et $\hat{\omega} = \hat{\alpha}$ sur U . Autrement dit si $J[\omega] = 0$, alors ω est exacte et donc $[\omega] = 0$.

Montrons la surjectivité de ω . Soit γ une $k-1$ forme fermée définie sur $U \cap V$. Posons $\omega = d\psi \wedge \gamma$ qui est bien définie sur S^n car $d\psi$ s'annule au voisinage de u et v . La forme ω est fermée et on vérifie alors que $J[\omega] = [\gamma]$. $\square$

Comme $U \cap V$ est équivalent en homotopie à S^{n-1} on en déduit que $H^k(S^n)$ est isomorphe à $H^{k-1}(S^{n-1})$. Pour achever la démonstration du théorème 16 par récurrence et se ramener à la proposition 15, il suffit de montrer

Proposition 7.4.4. *Nous avons $b^1(S^n) = 0$ si $n > 1$.*

DÉMONSTRATION : On raisonne de manière analogue. Si ω est une forme de degré 1. Elle possède des primitives f et g sur U et V respectivement. Comme $U \cap V$ est connexe, $f - g$ de différentielle nulle est une constante k . Une primitive de ω est alors définie par $\phi = f + k$ sur U et $\phi = g$ sur V . $\square$

7.4.3 Cohomologie de $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points

La proposition suivante nous permet de compter le nombre d'éléments d'une sous-ensemble du plan de manière certes compliquée mais en étudiant seulement le complémentaire de cet ensemble.

Proposition 7.4.5. *Nous avons*

$$b^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\}) = p. \quad (7.20)$$

DÉMONSTRATION : On supposera pour simplifier que $x_i = (i, 0)$. Nous pouvons écrire

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_p\} = U \cap V, \quad (7.21)$$

où U et V sont deux ouverts contractiles et où

$$U \cap V = \bigcup_{i=0}^{i=n} A_i,$$

pour des ouverts A_i connexes. Soit ω une forme fermée sur M et f et g deux primitives de ω sur U et V respectivement. On remarque que $f - g$ est localement constante et vaut une constante k_i sur A_i . On montre ensuite que l'application

$$J : [\omega] \mapsto (k_1 - k_0, \dots, k_p - k_0),$$

est bien définie de $H^1(M)$ dans $\mathbb{R}^p$. On remarque alors que J est injective. On montre que J est surjective soit en utilisant des partitions de l'unité, soit en considérant la forme

$$\omega_i = T_i^* d\theta,$$

où $T_i : x \rightarrow x - x_i$ est définie de M dans $\mathbb{R}^2$ et en calculant $J(\omega_i)$. $\square$

Chapter 8

Orientation et variétés à bord

8.1 Formes volumes et orientation

Définition 8.1.1. [FORME VOLUME] Soit M une variété. Une forme volume sur M est une forme de degré maximale qui ne s'annule jamais. Deux formes volumes α et β définissent la même orientation si $\alpha = f \cdot \beta$ où f est une fonction strictement positive. La classe d'orientation d'une forme volume est l'ensemble des formes volumes définissant la même orientation.

REMARQUES :

1. La forme $\text{Vol}_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ est une forme volume sur $\mathbb{R}^n$.
2. Si α et β sont deux formes volumes sur une variété connexe, alors soit α à la même orientation que β , soit α à la même orientation que $-\beta$.
3. Définir la même orientation est une relation d'équivalence sur les formes volumes.

Définition 8.1.2. [ORIENTATION] Une variété est orientable si elle possède une forme volume. Le choix d'une classe d'orientation définit une orientation sur M . L'orientation définie par une forme volume est celle donnée par sa classe d'orientation. L'orientation opposée de celle définie par ω est l'orientation définie par $-\omega$.

REMARQUES :

1. Une variété connexe orientable à exactement deux orientations.
2. L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle donnée par Vol_n .

Définition 8.1.3. [ORIENTATION ET DIFFÉOMORPHISME] Soit M et N sont deux variétés orientées par les formes volumes ω_M et ω_N . Un difféomorphisme ϕ de M sur N préserve l'orientation si $\phi^* \omega_N$ définit la même orientation que ω_M , il renverse l'orientation si $\phi^* \omega_N$ définit l'orientation opposée à ω_M .

REMARQUES :

1. Si ϕ est un difféomorphisme d'une variété M connexe alors soit ϕ conserve l'orientation, soit ϕ renverse l'orientation et ceci quelle que soit l'orientation de M .
2. Rappelons que si ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, son jacobien est défini par

$$J(\phi)_x = \det(D_x \phi).$$

Alors ϕ conserve l'orientation si son jacobien est positif, il renverse l'orientation si son jacobien est négatif.

La proposition suivante nous donne un critère d'orientabilité

Proposition 8.1.4. *Une variété M est orientable si et seulement si il existe un atlas $\{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ dont les changements de cartes $X_j \circ X_i^{-1}$ conservent l'orientation.*

L'orientation associée à un tel atlas est alors celle pour laquelle les coordonnées conservent l'orientation.

8.2 Variétés à bord

8.2.1 Le demi-espace

Définition 8.2.1. [DEMI-ESPACE]

- (i) Le demi-espace est

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\}.$$

- (ii) Le bord du demi espace est

$$\partial \mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

- (iii) Si U est un ouvert de $\mathbb{H}^n$, le bord de U est

$$\partial U := U \cap \partial \mathbb{H}^n.$$

- (iv) L'intérieur d'un ouvert U est l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $\text{int}(U) := U \setminus \partial U$.

- (v) Une fonction – ou une application – continue f définie sur un ouvert U de $\mathbb{H}^n$ est de classe C^∞ si elle est la restriction d'une fonction – ou d'une application – C^∞ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- (vi) Un homéomorphisme de U sur V est un difféomorphisme s'il est C^∞ ainsi que son inverse.

Signalons les propriétés intéressantes suivantes

Proposition 8.2.2. (i) Si ϕ est un difféomorphisme alors $\phi(\partial U) = \partial(\phi(U))$.

- (ii) L'application F est C^∞ , si elle est C^∞ sur $\text{int}(U)$ et si ses dérivées partielles s'étendent continûment à U .

8.2.2 Variétés à bord

Nous pouvons maintenant mot pour mot étendre la définition des variétés aux variétés à bord à en parlant de cartes à bord qui sont des cartes à valeurs dans le demi espace. Il nous reste à introduire une définition

Définition 8.2.3.

Le bord ∂M d'une variété à bord est l'ensemble de points m de M qui possède une carte (U, X) telle que $X(m)$ appartienne au bord de $X(U)$.

REMARQUES :

1. Si m est un point du bord, d'après la proposition 8.2.2, pour toute carte (V, Y) , $Y(m)$ appartient au bord de $V(Y)$.
2. Si f est une fonction d'une variété M à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si y est un nombre tel que f est une submersion le long de $f^{-1}(y)$ alors $f^{-1}[y, +\infty[$ est une variété à bord dont le bord est $f^{-1}(y)$.
3. On peut montrer – c'est le théorème du collier – que toute variété à bord est obtenu par la procédure précédente.

On définit alors comme pour les variétés les fonctions, applications, formes différentielles et champ de vecteurs C^∞ sur les variétés à bord. Nous identifierons enfin l'espace tangent au bord de M en un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à M en m . Cet hyperplan vectoriel $T_m \partial M$ sépare l'espace vectoriel $T_m M$ en deux composantes que nous pouvons distinguer

Définition 8.2.4. Soit m un point du bord de M et X un vecteur tangent en m .

- (i) Le vecteur X est normal si X n'est pas tangent à ∂M , c'est-à-dire s'il n'appartient pas à $T_m \partial M$.
- (ii) Le vecteur X est normal extérieur si il est normal et s'il existe une courbe $c : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\dot{c}(1) = X$.

On montre alors en utilisant des partitions de l'unité

Proposition 8.2.5. Toute variété à bord admet un champ de vecteur normal extérieur le long de son bord.

8.2.3 Orientation du bord d'une variété à bord

Définition 8.2.6. Soit M une variété à bord, orientée par une forme volume Ω . L'orientation canonique du bord ∂M est celle définie par $\iota_X \omega$ où X est un champ de vecteur normal extérieur.

On vérifie alors que l'orientation du bord de $\mathbb{H}^n$ donnée par cette convention est celle donnée par $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Chapter 9

Intégration des formes différentielles

9.1 Intégration sur $\mathbb{R}^n$

Nous noterons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Nous introduisons alors la définition suivante

Définition 9.1.1. Soit $\omega = f \text{Vol}_n$ une forme de degré maximale à support compacte sur $\mathbb{R}^n$. L'intégrale de la forme ω sur $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda.$$

L'intérêt de cette définition est que la formule de changement de variables s'écrit très simplement

Proposition 9.1.2. [CHANGEMENT DE VARIABLES] Soit ϕ un difféomorphisme préservant l'orientation de U sur un ouvert $\phi(U)$. Soit ω une forme de degré maximal définie sur U et à support compact. Alors

$$\int_U \phi^* \omega = \int_{\phi(U)} \omega.$$

DÉMONSTRATION : Ceci suite de la formule de changement de variables pour les fonctions :

$$\int_U (f \circ \phi) |J(\phi)| d\lambda = \int_{\phi(U)} f d\lambda.$$

□

9.2 Intégration sur une variété

Soit M une variété orientée – éventuellement à bord – de dimension n . Soit $\Omega_c^n(M)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré n à support compact.

Théorème 17. *Il existe une unique forme linéaire de $\Omega_c^n(M)$ à valeurs réelles*

$$\omega \rightarrow \int_M \omega,$$

telle que si (U, X) est une carte préservant l'orientation et si ω est à support compact dans U alors

$$\int_M \omega = \int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega.$$

Ceci nous conduit à la définition suivante

Définition 9.2.1. *Le nombre $\int_M \omega$ est l'intégrale de ω sur M .*

DÉMONSTRATION : Le premier point à démontrer est l'unicité. Soit donc $\{(V_i, Y_i)\}_{i \in I}$ un atlas préservant l'orientation et soit ϕ_i une partition de l'unité subordonnée à V_i . Soit $\omega \in \Omega_c^n(M)$; nous pouvons donc écrire

$$\omega = \sum_i \phi_i \omega,$$

où les $\phi_i \omega$ sont des formes à support dans V_i . Soit $\omega \rightarrow \int_M \omega$ vérifiant les propriétés du théorème. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{i \in I} \int_M \phi_i \omega \\ &= \sum_{i \in I} \int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Or l'équation (9.1) définit de manière univoque $\int_M \omega$. Ceci démontre bien l'unicité.

Pour démontrer l'existence, nous allons utiliser l'équation (9.1) pour définir l'intégrale. Soit donc $\mathcal{A} = \{(V_i, Y_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ comme dans le début de la démonstration et posons

$$\int_M^{\mathcal{A}} \omega := \sum_{i \in I} \int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega. \quad (9.2)$$

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que si (U, X) est une carte et ω à support dans U alors

$$\int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega = \int_M^{\mathcal{A}} \omega. \quad (9.3)$$

Comme $(Y_i^{-1})^* \phi_i \omega$ est à support dans $Y_i(U \cap V_i)$, on a par la formule de changement de variables

$$\int_{Y_i(V_i)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega = \int_{Y_i(V_i \cap U)} (Y_i^{-1})^* \phi_i \omega = \int_{X(V_i \cap U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega. \quad (9.4)$$

Ainsi,

$$\int_M^{\mathcal{A}} \omega = \sum_{i \in I} \int_{X(V_i \cap U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in I} \int_{X(U)} (X^{-1})^* \phi_i \omega \\
 &= \int_{X(U)} (X^{-1})^* \omega.
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

La démonstration du théorème est finie. $\square$

9.3 La formule de Stokes

Notre but est d'énoncer la formule de Stokes et de donner quelques applications dans la section suivante.

Théorème 18. [FORMULE DE STOKES] *Soit ω une forme à support compact sur la variété M . Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{9.6}$$

REMARQUES :

1. Cette formule est une généralisation de la formule

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

qui est la formule de Stokes en degré 1.

2. Formellement en considérant $\int_M \omega$ comme un appariement entre M et ω , la différentielle extérieure apparaît comme la duale de l'opération "prendre le bord".
3. Si le bord de M est vide, la formule de Stokes se lit

$$\int_M d\omega = 0,$$

DÉMONSTRATION : En utilisant une partition de l'unité et la linéarité de l'intégrale, nous pouvons supposer que ω est à support dans un ouvert de carte. En utilisant les coordonnées et la formule de changement de variables, nous sommes ramenés à démontrer la formule de Stokes pour une forme à support compact dans le demi espace.

Nous noterons

$$\widehat{dx_i} = \iota_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 d(\widehat{dx_i}) &= 0, \\
 dx_i \wedge \widehat{dx_i} &= \text{Vol}_n, \\
 dx_j \wedge \widehat{dx_i} &= 0 \text{ si } i \neq j.
 \end{aligned}$$

Par convention, le bord du demi-espace est orienté par $\widehat{dx}_1 = dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Soit donc ω une $(n-1)$ -forme différentielle à support compact dans $\mathbb{H}^n$. Nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \widehat{dx}_i.$$

Intégrons tout d'abord ω sur le bord du demi-espace. Les formes $\widehat{dx}_i$ s'annulent sur l'espace tangent au demi-espace pour i strictement plus grand que 1, nous en déduisons que

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 \widehat{dx}_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (9.7)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{i=n} df_i \wedge \widehat{dx}_i \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge \widehat{dx}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \text{Vol}_n. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Nous nous intéressons au terme de droite de l'équation ci-dessus. En utilisant le théorème de Fubini et en intégrant sur les droites parallèles aux axes, nous avons donc pour $i > 1$

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n = \int \int \dots \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) \widehat{dx}_i = 0. \quad (9.9)$$

La dernière égalité vient de ce que f_i est à support compact. Pour $i = 1$ nous obtenons, toujours en utilisant que f_1 est à support compact, la formule suivante

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n = \int \int \dots \int \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) \widehat{dx}_1 = \int_{\partial \mathbb{H}^n} f_1 \widehat{dx}_1. \quad (9.10)$$

En combinant les équations (9.7), (9.8) (9.9) et (9.10), nous obtenons la formule de Stokes.
□

9.4 Applications de la formule de Stokes

Nous allons trois donner trois applications différentes de la formule de Stokes, tout d'abord la formule de Green-Ostrogradski, puis le théorème du point fixe de Brouwer et enfin nous calculerons la cohomologie en degré maximal.

9.4.1 Divergence et formule de Green-Ostrogradski

Nous noterons $\langle, \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Soit $\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Par définition, la *divergence* du champ de vecteur ξ est la fonction

$$\text{div}(\xi) := \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.$$

Le lien entre la divergence et la différentielle extérieure est donnée par la formule

$$d(\iota_\xi \text{Vol}_n) = \text{div}(\xi) \text{Vol}_n,$$

dont nous laissons la démonstration au lecteur.

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui est une variété à bord, la *mesure d'aire* est la mesure donnée par la forme volume

$$\text{Aire}_{\partial\Omega} = i_N \text{Vol}_n,$$

où N est le champ de vecteur normé orthogonal à l'espace tangent au bord de Ω et dirigé vers l'extérieur de Ω .

La formule d'Ostrograski est une nouvelle formulation de la formule de Stokes

Théorème 19. [FORMULE DE GREEN-OSTROGRADSKI] *Soit ξ un champ de vecteurs défini sur un ouvert à bord Ω , alors*

$$\int_{\Omega} \text{div}(\xi) \text{Vol}_n = \int_{\partial\Omega} \langle \xi, N \rangle \text{Aire}_{\partial\Omega}.$$

DÉMONSTRATION : Cette formule suit de la formule de Stokes et de l'observation suivante : en tant que formes restreintes à $\partial\Omega$ nous avons

$$i_\xi \text{Vol}_n = \langle \xi, N \rangle \text{Aire}_{\partial\Omega}.$$

Cette formule est en fait équivalente à la formule de Stokes pour les ouverts à bord de $\mathbb{R}^n$. $\square$

9.4.2 Le théorème du point fixe de Brouwer

Soit $B_n := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq 1\}$ la *boule* de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 20. [BROUWER] *Toute application continue de la boule dans elle-même possède un point fixe. Autrement dit pour toute application F continue de B_n dans elle-même, il existe x tel que $F(x) = x$.*

La démonstration se fait en trois étapes.

Rétraction

Nous dirons qu'une application G de B_n dans $S^{n-1} = \partial B_n$ est une *rétraction* si $G|_{S^{n-1}}$ est l'identité. Nous montrons

Théorème 21. *Il n'existe pas de rétraction C^∞ de B_n dans S^{n-1} .*

DÉMONSTRATION : Soit F une telle restriction. Soit ω une forme volume sur S^{n-1} . Alors

$$\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0. \tag{9.11}$$

Par ailleurs

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} F^* \omega = \int_{B_n} d(F^* \omega).$$

Mais $d(F^* \omega) = F^*(d\omega) = 0$ car ω est de degré maximal sur S^{n-1} donc fermée. Nous obtenons la contradiction en comparant avec l'équation (9.11). Il n'existe donc pas de rétraction de B_n sur son bord. $\square$

Le cas lisse du théorème de Brouwer

Nous montrons

Théorème 22. *Toute application C^∞ de la boule dans elle-même possède un point fixe.*

DÉMONSTRATION : Nous raisonnons par l'absurde et soit G est une application sans point fixe de la boule dans elle-même, nous construisons une rétraction F de B_n dans son bord, en posant

$$F(x) = y,$$

où y est le l'intersection – du côté de x – de la droite passant par x et $G(x)$ avec le bord de S^{n-1} . Ceci nous fournit une contradiction.

Approximation et conclusion

Pour conclure, il nous suffit de montrer que s'il existe une application continue G sans point fixe, alors il existe une application C^∞ sans point fixe F de la boule dans elle-même. Soit donc G un application continue sans point fixe de la boule dans elle-même. Il existe donc un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout x de B_n , on a

$$\|x - G(x)\| > 4\epsilon.$$

Soit donc $\lambda = 1 - \epsilon$. Alors $G_\lambda : x \rightarrow \lambda G(x)$ vérifie

$$\|x - G_\lambda(x)\| \geq \|x - G(x)\| - \epsilon \|G(x)\| > 3\epsilon.$$

On sait – par exemple en utilisant une convolution – qu'il existe une application F de classe C^∞ et ϵ -proche de G_λ , c'est-à-dire que pour tout x de B_n ,

$$\|F(x) - G_\lambda(x)\| \leq \epsilon.$$

Alors F envoie la boule dans elle-même :

$$\|F(x)\| \leq \|G_\lambda(x)\| + \epsilon \leq \lambda + \epsilon = 1.$$

De plus, F n'a pas de point fixe

$$\|F(x) - x\| \geq \|G(x) - x\| - \|x - F(x)\| \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Nous pouvons donc déduire le théorème du résultat du paragraphe précédent. $\square$

9.4.3 Cohomologie en degré maximal

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 23. *Soit M une variété connexe orientée. Soit ω un forme à support compact de degré maximal défini sur M . Alors, il existe une forme α à support compact définie sur M telle que $d\alpha = \omega$ si et seulement si*

$$\int_M \omega = 0.$$

Nous en déduisons le corollaire suivant

Corollaire 9.4.1. *Si M est une variété compacte, connexe et orientable de dimension n alors $b^n(M) = 1$. En particulier, une variété compacte orientable n'est jamais contractile.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes

Le cas des sphères

Nous avons vu que $b^n(S^n) = 1$. L'application $\omega \rightarrow \int_{S^n} \omega$ est une application bien définie de $H^n(S^n)$ dans $\mathbb{R}$. S^n admettant une forme volume – qui est donc d'intégrale non nulle – cette application est une bijection. Le résultat suit.

Le cas de $\mathbb{R}^n$

On considère le difféomorphisme I de $\mathbb{R}^n$ avec $S^n \setminus \{\text{infy}\}$. Nous remarquons que ω est à support compact dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe une forme différentielle $\hat{\omega}$ nulle au voisinage de ∞ telle que $\omega = I^* \hat{\omega}$.

Soit donc ω et support compact sur $\mathbb{R}^n$ et d'intégrale nulle. Il existe alors $\hat{\omega}$ nulle au voisinage de ∞ telle que $\omega = I^* \hat{\omega}$. En particulier

$$\int_{S^n} \hat{\omega} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Nous déduisons du paragraphe précédent que $\omega = d\beta$. A priori, β n'est pas nulle au voisinage de ∞ . Par contre $d\beta = 0$ au voisinage de l'infini. Il existe donc γ définie au voisinage de ∞ telle que $d\gamma = \beta$. En choisissant ϕ constante égale à 1 au voisinage de ∞ de support inclus dans le domaine de définition de γ , on pose

$$\alpha = \beta - d(\phi\beta).$$

Alors $\alpha = 0$ au voisinage de ∞ et

$$d\alpha = d\beta = \hat{\omega}.$$

En particulier, $I^* \alpha$ est à support compact et $d(I^* \alpha) = \omega$.

Le cas général

Soit ω à support compact. Nous laissons en exercice le soin au lecteur de démontrer le résultat suivant.

Il existe une famille finie d'ouverts $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ difféomorphes à $\mathbb{R}^n$, telle que $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et $K \subset \bigcup_i U_i$.

Nous allons montrer par récurrence sur p qu'il existe une forme à support compact β_p , tel que dans $\omega - d\beta_p$ est à support compact dans $V_p = U_p \cup \dots \cup U_k$.

Supposons que cela soit vrai au rang p , posons alors $\omega_{p-1} = \omega - d\beta_{p-1}$. Nous pouvons écrire en utilisant une partition de l'unité

$$\omega_{p-1} = \gamma_p + \alpha_p,$$

où γ_p est à support compact dans U_p et α_p est à support compact dans V_p . Quelque soit l'ouvert non vide O , il existe une forme à support compact dans O et d'intégrale 1. En particulier, il existe une forme η_p à support dans $U_p \cap V_p$ telle que

$$\int_{U_p} \eta_p = \int_{U_p} \gamma_p.$$

D'après le paragraphe précédent et puisque U_p est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, il existe χ_p à support compact dans U_p telle que

$$\gamma_p = \eta_p + d\chi_p.$$

En particulier

$$\omega = \underbrace{\alpha_p + \eta_p}_{\omega_p} + \underbrace{d(\beta_{p-1} + \chi_p)}_{\beta_p},$$

où β_p est à support compact et ω_p est à support compact dans V_p . Nous avons terminé notre démonstration par récurrence. En particulier, il existe β à support compact telle que $\hat{\omega} = \omega - d\beta$ est à support compact dans U_k . Maintenant

$$\int_{U_k} (\hat{\omega}) = 0.$$

D'après le paragraphe précédent, il existe α à support dans U_k telle que

$$\hat{\omega} = d\alpha.$$

Ceci entraîne le théorème.

Chapter 10

Champ de vecteurs

Notons $\chi^\infty(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs C^∞ sur la variété M . Sur $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteur décrit géométriquement une équation différentielle indépendante du temps. Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires se traduit en termes du *flot du champ de vecteur associé*.

10.1 Flot d'un champ de vecteurs

10.1.1 Flot d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$

Un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une famille X de fonctions définie sur U .

$$X = (X_1, \dots, X_n).$$

L'équation différentielle associée est alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 &= X_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \frac{d}{dt}x_n &= X_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Une *solution* de cette équation – ou *orbite du champ de vecteur* – est donc une courbe $c = (x_1, \dots, x_n)$ telle que $\dot{c} = X(c)$.

$$\phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x),$$

La notion de *flot* est utile pour décrire les solutions.

Définition 10.1.1. [FLOT] Un flot du champ de vecteurs X défini sur un ouvert U , est une application C^∞ $\phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x)$, définie sur un ouvert O de $U \times \mathbb{R}$, vérifiant pour tout x , $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap O$ est un intervalle contenant 0 telle que

- pour tout x , $\phi_0(x) = x$,
- pour tout x , $\left. \frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \right|_{t=s} = X(\phi_s(x))$.

Les notions suivantes précisent le domaine de définition du flot.

Définition 10.1.2. [FLOT MAXIMAL, COMPLET] *Le flot ϕ est maximal si pour tout flot ϕ' est un flot défini sur O' , alors $O' \subset O$ et $\phi' = \phi|_{O'}$.*

Le flot est complet si $O = U \times \mathbb{R}$

Les théorèmes fondamentaux d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle et de leur dépendance C^∞ par rapport aux conditions initiales se réécrivent alors ainsi

Théorème 24. *Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.*

De plus, si X est à support compact dans U , alors le flot de X est complet.

L'unicité entraîne que, pourvu que les termes de l'équation soient définis, nous avons

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)).$$

En particulier si le flot est complet, pour tout t , l'application ϕ_t est un difféomorphisme. Ainsi, l'application $t \rightarrow \phi_t$ est un morphisme de groupe de $\mathbb{R}$ dans le groupe de difféomorphisme de $\mathbb{R}$.

10.1.2 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété

Les notions d'orbites et de flot d'un champ de vecteur se généralisent aux variétés. Soit donc X un champ de vecteur défini sur une variété M .

Définition 10.1.3. *Une orbite du champ de vecteur est une courbe c telle que $\dot{c} = X(c)$.*

Un flot du champ de vecteurs X , est une application $C^\infty \phi : (x, t) \rightarrow \phi(x, t) = \phi_t(x)$, définie sur un ouvert O de $M \times \mathbb{R}$ contenant $M \times \{0\}$ telle que

- *pour tout x , $\phi_0(x) = x$,*
- *pour tout x , $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x))$.*

Le flot est maximal si pour tout flot ϕ' défini sur O' , alors $O' \subset O$ et $\phi' = \phi|_{O'}$.

Le flot est complet si $O = U \times \mathbb{R}$

La démonstration du théorème 25 étant locale, elle se généralise immédiatement au cas des variétés.

Théorème 25. *Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.*

De plus, si le champ de vecteur est à support compact, alors son flot X est complet.

10.1.3 Flot d'un champ de vecteur dépendant du temps

Un champ de vecteurs dépendant du temps est une famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de champs de vecteurs X_t pour t variant dans $\mathbb{R}$. Cette famille est C^∞ , si dans une carte $(U, (x_1, \dots, x_n))$ on peut écrire

$$X_t(m) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(m, t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où les fonctions f_i définies sur $U \times \mathbb{R}$ sont C^∞ .

Un tel champ est à support compact s'il est nul en dehors de $K \times \mathbb{R}$ où K est un compact de M

Définition 10.1.4. Le flot d'un champ de vecteur dépendant du temps est une application de O dans M où O est un ouvert de $M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenant $M \times \{(s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$$(m, t, s) \rightarrow \phi_t^s(m),$$

telle que

- pour tout x , $\phi_s^s(x) = x$
- pour tout x , $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t^u(x) \Big|_{t=s} = X(\phi_s^u(x))$.

On définit de la même manière les flots maximaux et complets (tels que $O = M \times \mathbb{R}$).
Le théorème d'existence et d'unicité du flot est également vrai dans ce contexte.

Théorème 26. Tout champ de vecteur admet un unique flot maximal.

De plus, si le champ de vecteur est à support compact, alors son flot X est complet.

La démonstration, laissée en exercice, consiste à regarder le champ de vecteurs dépendant du temps X_t comme un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$. Puis à construire le flot $\hat{\phi}$ de ce champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$, et à remarquer que $\hat{\phi}_t(m, s) = (K_t(m, s), s + t)$. L'application

$$(m, t, s) \rightarrow K_{t-s}(m, s),$$

est alors le flot de X_t .

REMARQUES :

1. Par unicité, le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps vérifie

$$\phi_v^u \circ \phi_u^s = \phi_v^s.$$

2. En particulier, si le flot est complet alors pour tout s et t , ϕ_t^s est un difféomorphisme de M , d'inverse ϕ_s^t .

10.2 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

10.2.1 Dérivations

Nous avons vu que un vecteur tangent peut-être défini comme une dérivation en un point. De manière analogue, un champ de vecteur peut-être défini comme une dérivation.

Définition 10.2.1. Une dérivation sur une variété M est un endomorphisme linéaire ∂ de $C^\infty(M)$

- (i) $\partial f = 0$ s'annule au voisinage d'un point m , si f s'annule au voisinage de m ,
- (ii) $\partial(fg) = f\partial g + g\partial f$.

Nous avons alors

Proposition 10.2.2. Un champ de vecteur X en m_0 définit une dérivation ∂_X par $\partial_X := f \rightarrow df(X)$. Réciproquement toute dérivation provient d'un champ de vecteurs.

De nombreuses notations – dépendantes du contexte – sont utilisées pour noter la fonction $df(X)$ pour un champ de vecteur X et une fonction f : $L_X f$, $X.f$ ou $\partial_X f$.

10.2.2 Crochet de Lie

Nous déduisons de la caractérisation des champs de vecteurs comme des dérivations, l'importante définition suivante qui suit du fait élémentaire que si ∂_1 et ∂_2 sont des dérivations alors

$$[\partial_1, \partial_2] : f \rightarrow \partial_1(\partial_2(f)) - \partial_2(\partial_1(f)),$$

est également une dérivation.

Définition 10.2.3. Le crochet de Lie des deux champs de vecteurs X et Y , est le champ de vecteur $[X, Y]$ défini par

$$L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y].$$

De la définition, nous déduisons aisément les propriétés formelles suivantes

Proposition 10.2.4. Nous avons

$$\begin{aligned} [fX, Y] &= f.[X, Y] - L_Y(f).X, \\ [X, Y] &= -[Y, X], \\ 0 &= [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]. \end{aligned}$$

De la première formule, nous déduisons l'expression du crochet de Lie en coordonnées. Si $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_i g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Les deux dernières donnent à l'espace vectoriel des champs de vecteurs une structure d'algèbre de Lie.

10.2.3 Champ de vecteur et difféomorphismes

Nous verrons plus tard que si deux champs de vecteurs X et Y ont pour flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, alors $[X, Y] = 0$ si et seulement si ψ_s et ϕ_t commutent pour tout t .

Définition 10.2.5. Soit X un champ de vecteur sur M et ϕ un difféomorphisme de M sur N . Le transporté de X par ϕ est le champ de vecteur défini sur N par

$$\psi_*(X)(n) = T_{\psi^{-1}(n)}\psi(X(\psi^{-1}(n))).$$

On note aussi

$$\psi^* = (\psi^{-1})_*.$$

REMARQUES : On vérifie aisément les propriétés suivantes

1. $(\phi \circ \psi)_*(X) = \phi_*(\psi_*(X))$.
2. si c est une orbite de X alors $\psi \circ c$ est une orbite de $\psi_*(X)$
3. Si $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de X , le flot de $\psi_*(X)$ est $\{\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Le crochet des champs de vecteurs s'interprètent à l'aide du transport.

Proposition 10.2.6. *Soit X un champ de vecteur de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, alors*

$$\left. \frac{d}{ds}(\phi_s)^*(Y) \right|_{s=0} = [X, Y]$$

De plus, si $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de Y , alors $[X, Y] = 0$ si et seulement si ϕ_s et ψ_t commutent pour tout s et t

DÉMONSTRATION : Soit $Z = \left. \frac{d}{ds}(\phi_s)^*(Y) \right|_{s=0}$. Soit f une fonction, calculons $L_Z f$.

Par définition

$$L_Z f(m) = df_m \left(\left. \frac{d}{ds}(\phi_s^*(Y)(m)) \right|_{s=0} \right) \quad (10.1)$$

$$= df_m \left(\left. \frac{d}{ds}(\tau_{\phi_s(m)} \phi_{-s}(Y(\phi_s(m)))) \right|_{s=0} \right) \quad (10.2)$$

$$= \left. \frac{d}{ds} (df_m (\tau_{\phi_s(m)} \phi_{-s}(Y(\phi_s(m)))) \right|_{s=0} \quad (10.3)$$

$$= \left. \frac{d}{ds} df_{\phi_s(m)} (f \circ \phi_{-s})(Y(\phi_s(m))) \right|_{s=0}. \quad (10.4)$$

On considère la fonction $g_s(m) = df_m(f \circ \phi_{-s})(Y(\phi_s(m)))$. Nous venons de montrer que

$$L_Z f(m) = \left. \frac{d}{ds} g_s(\phi_s(m)) \right|_{s=0}.$$

Or

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} g_t(\phi_s(m)) \right|_{s=0} &= L_X g_t(m), \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} g_s(\phi_t(m)) \right|_{s=0} &= -d_{\phi_t}(m) L_X f(Y(\phi_t(m))). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$L_Z(f) = L_X g_0 - d(L_X f)(Y) = (L_X L_Y - L_Y L_X)f = [X, Y]f$$

Nous venons de démontrer la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que ϕ_s et ϕ_t commutent pour tout s et t . Comme le flot de $(\phi_s)^*(Y)$ est $\{\phi_s \circ \psi_t \circ \phi_{-s}\}_{t \in \mathbb{R}} = \{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, nous en déduisons que $(\phi_s)^*(Y) = Y$. Donc d'après la première partie de la proposition $[X, Y] = 0$.

Supposons maintenant que $[X, Y] = 0$. Alors comme $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$,

$$\left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(Y) \right|_{s=t} = \phi_t \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(Y) \right|_{s=0} = 0.$$

Nous en déduisons que pour tout t , les deux champs de vecteurs $\phi_t^*(Y)$ et Y sont égaux, leurs flots coïncident donc. Autrement dit

$$\{\phi_s \circ \psi_t \circ \phi_{-s}\}_{t \in \mathbb{R}} = \{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Ainsi ϕ_s et ϕ_t commutent pour tout s et t . $\square$

10.3 Calcul de Lie-Cartan

Nous avons vu agir les champ de vecteurs sur les fonctions par la formule

$$L_X f = \left. \frac{d}{ds} f \circ \phi_s \right|_{s=0},$$

lorsque ϕ_s est le flot de X . Nous généralisons cette action aux formes par la définition.

Définition 10.3.1. [DÉRIVÉE DE LIE D'UNE FORME] Soit X un champ de vecteur de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et ω une forme différentielle, alors la dérivée de Lie de ω par rapport au champ de vecteur X est la forme différentielle

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{ds} \phi_s^*(\omega) \right|_{s=0}.$$

10.3.1 La formule de Lie-Cartan

La formule suivante est fondamentale, elle généralise le lemme 7.2.1

Lemme 10.3.2. [FORMULE DE LIE-CARTAN] Soit ω une forme différentielle et X un champ de vecteur. Alors

$$L_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega.$$

DÉMONSTRATION : Lorsque la variété M est de la forme $M = N \times \mathbb{R}$, et $X = \partial_t$, la formule de Lie-Cartan est exactement la formule du lemme 7.2.1.

Supposons maintenant que X est un champ de vecteur quelconque sur une variété M de flot $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Considérons l'application ϕ de $M \times \mathbb{R}$ dans M donnée par $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Cette application est une submersion.

Nous remarquons que $T_{(m,t)}\phi(\partial_t) = X(\phi_t(m))$. Nous en déduisons que, si ω une forme différentielle, a lors

$$\phi^*(\iota_X \omega) = \iota_{\partial_t} \phi^*(\omega).$$

Notons enfin $j_s(m) = (m, s)$. Alors, comme $\phi_s = \phi \circ j_s$, nous en déduisons en appliquant la formule de Lie Cartan en appliquant le lemme 7.2.1 appliqué à $\phi^*(\omega)$. $\square$

EXERCICE : Nous proposons en exercice une approche plus conceptuelle de la formule de Lie-Cartan qui n'utilise pas le cas particulier du cylindre $M \times [0, 1]$. La démonstration se fait par récurrence sur le degré de la forme α

1. Montrez la formule pour $k = 0$.
2. Supposez vraie la formule pour toute les formes de degré k , montrez la formule de Lie-Cartan pour les formes de degré $k + 1$ qui s'écrivent $f d\alpha$ avec f une fonction et α de degré k . On utilisera la propriété fondamentale de la différentielle extérieure : $d(f d\alpha) = df \wedge d\alpha$.
3. Conclure.

10.3.2 Un formulaire

La proposition suivante suit des définitions.

Proposition 10.3.3. *Nous avons*

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta, \quad (10.5)$$

$$L_{[X,Y]}\beta = L_X(L_Y\beta) - L_Y(L_X\beta). \quad (10.6)$$

Si ω est une forme de degré 1

$$d\omega(X, Y) = (L_X\omega)(Y) - (L_Y\omega)(X) - \omega[X, Y]. \quad (10.7)$$

Si $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille C^∞ à un paramètre de difféomorphismes et si $X(m) = \left. \frac{d}{dt}\phi_t(m) \right|_{t=0}$, alors pour toute forme différentielle ω

$$\left. \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega \right|_{t=0} = L_X\omega.$$

Ces propriétés sont laissées en exercice. Pour la dernière, on la démontrera d'abord pour les fonctions puis on utilisera le produit extérieur pour la généraliser.

10.4 Applications : construction de difféomorphismes

Dans les deux applications qui suivent, nous allons utiliser les champs de vecteurs pour construire des difféomorphismes.

10.4.1 Transitivité du groupe des difféomorphismes

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 27. *Soit M une variété connexe et x et y deux points de M , il existe alors un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(x) = y$.*

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que x et y sont dans le domaine d'une carte (U, ϕ) telle que $\phi(U)$ est une boule, soit $x_0 = \phi(x)$ et $y_0 = \phi(y)$. Nous pouvons alors construire un champ de vecteur $\hat{X}$ sur $\phi(U)$ défini par

$$\hat{X}(z) = \chi(z) \cdot (y_0 - x_0),$$

où χ est une fonction à support dans $\phi(U)$ qui vaut 1 au voisinage du segment $[x_0, y_0]$. La courbe $c : t \rightarrow ty_0 + (1-t)x_0$ alors une orbite de ce champ de vecteur. En particulier si $\{\hat{\psi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de $\hat{X}$, alors $\hat{\psi}_1(x_0) = y_0$.

Comme $\hat{X}$ est à support compact dans $\phi(U)$, il existe un champ de vecteur X , de flot $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ à support dans U tel que $\phi_*(X) = \hat{X}$. En particulier, $\phi_1(x) = y$. Le difféomorphisme ϕ_1 envoie donc x sur y .

Fixons x un point de M et soit O_x l'ensemble des points y de M tel qu'il existe un difféomorphisme envoyant x sur y .

Le paragraphe précédent entraîne que O_x est ouvert. En effet, si $y \in O_x$ et $\phi_0(x) = y$ il existe un voisinage U de y , tel que pour tout z de U , il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(y) = z$, dès lors $\phi \circ \phi_0(x) = z$. Ainsi $U \subset O_x$ et O_x est ouvert.

De même, O_x est fermé. Soit y un point de l'adhérence de O_x et U le voisinage de y tel que pour tout z de U , il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(y) = z$. Soit alors $z \in O_x \cap U$. Il existe donc ϕ_0 tel que $\phi_0(x) = z$. En particulier, $\phi^{-1} \circ \phi_0(x) = y$. Ainsi $y \in O_x$ et O_x est fermé. Par connexité, il existe $O_x = M$. $\square$

On peut montrer de la même manière que pour tout n si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux n -uplets de points distincts de M , il existe un difféomorphisme ϕ tel que pour tout i , $\phi(x_i) = y_i$.

10.4.2 Le lemme de Moser

Le lemme de Moser montre que le groupe des difféomorphismes est transitif sur les formes volumes de même volume.

Lemme 10.4.1. *Soit M une variété connexe, compacte orientée. Soit α_0 et α_1 deux formes volumes telles que*

$$\int_M \alpha_0 = \int_M \alpha_1.$$

Alors, il existe un difféomorphisme ϕ tel que

$$\phi^*(\alpha_1) = \alpha_0.$$

DÉMONSTRATION : Nous déduisons des hypothèses que la forme $\alpha_0 - \alpha_1$ est exacte. Soit donc ω telle que $d\omega = \alpha_0 - \alpha_1$. Considérons par ailleurs la forme $\alpha_t = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$. Soit X_t le champ de vecteurs dépendant du temps et défini par $\omega = \iota_{X_t}\alpha_t$. Par la formule de Lie-Cartan

$$L_{X_t}\alpha_t = \alpha_0 - \alpha_1.$$

Soit $\{\phi_t^s\}_{s,t \in \mathbb{R}}$ le flot de X_t . Nous savons que

$$\phi_t^u \circ \phi_u^s = \phi_t^s,$$

rappelons également que

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi_t^s)(m) \right|_{t=s} = X_s(m),$$

nous obtenons donc

$$\left. \frac{d}{dt}(\phi_t^0)^*\alpha_t \right|_{t=s} = (\phi_s^0)^* \left. \frac{d}{dt}(\phi_t^s)^*\alpha_t \right|_{t=s} \quad (10.8)$$

$$= (\phi_s^0)^*(L_{X_s}\omega_s + \alpha_1 - \alpha_0) \quad (10.9)$$

$$= 0. \quad (10.10)$$

Nous en déduisons que $(\phi_t^0)^*\alpha_t$ est indépendant du temps et en particulier

$$(\phi_1^0)^*\alpha_1 = \alpha_0.$$

$\square$

Bibliography

- [B1] M. BERGER, Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, Éléments de topologie algébrique. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, Topologie des surfaces. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, Topology from the differentiable viewpoint. The University Press of Virginia, (1965).