Géométrie hyperbolique

François Labourie

10 mars 2010

Table des matières

1 Droites projectives réelle et complexe **4**
- 1.1 La droite projective réelle . . . 4
  - 1.1.1 Classification des homographies réelles . . . 4
- 1.2 Droite projective complexe et cercles projectifs . . . 5
  - 1.2.1 Cercles orthogonaux . . . 6
  - 1.2.2 Angle . . . 6

2 Le plan hyperbolique **8**
- 2.1 Présentation axiomatique . . . 8
  - 2.1.1 Involutions préservant le birapport . . . 8
  - 2.1.2 Isométries . . . 10
  - 2.1.3 Géodésiques orthogonales . . . 11
  - 2.1.4 Symétries axiales . . . 11
  - 2.1.5 Distance hyperbolique et paramétrisation . . . 12
  - 2.1.6 Angle entre deux géodésiques . . . 13
- 2.2 Construction du plan hyperbolique : différent modèles . . . 13
  - 2.2.1 Le modèle des involutions . . . 13
  - 2.2.2 Le modèle projectif complexe du plan hyperbolique . . . 14
  - 2.2.3 Le modèle du demi-plan de Poincaré . . . 16
  - 2.2.4 Le modèle du disque de Poincaré . . . 18
  - 2.2.5 Le modèle projectif de Klein . . . 19

3 Le plan hyperbolique comme espace métrique **21**
- 3.1 Reconstruction de la géométrie à partir de la métrique . . . 21
  - 3.1.1 Géodésiques . . . 21
  - 3.1.2 Le bord à l'infini . . . 21
  - 3.1.3 Birapport . . . 22
  - 3.1.4 Triangles . . . 23
- 3.2 Extension des isométries . . . 23
- 3.3 Au voisinage d'un point . . . 24
  - 3.3.1 Les boules ouvertes . . . 24
  - 3.3.2 Angle . . . 25
- 3.4 Comment caractériser l'espace hyperbolique . . . 25

4 Les figures du plan hyperbolique **26**
- 4.1 Demi-plan, quadrant, polygone convexes, triangles . . . 26
  - 4.1.1 Ensemble convexe . . . 26
  - 4.1.2 Polygones convexes . . . 26
  - 4.1.3 Triangles . . . 27
- 4.2 Hexagones droits . . . 28
- 4.3 Aire . . . 29
- 4.4 La formule de Gauß-Bonnet . . . 30

4.4.1 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles idéaux . . . 30
4.4.2 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles avec deux points à l'infini . . 31
4.4.3 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles . . . 32

5 Surfaces hyperboliques 33
5.1 Premières définitions . . . 33
5.1.1 Cartes et coordonnées . . . 34
5.1.2 Bord et coins . . . 34
5.2 Longueur des courbes et distance riemannienne . . . 34
5.2.1 Courbes et longueurs . . . 34
5.2.2 La distance riemannienne . . . 36
5.3 Géodésiques . . . 37
5.3.1 Extension des géodésiques . . . 38
5.3.2 Géodésiques globalement minimisantes . . . 39

6 Construction par recollement 41
6.1 Recollement et espace quotient . . . 41
6.2 Une distance sur le quotient . . . 42
6.2.1 Courbes et longueurs . . . 42
6.2.2 Distance riemannienne . . . 44
6.2.3 Recollement de surface . . . 44
6.3 Hexagones droits et pantalons . . . 45

7 Constructions par quotient 46
7.1 Groupes agissant proprement discontinuement sans point fixe . . . 46
7.1.1 La surface hyperbolique quotient . . . 46
7.2 Sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ . . . 48
7.2.1 Sous-groupe discrets et sans torsion . . . 48
7.3 Quotient et pavages . . . 51
7.3.1 Domaine fondamental . . . 51
7.4 Des exemples de groupes discrets . . . 52
7.4.1 Groupes élementaires . . . 52
7.4.2 Groupes engendrés par des reflexions . . . 52
7.4.3 Groupes de triangles . . . 53

8 Les applications à valeurs dans dans le cercle 54
8.1 Motivation . . . 54
8.2 Le théorème de relèvement . . . 54
8.3 Degré . . . 55

9 Groupe fondamental 56
9.1 Chemins et lacets . . . 56
9.1.1 Définitions . . . 56
9.1.2 Composition et inverse . . . 56
9.2 Homotopie . . . 57
9.2.1 Exemples d'homotopie . . . 57
9.3 Simple connexité . . . 57
9.3.1 Premiers exemples . . . 57
9.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental . . . 58
9.4.1 Propriétés fondamentales . . . 58
9.4.2 Le groupe fondamental . . . 58
9.4.3 Exemples . . . 58
9.5 Changement de points base et applications . . . 59
9.5.1 Chemins et changements de points base . . . 59
9.5.2 Applications entre espaces . . . 59

9.6 Surfaces hyperboliques simplement connexes 59
9.6.1 Isométries et chemins de boules 59
9.6.2 Chemin de boules homotopes 60
9.6.3 Surfaces hyperboliques simplement connexes 62

10 Revêtements 63
10.1 Introduction 63
10.1.1 Définition 63
10.1.2 Exemples 63
10.2 Relèvement des homotopies 65
10.2.1 Relèvements 65
10.2.2 Sections 65
10.2.3 Relèvement des chemins 65
10.2.4 Relèvement des homotopies 66
10.3 Critère de relevabilité 67
10.3.1 Automorphismes d'un revêtement 68
10.4 Construction d'un revêtement simplement connexe 69
10.4.1 Construction d'un revêtement simplement connexe 69
10.4.2 Propriété universelle 70
10.4.3 Unicité du revêtement simplement connexe 71

11 Revêtement des surfaces hyperboliques 72
11.1 Le théorème d'uniformisation 72
11.2 Revêtements 72
11.2.1 Complétude 73
11.3 Toute isométrie locale est un revêtement 74
11.3.1 Préliminaires : isométries locales et revêtement 74
11.3.2 Preuve du théorème 74
11.4 Uniformisation des surfaces hyperboliques 74

12 Décomposition en pantalons 76
12.1 Géodésique fermées 76
12.2 Courbes plongées 76
12.3 Une caractérisation des surfaces hyperboliques simplement connexes 76
12.3.1 Surfaces à coins carrés 76
12.4 Une caractérisation géométrique des pantalons 76
12.5 Classification des surfaces 77

13 Géométrie différentielle des surfaces 78
13.1 Cartes et atlas 78
13.1.1 Exemples 78
13.2 Fonctions et applications différentiables 79
13.2.1 Fonctions 79
13.2.2 La différentielle d'une fonction 79
13.2.3 Applications différentiables 80
13.3 Formes différentielles 80
13.3.1 Formes différentielles sur les variétés 80
13.3.2 Intégration des formes différentielles sur les courbes 82
13.3.3 Premier groupe d'homologie 83
13.3.4 Lemme d'homotopie 83
13.3.5 Formes fermées et groupe fondamental 83
13.3.6 Le théorème d'Hurewicz 83

Chapitre 1

Droites projectives réelle et complexe

1.1 La droite projective réelle

La structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ donne naissance à une structure particulière sur la droite projective réelle.

Rappelons que deux repères d'un plan vectoriel définissent la *même orientation* si la matrice de changement de repère à un déterminant positif, définir la même orientation est une relation d'équivalence. Une *orientation* sur un plan vectoriel réel est la donnée d'une classe d'équivalence pour la relation précédente. Dans un plan orienté, un repère *positivement orienté* est un repère qui appartient à la classe d'équivalence définit par l'orientation. Un plan vectoriel possède deux orientations.

L'orientation d'un plan vectoriel donne naissance à un *ordre cyclique* sur la droite projective associée. Nous dirons que trois points (a, b, c) sont *positivement ordonnés* si la base correspondante est positivement orientée.

Une homographie *préserve l'orientation* si elle envoie trois points positivement ordonnés sur trois points positivement ordonnés. De manière équivalente, le déterminant de l'application linéaire sous-jacente est positif.

1.1.1 Classification des homographies réelles

Une homographie différente de l'identité fixe au plus deux points.

Définition 1.1.1 *Soit A une homographie de la droite projective réelle*

1. *Si A ne fixe aucun point, alors A est dite* elliptique.
2. *Si A fixe exactement un point de la droite projective réelle, alors A est dite* parabolique.
3. *Si A fixe exactement deux points et préserve l'orientation alors A est dite* hyperbolique.

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries. Cette classification s'exprime en fonction du déterminant et de la trace. Si une homographie A est représentée par une matrice B de déterminant positif, nous poserons $\operatorname{tr}(A) = |\operatorname{tr}(B/\sqrt{\det(B)})|$.

Théorème 1.1.2 [Classification des homographies réelles] *Nous avons la classification suivante des homographies préservant l'orientation.*

1. *Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) < 2$ alors A est elliptique.*
2. *Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 2$, alors A est parabolique.*
3. *Si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 2$, alors A est hyperbolique.*

Remarquons que suivant les cas l'homographie A est conjuguée successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Droite projective complexe et cercles projectifs

Soit V un plan complexe. C'est aussi un espace vectoriel réel de dimension 4, muni d'une application linéaire J de carré -1. Soit P un plan vectoriel dans V. Nous avons alors deux cas

- $P = JP$ et dans ce cas P est une *droite complexe*
- $P + JP = V$ et on dit que P est un *plan totalement réel.*

Un plan vectoriel totalement réel P définit un sous-ensemble $\mathcal{C}_P$ de la droite projective complexe $\mathbb{P}(V)$ que nous appellerons *cercle projectif* :

$$\mathcal{C}_P = \{D \in \mathbb{P}(V) \mid \dim_{\mathbb{R}}(P \cap D) = 1\}.$$

On remarque que ce cercle $\mathcal{C}_P$ est en bijection avec la droite réelle $\mathbb{P}(P)$. La bijection étant donnée par $D \mapsto D \cap P$.

Remarques :

Nous allons identifier ces cercles projectifs avec des cercles usuels dans une carte affine. Nous commençons par une première caractérisation.

Proposition 1.2.1 *Soit a une droite complexe et O_a la carte affine correspondante. Si P est un plan totalement réel rencontrant a, alors $\mathcal{C}_P \cap O_a$ est une droite réelle affine. Réciproquement toute réelle droite affine de O_a est de cette forme.*

Démonstration : En effet tout plan totalement réel P de V passant par a est de la forme $P = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ avec e_1 appartenant à a. On considère ensuite les coordonnées homogènes associée et on remarque qu'une droite complexe de coordonnées homogènes $[a : b]$ rencontre P si et seulement si a/b est réel ou infini. $\square$

Proposition 1.2.2 *Par trois points distincts (a, b, c) passe exactement un cercle projectif. Ce cercle projectif $\mathcal{C}$ est l'ensemble*

$$\mathcal{C} = \{z \mid \Im[a, b, c, z] = 0\}.$$

Un cercle projectif dans une carte affine quelconque est un cercle ou une droite.

Démonstration : On envoie a à l'infini. La première partie du résultat se déduit du fait qu'un cercle projectif passant par a devient une droite affine et qu'il existe une seule droit affine passant par trois points. Si on envoie (a, b, c) sur $(\infty, 0, 1)$, la droite affine correspondante est l'axe réel ce qui entraîne la deuxième partie du résultat. Un calcul classique nous dit que dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$0 = \Im\left(\frac{(a-c)(b-z)}{(a-z)(b-c)}\right) = \Im[a, b, c, z],$$

définit un cercle ou une droite réelle. $\square$

1.2.1 Cercles orthogonaux

On dira que deux cercles C_1 et C_2 se coupant en deux points distincts a et b sont *orthogonaux* si pour tout x de C_1 et y de C_2, $\Re([a,b,x,y]) = 0$.

Proposition 1.2.3 *Nous avons les propriétés suivantes*

1. *Deux cercles sont orthogonaux s'il existe une carte affine dans lesquels ils donnent naissance à des droites orthogonales.*
2. *Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectant en a et b sont orthogonaux s'il existe des points x de $\mathcal{C}_1$ et y de $\mathcal{C}_2$ distincts de a et b tels que $\Re([a,b,x,y]) = 0$. En particulier*
$$\mathcal{C}_2 = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \Re([a,b,x,y]) = 0\}.$$
3. *Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles. Si C_1 est une droite dans une carte affine tel que $\infty \notin C_2$, alors C_2 est orthogonal à C_1 si et seulement si dans cette carte sont centre est sur C_1.*
4. *Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'intersection non vide et coupant orthogonalement un troisième cercle $\mathcal{C}$ en a_1, b_1 et a_2, b_2 respectivement sont orthogonaux si $[a_1, b_1, a_2, b_2] = -1$.*

Démonstration : Pour la première propriété si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{a,b\}$, on choisit une carte affine envoyant les b à l'infini et a sur 0. Les deux cercles deviennent des droites réelles de $\mathbb{C}$ passant par l'origine et le résultat suit.

Pour la deuxième propriété on utilise des coordonnées affines pour lesquelles $\mathbb{C}_1$ est l'axe réel. On note a et b les intersections de C_2 avec l'axe réel. On suppose que $a = -b$ et soit ic et $i.d$ les intersections de C_2 avec l'axe imaginaire.

Comme $\mathcal{C}_2$ est orthogonal à l'axe réel, on a en posant
$$0 = \Re[a, -a, i.c, \infty] = \Re\left(\frac{(a - i.c)}{(-a - i.c)}\right) = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2}.$$
Nous obtenons donc que $c = \pm a$ et donc que le centre de $\mathcal{C}_2$ est 0.

Pour la dernière propriété on suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en 0 dans une carte affine. Alors C est centré en 0 d'après la propriété précedente. On suppose de plus que C_1 est l'axe réel qui coupe $\mathcal{C}$ en R et $-R$. De même, C_2 coupe $\mathcal{C}$ en Ru avec $|u| = 1$. Ces cercles se coupent orthogonalement si $u = \pm i$.
$$[u.R, -uR, R, -R] = \frac{(u-1)^2}{(u+1)^2}.$$
Or
$$\frac{(u-1)^2}{(u+1)^2} = -1$$
si et seulement si $u^2 = 1$, c'est-à-dire $u = \pm i$. □

1.2.2 Angle

On rappelle également que deux vecteurs d'une droite affine complexe ont un angle, de même que deux droites réelles. Une orientation du plan P donne naissance à une orientation du cercle $\mathcal{C}_P$ puisque ce dernier est identifié à la droite projective de P. On parle alors de *cercle orienté*.

Proposition 1.2.4 *Soit C_1 et C_2 deux cercles orientés se coupant en deux points distincts a et b. Soit x et y des points de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ distincts de a et b, tels que (a,x,b) est positivement ordonné, de même que (a,y,b). L'argument du birapport $[a,b,y,x]$ est indépendant du choix de x et y. Cet argument s'appelle* l'angle *des deux cercles.*

Cet angle est également l'angle d'intersection des deux cercles dans une carte affine quelconque.

L'angle est préservé par les transformations projectives.

On remarque que deux cercles sont orthogonaux si leur angle est $\pi/2$.

Démonstration : On envoie les deux points d'intersection sur 0 et ∞. La première partie de la proposition est donc vérifiée. Par construction, l'angle est alors l'angle entre les droites réelles affines correspondantes.

En ce qui concerne la deuxième partie nous devons utiliser la propriété suivante des homographies : soit H une homographie, soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{C}$, alors l'angle entre u et v est égal à l'angle entre $D_xH(u)$ et $D_xH(v)$, où D_xH est la différentielle de H en un point x quelconque. Ceci provient de ce que DH est une application linéaire complexe.

Deux cercles s'envoient par une homographie sur deux droites affines. D'après la remarque que nous venons de faire l'angle entre ces deux cercles est égal à l'angle entre ces deux droites. □

Voici d'autres moyens de calculer de l'angle de deux cercles. Tout d'abord nous avons la proposition

Proposition 1.2.5 *Soit C_1 et C_2 deux cercles se coupant en deux points. On se donne un troisième cercle D qui coupe intersecte C_1 et C_2 orthogonalement en (a_1, b_1) et (a_2, b_2). L'angle β entre C_1 et C_2 se calcule en fonction du birapport des quatre points $[a_1, b_1, a_2, b_2]$ par la formule*

$$[a_1, a_2, b_2, b_1] = \frac{\cos(\beta) + 1}{2} \tag{1.1}$$

Démonstration : En effet, nous choisissons une carte affine où le cercle C_1 est l'axe réelle et C_2 est une droite réelle se coupant à l'origine. Le cercle D es alors un cercle centré sur l'origine que l'on peut choisir de rayon 1. Alors $(a_1, b_1) = (1, -1)$ et $(a_2, b_2) = (\cos(\beta) + i.\sin(\beta), -\cos(\beta) - i.\sin(\beta)$. La proposition suit alors d'un calcul explicite.
□

Voici enfin deux autres méthodes pour calculer l'angle entre deux cercles projectifs.

Exercices :

1. Soit a un point de $\mathbb{P}(V)$. Reliez l'angle de deux cercles C_{P_1} et C_{P_2} passant par a à l'angle que font les droites réelles $P_1 \cap a$ et $P_2 \cap a$ dans a.
2. Montrez qu'à tout cercle projectif $\mathcal{C}_P$ est associé une involution σ de $\mathbb{P}(V)$ telle que
$$\forall D_1, D_2, D_3, \in C_P,\ [D_1, D_2, D_3, D] \quad = \quad \overline{[D_1, D_2, D_3, \sigma(D)]}.$$
Montrez que la composée de deux telles involutions est une homographie et calculer l'angle en fonction de la trace de cette homographie.

Chapitre 2

Le plan hyperbolique

2.1 Présentation axiomatique

La géométrie complète du plan hyperbolique peut-être décrite par quelques propriétés relatives à ses *géodésiques* – qui jouent le rôle des droites des géométries affines et projectives – ainsi qu'à son bord à l'infini.

Nous allons donc définir le plan hyperbolique à l'aide des ses propriétés. Ceci nous permettra d'une part de comprendre quelles sont les propriétés vraiment importantes du plan hyperbolique, d'autre part de comprendre qu'il est construit de manière unique.

Par la suite nous donnerons deux descriptions du plan hyperbolique, nettement plus concrètes et pratiques.

Si B est une droite projective réelle, nous pouvons définir une notion d'entrelacement entre deux paires (a, b) et (c, d) de points de B. On dira que (a, b) et (c, d) sont *entrelacées* si et seulement si $[a, b, c, d] < 0$. On remarque qu'être entrelacées est une relation symétrique et que de plus cette notion ne dépend que des ensembles $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ et non des paires.

En fait cette notion repose sur une structure plus faible que celle donnée par le birapport : que si un ensemble B est muni d'un ordre cyclique on dit que les paires (a, b) et (c, d) sont *entrelacées* si soit (a, c, b, d) soit (a, d, b, c) sont positivement ordonnés. Si on remplace un ordre cyclique par son opposé, la notion d'entrelacement est identique.

Définition 2.1.1 [Plan hyperbolique] *Soit B une droite projective réelle. Un ensemble A est un* plan hyperbolique *de* bord à l'infini *B, si l'ensemble $\bar{A} = A \sqcup B$ est muni d'une famille de sous-ensembles appelés* géodésiques*, telles que*

1. *il passe une unique géodésique par paire de points distincts de $\bar{A}$,*
2. *Toute géodésique intersecte le bord à l'infini en exactement deux points, appelés* points à l'infini.
3. *Deux géodésiques s'intersectent si et seulement si les points à l'infini sont entrelacés. Dans ce cas, elles ont un unique point d'intersection.*
4. *Soit x un point de A, notons ι_x l'involution de B échangeant les points à l'infini des géodésiques passant par x. Alors, ι_x préserve le birapport.*

L'ensemble $\bar{A}$ est un plan hyperbolique complété*. Nous noterons le plan hyperbolique complété par $\overline{\mathbb{H}^2}$, son bord à l'infini par $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, et le plan hyperbolique lui-même est $\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{H}^2} \setminus \partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Nous commencerons par une remarque,

2.1.1 Involutions préservant le birapport

Notre première proposition explique le lien entre involutions et quadruples de points sur la droite projective réelle

Proposition 2.1.2 *Soit j une involution sans point fixe de la droite projective réelle préservant le birapport. Soit a et b deux points distincts et distincts de leurs image, alors $(b, j(b))$ et $(a, j(a))$ sont entrelacées.*

Soit de plus (a, b, c, d) quatre points distincts positivement ordonnés, il existe alors une unique involution sans point fixe de la droite projective réelle préservant le birapport telle que $c = j(a)$, $d = j(b)$.

Démonstration : en effet on peut supposer que $j(a) = \infty$, $a = 0$, $b = 1$. L'involution est donnée dans ces coordonnées par

$$x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Comme $j(0) = \infty$, on a nécessairement $\delta = 0$, comme $j(\infty) = 0$ on a $\alpha = 0$. On peut supposer $\gamma = 1$. Comme j est une involution sans pas de points fixe $\beta < 0$, ainsi $j(b) = \beta$. Nous en déduisons que $(a, b, j(a), j(b))$ est ordonné.

Nous en déduisons également que l'involution est complètement déterminée une fois $(a, b, j(a), j(b))$ connu.

Pour la deuxième partie du lemme, nous pouvons supposer que $(a, b, c, d) = (0, 1, \infty, \beta)$ avec $\beta < 0$ et nous considérons l'involution $x \to \beta/x$. $\square$

Le lemme suivant nous explique qu'un plan hyperbolique est complètement déterminé par son bord à l'infini.

Lemme 2.1.3 *Soit A un plan à l'hyperbolique et B son bord à l'infini. Alors l'application $\iota : x \to \iota_x$ est une bijection de $A \setminus B$ avec les involutions sans point fixes de B préservant le birapport.*

Dans cette bijection, la géodésique passant par deux points a et b du bord à l'infini est identifié à l'ensemble des involutions envoyant a sur b.

Démonstration : Si x est un point du plan hyperbolique, alors x est l'intersection de la geodésique $(a, \iota_x(a)$ avec la géodésique $(b, i_x(b)$. L'application ι est donc une injection. On se donne maintenant une involution préservant le birapport j. On se donne deux points distincts a et b de B, tels que $b \neq j(a)$. Comme d'après la proposition précédente $(a, j(a))$ et $(b, j(b))$ sont entrelacés, les géodésiques passant par $(a, j(a))$ et $(b, j(b))$ s'intersectent en un point x. Si ι_x est l'involution associées à x, alors $j(a) = \iota_x(a)$ et $j(b) = \iota_x(b)$. D'après la proposition précédente, nous avons $j = \iota_x$. $\square$

Nous en déduisons immédiatement le résultat suivant :

Proposition 2.1.4 *Tout les plans hyperboliques sont géométriquement équivalents : toute bijection projective entre deux droites projectives réelles B_1 et B_2 donne naissance à une bijection entre des plans hyperboliques complétés de bord à l'infini B_1 et B_2 envoyant géodésiques sur géodésiques, bord à l'infini sur bord à l'infini et préservant le birapport des points à l'infini.*

Démonstration : On se donnent deux plans hyperboliques A_1 et A_2 de bord à l'infini B_1 et B_2. On construit tout d'abord une application projective f entre B_1 et B_2. L'application $j \to f \circ j \circ f^{-1}$ réalise alors une bijection entre les involutions sans point fixes préservant le birapport et donc une bijection de $A_1 \setminus B_1$ dans $A_2 \setminus B_2$.

D'après la remarque précédente, cette application envoie géodésique sur géodésique. $\square$

2.1.2 Isométries

Définition 2.1.5 *Une* isométrie *entre deux plans hyperboliques est une bijection des plans hyperboliques complétés préservant bord à l'infini et géodésiques, ainsi que le birapport des points à l'infini.*

Remarques :

- Nous venons de montrer dans la proposition 2.1.4 que deux plans hyperboliques sont toujours isométriques.
- Une isométrie fixant trois points du bord à l'infini est l'identité,
- Le groupe des isométries d'un plan hyperbolique de bord à l'infini $\mathbb{P}(P)$ s'identifie naturellement à $\mathrm{PGL}(P)$

Nous pouvons alors classer les isométries préservant l'orientation en fonction de leurs points fixes

Définition 2.1.6 *Soit A une isométrie du plan hyperbolique préservant l'orientation*

1. *Si A ne fixe aucun point à l'infini, alors A est dite* elliptique.
2. *Si A un seul point point à l'infini, A est dite* parabolique.
3. *si A fixe exactement deux points à l'infini, alors A est une* translation hyperbolique

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries, pour cela nous identifions A avec une matrice. Si une homographie A est représentée par une matrice B de déterminant positif, nous poserons $\mathrm{tr}(A) = |\,\mathrm{tr}(B/\sqrt{\det(B)})|$.

Théorème 2.1.7 [Classification des isométries] *Toute isométrie du plan hyperbolique préservant l'orientation fixe au moins un point du plan hyperbolique complété. Elle est soit elliptique, parabolique ou hyperbolique.*

De plus soit A une isométrie.

1. *Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{tr}(A) < 2$ alors A est elliptique. Elle fixe alors un unique point du plan hyperbolique complété qui se trouve dans le plan hyperbolique*
2. *Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{tr}(A) > 2$, alors A est une translation hyperbolique. Elle fixe alors globalement une géodésique et aucun point du plan hyperbolique.*
3. *Si $\det(A) > 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$, alors A est une transformation parabolique. Elle fixe alors un unique point du plan hyperbolique complété qui se trouve dans le plan à l'infini.*

Remarquons que suivant les cas, l'homographie A est conjugué successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Dire qu'une isométrie A fixe un point x de l'espace hyperbolique signifie que l'isométrie A commute avec i_x. Par ailleurs nous avons vu que les involutions préservant le birapport et l'orientation sont conjuguées à la matrice

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions que dans les le premier cas A commute avec la matrice J. Nous en déduisons que toute isométrie préservant l'orientation de l'espace hyperbolique a un point fixe dans le plan hyperbolique complété.

De plus si A a un point fixe dans le plan hyperbolique, alors A est elliptique. Supposons en effet que ce point fixe soit représenté par J et A par une matrice de déterminant 1. On a alors

$A \circ J = \lambda J \circ A$ avec $\lambda = \pm 1$. Le cas $A \circ J = -J \circ A$ est exclus car il entraîne $\det(A) < 0$. Donc A et J commutent et alors A est une rotation.

Il nous reste à montrer qu'une isométrie elliptique n'a qu'un point fixe. En effet si elle a deux points fixes distincts, elle fixe la géodésique passant par ces deux points et donc deux points à l'infini.

□

2.1.3 Géodésiques orthogonales

Définition 2.1.8 *Nous dirons que deux géodésiques (a, b) et (c, d) sont* orthogonales *si le birapport de (a, b, c, d) est -1.*

Proposition 2.1.9 *Soit a et b deux points à l'infini. Soit (a, b) la géodésique correspondantes et $x \in (a, b)$, Alors il existe une unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par x.*

De même, si y est un point du bord à l'infini différent de a et b, il existe une unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par y.

Démonstration : Si x est un point quelconque de (a, b) et si i est l'involution déterminée par x. La géodésique (y, Y) passe par x est orthogonale si et seulement si $Y = i(y)$ et

$$[a, b, y, i(y)] = -1. \tag{2.1}$$

Nous choisissons sur le bord à l'infini des coordonnées homogènes telles que $a = 0$ et $b = \infty$, l'involution est donnée par

$$i : z \to \frac{\alpha}{z},$$

avec $\alpha < 0$ puisque i préserve l'orientation. L'équation précédente devient alors

$$\alpha = -y^2. \tag{2.2}$$

Pour la première partie de la proposition, il existe exactement deux points $y_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $y_2 = -\sqrt{-\alpha}$ solutions de l'équation (2.2) vu comme équation en y à α fixé. De plus $y_1 = i(y_2)$. La géodésique (y_1, y_2) est alors l'unique géodésique orthogonale à (a, b) passant par x.

Pour la deuxième partie de la proposition, La formule (2.2) devient alors une équation en α à y fixé qui a une unique solution :

$$\alpha = -y^2.$$

L'involution i détermine alors l'unique point x tel que (x, y) est orthogonal à (a, b) □

Corollaire 2.1.10 *Soit (a, b) deux points de plan hyperbolique et (A, B) deux points à l'infini. Il existe alors une unique isométrie préservant l'orientation qui envoie (a, A) sur (b, B).*

Démonstration : On considère la géodésique $\gamma_A = (A, A_3)$ passant par a et A de même que la géodésique orthogonale $D_A = (A_1, A_2)$ de telle sorte que (A_1, A, A_2) soit positivement ordonnés. On obtient ainsi quatre points (A_1, A_2, A, A_3) dont le birapport est -1. Le résultat provient de ce qu'il existe exactement une homographie envoyant quatre points de birapport -1 sur quatre autres points de même birapport. □

2.1.4 Symétries axiales

Définition 2.1.11 *La* symétrie géodésique *d'axe (a, b) est l'isométrie σ du plan hyperbolique caractérisée par $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b$ et $[a, b, c, \sigma(c)] = -1$.*

Proposition 2.1.12 *La symétrie d'axe (a, b) est l'unique isométrie différente de l'identité préservant tous les points de (a, b). C'est une involution renversant l'orientation et ces points fixes sont exactement les points de la géodésique (a, b).*

Toutes les involutions renversant l'orientation sont des symétries.

Exercices :

1. Soit (a, b) une géodésique et x un point hyperbolique. Soit σ la symétrie d'axe (a, b), montrez que la géodésique passant par x et $\sigma(x)$ est l'unique géodésique orthogonale (a, b) passant par x.
2. Montrez que la symétrie axiale d'axe imaginaire pure dans le demi plan de Poincaré est l'application $z \to -\bar{z}$.
3. Montrez que toute isométrie du plan renversant l'orientation du plan hyperbolique s'écrit

$$z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

2.1.5 Distance hyperbolique et paramétrisation

Nous allons définir la distance hyperbolique entre deux plans du plan hyperbolique. Cette distance va jouer un rôle fondamental par la suite.

Commençons par une définition. Nous avons vu qu'une géodésique est définie par un couple de points deux points $\{a, b\}$ du bord à l'infini. Le choix de la paire (a, b) – plutôt que la paire (b, a) – définie une *orientation* de la géodésique.

Proposition 2.1.13 *Soit $\gamma = (u, v)$ une géodésique orientée et x un point de γ. Pour tout point y de (a, b), soit Y un point du bord à l'infini tel que la géodésique passant y et Y est orthogonale à (a, b).*

Alors la quantité $\log(|[v, u, X, Y]|)$ *ne dépend as du choix de X et Y. De plus, l'application de γ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$y \to \log|[v, u, X, Y]|$$

une bijection.

Définition 2.1.14 *L'inverse de la bijection construite dans la proposition précédente est une* paramétrisation à vitesse 1 *de la géodésique. Un* arc géodésique *est l'image par cette paramétrisation d'un intervalle.*

Remarques :

1. Renverser l'orientation de la géodésique revient à renverser le signe de la paramétrisation.
2. Deux paramétrisations associées à des choix différents du point x différent d'une constante.

Démonstration : Cette proposition suit immédiatement de la deuxième partie de la proposition 2.1.9. □

Définition 2.1.15 *Soit x et y deux points distincts du plan hyperbolique. Soit γ la géodésique passant par x et y d'extrémités u et v. Soit (a, A) –respectivement (b, B) – une géodésique orthogonale à γ passant par x – respectivement y. La quantité*

$$d(x, y) = |\log(|[v, u, a, b]|)|.$$

ne dépend pas des choix fait et s'appelle distance hyperbolique *entre x et y.*

Remarques :

1. On remarque que la distance est invariante par les isométries.
2. Si on choisit une orientation et u, v, a, b de façon à ce que (u, v, a, b) soit orienté on a
$$d(x, y) = \log([v, u, a, b]) .$$
3. Nous verrons plus tard que d est bien une distance et vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice : Définir la distance entre deux points à partir des involutions correspondantes.

2.1.6 Angle entre deux géodésiques

Comme pour les droites nous avons la distinction entre l'angle orienté et l'angle non orienté.

Définition 2.1.16 *Supposons que le bord à l'infini est orienté. Soit (a, b) et (c, d) deux géodésiques ayant une intersection en x. On dit qu'elle font* font un angle orienté β *si le birapport de (a, b, c, d) est*
$$[a, c, d, b] = \frac{\cos(\beta) + 1}{2},$$
et où l'angle β est choisi dans $[0, \pi]$, si (a, c, b, d) est orienté, et où il est choisi dans $[-\pi, 0]$ si (a, d, b, c) est orienté.

On remarque que l'angle orienté change de signe lorsque l'on change l'orientation du bord à l'infini. On définit l'angle non orienté comme la valeur absolue de cet angle.

Par ailleurs, si on intervertit c et d, l'angle est changé en lui additionnant π modulo 2π.

Exercice : Définir l'angle entre deux géodésiques à partir des symétries correspondantes.

2.2 Construction du plan hyperbolique : différent modèles

Pour le moment, nous avons vu que tous les plans hyperboliques sont géométriquement identiques. Il nous reste cependant à construire au moins un plan hyperbolique, à savoir construire un ensemble A muni d'un bord à l'infini et de géodésiques.

2.2.1 Le modèle des involutions

Sous-jacent au texte précédent, nous avons un premier modèle du plan hyperbolique : nous prenons en effet pour bord à l'infini B, une droite projective réelle et pour $A \setminus B$ l'ensemble des involutions préservant le birapport et l'orientation. Si a et b sont deux points de B, la géodésique passant par a et b est $\{a, b\}$ union l'ensemble des involutions envoyant a sur b.

Il reste à vérifier que ce modèle vérifie les diverses propriétés du plan hyperbolique. Nous en avons déjà démontré certaines. Il nous reste à démontrer qu'il existe une unique géodésiques passant par deux points. Cela repose sur la proposition suivante que nous laissons en exercice.

Proposition 2.2.1 *Soit I et J deux involutions préservant l'orientation. Alors $I \circ J$ a exactement deux points fixes sur la droite projective qui sont échangés par I et J.*

Soit I une involution préservant le birapport et l'orientation, et échangeant a et b. Alors l'ensemble des involutions préservant le birapport et l'orientation et échangeant a et b est exactement l'ensemble des involutions J tel que $I \circ J$ fixe a et b.

Nous aurions pu adopter une stratégie détournée : nous allons proposer d'autres modèles du plan hyperbolique. Une fois que nous aurons vérifié que ces modèles conviennent – autrement dit que le plan hyperbolique existe bien – nous saurons alors que le plan hyperbolique s'identifie aux involutions et que les géodésiques sont construites comme nous venons de le dire.

2.2.2 Le modèle projectif complexe du plan hyperbolique

Nous allons utiliser notre chapitre sur droites projectives réelles et complexes.

Soit donc V un plan complexe et P un plan totalement réel. Nous considérons le cercle projectif $\mathcal{C}_P$ identifié à $\mathbb{P}(P)$. Nous choisissons une orientation sur la droite projective sur $\mathcal{C}_P$, et posons

$$\overline{\mathbb{H}^2}(P) = \{z \in \mathbb{P}(V) \mid \Im([a,b,c,z]) \geq 0, \text{ où } (a,b,c) \text{ sont positivement ordonnés sur } \mathcal{C}_P\}.$$

Nous identifions $\mathcal{C}_P$ au bord à l'infini de ce plan hyperbolique et posons

$$\mathbb{H}^2(P) = \overline{\mathbb{H}^2}(P) \setminus \mathcal{C}_P.$$

Les *géodésiques* du modèle projectif sont les cercles orthogonaux à $\mathcal{C}_P$.

Vérification des axiomes

Les deux propositions qui suivent nous permettent de montrer que nous avons bien un modèle du plan hyperbolique

Proposition 2.2.2 *Soit a et b deux points distincts de $\mathbb{H}^2(P)$. Il existe alors un unique cercle orthogonal à $\mathcal{C}_P$ passant par a et b.*

De plus deux cercles orthogonaux à $\mathcal{C}_P$ ont au plus une intersection dans $\mathbb{H}^2(P)$. Ils ont une intersection si et seulement $[a,b,c,d] > 0$ où $\{a,b\}$ – respectivement $\{c,d\}$– est l'intersection du premier – respectivement deuxième cercle avec $\mathcal{C}_P$.

Démonstration : On utilise une carte affine dans laquelle le cercle projectif $\mathcal{C}_P$ est l'axe réel. Si a et b sont tous les deux réels le résultat est évident. Sinon supposons $a \neq \bar{a}$, on considère la cercle $\mathcal{C}_1$ passant par a, b et $\bar{a}$. Comme $\Im[a,b,\bar{a},\bar{b},] = 0$, les quatre points a, b,$\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont sur le même cercle qui est donc invariant par l'application $z \to \bar{z}$. Ce cercle est donc soit une droite orthogonale à l'axe réelle, soit un cercle centré sur l'axe réel qui est donc orthogonal à cet axe. L'unicité suit de la construction.

Pour la deuxième partie, on ramène au cas où $\mathcal{C}_P$ est l'axe réel et le premier cercle l'axe imaginaire. Le deuxième cercle centré sur l'axe réel a au plus un point d'intersection avec l'axe imaginaire dans $\mathbb{H}^2$. Il en a un si et seulement si ses intersections avec l'axe réel sont de signe opposés ce qui se traduit par la condition sur le birapport. $\square$

Proposition 2.2.3 *Soit z_0 un point de $\mathbb{H}^2(P)$. L'involution de $\mathcal{C}_P$ dans lui-même associée à z_0 est la restriction d'un homographie préservant $\mathbb{C}_P$.*

Démonstration : Considérons deux géodésiques orthogonales (a,c) et (b,d) passant par z_0. Nous choisissons des coordonnées homogènes telles que $(a,b,c,d) = (0,1,\infty,-1)$. Considérons alors l'involution

$$I : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

Cette involution I préserve le birapport. Elle préserve $\mathbb{C}_P$ puisqu'elle envoie les trois points (a,b,c) de $\mathbb{C}_P$ sur les trois points (c,d,b) de $\mathbb{C}_P$ et qu'un cercle projectif est déterminé par trois points. Comme I préserve l'orientation, I préserve $\mathbb{H}^2(P)$

Elle préserve globalement les géodésiques (a,c) et (b,d), et donc leur unique intersection z_0 dans $\mathbb{H}^2$. Nous en déduisons finalement que cette involution préservant z_0 ainsi que les géodésiques passant par z_0, échange leurs extrémités. $\square$

Angle et distance dans le modèle projectif

La distance hyperbolique se calcule alors à l'aide de la proposition

Proposition 2.2.4 *Soit a et b deux points de $\mathbb{H}^2(P)$. Soit c et d les intersections de la géodésique passant par a et b avec le bord à l'infini. On suppose que (u, a, b, v) est orienté. Alors*

$$d(a, b) = \log([v, u, a, b])$$

Démonstration : On se ramène au cas où $u = 0$, $v = \infty$, $a = i$, $b = i.x$. Comme le birapport de (u, v, a, b) est réel, x est réel.

On considère alors les points $\hat{a} = 1$ et $\hat{b} = x$. La géodésique passant par a et $\hat{a}$ intersecte $\mathbb{C}_P$ en $\alpha = -1$: en effet le cercle projectif passant par a, $\hat{a}$ et α est orthogonal à $\mathbb{C}_P$, puisque le $\Re([\hat{a}, \alpha, a, v]) = 0$. De même cette géodésique est orthogonale à la géodésique passant par a et b puisque $[u, v, \alpha, \hat{a}] = -1$.

Alors,

$$d(a, b) = \log([v, u, \hat{a}, \hat{b}]) = \log([v, u, a, b]),$$

ou la première égalité suit de la définition et la deuxième d'un calcul. □

Enfin nous avons

Proposition 2.2.5 *L'angle entre deux géodésiques (a, b) et (c, d) est l'angle entre les cercles projectifs orientés correspondants.*

Les isométries dans le modèle projectif

Nous avons

Proposition 2.2.6 *Les isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2(P)$ sont les homographies préservant $\mathcal{C}_P$ et son orientation.*

Démonstration : Soit G_P le groupes des homographies préservant $\mathcal{C}_P$. Montrons tout d'abord les deux propriétés suivantes

1. G_P préserve $\mathbb{H}^2(P)$.
2. G_P agit par transformation projective sur $\mathcal{C}_P$ et la restriction est un isomorphisme de G_P sur $\mathrm{PSL}(P)$.

Choisissons une carte dans laquelle $\mathbb{C}_P$ est l'axe réel. On considère une homographie préservant l'axe réel

$$H : z \to \frac{az + b}{cz + d}.$$

On considère l'homographie H'

$$z \to \overline{H(\overline{z})} = \frac{\overline{a}z + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}.$$

Cette homographie H' coïncide avec H sur l'axe réel, elle coïncide donc avec H partout car une homographie est déterminée par l'image de trois points. Nous en déduisons que a, b, c, d sont tous réels. Ceci démontre en particulier la deuxième partie de l'assertion.

Un calcul direct donne que

$$\Im(H(z)) = \frac{\Im(z)}{(cz + d)^2}(ad - bc),$$

et la première partie de l'assertion suit.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve de la proposition. Comme G_P agit par homographie préservant l'orientation sur $\mathcal{C}_P$ et préserve les cercles projectifs orthogonaux à $\mathcal{C}_P$, elle agit par isométrie sur $\mathbb{H}^2(P)$.

Réciproquement, une isométrie ϕ de $\mathbb{H}^2(P)$ agit par homographie (réelle) préservant l'orientation de $\mathcal{C}_P$. Sa restriction à $\mathcal{C}_P$ coïncide donc avec la restriction d'une homographie (complexe) ψ préservant $\mathcal{C}_P$. Comme ψ est également une isométrie et qu'une isométrie est caractérisée par son action sur le bord à l'infini, ϕ et ψ sont égales. $\square$

2.2.3 Le modèle du demi-plan de Poincaré

Ce modèle est le plus facile à utiliser pour les calculs. Il est obtenu à partir du modèle projectif complexe en envoyant un point du bord à l'infini à l'infini. IL joue pour le plan hyperbolique le rôle des cartes affines.

Le plan hyperbolique s'identifie dans cette carte affine à

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

Le bord à l'infini est donné par l'axe réel

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Les géodésiques sont les cercles ou droites orthogonales à l'axe réel. La distance hyperbolique entre deux points $i.x$ et $i.y$ de l'axe réel est $|\log(x/y)|$.

On en déduit le résultat suivant

Proposition 2.2.7 *Dans le modèle du demi plan de Poincaré, si la géodésique passant par x et y a comme point à l'infini a et b, alors*

$$d(x, y) = |\log[a; b; x; y]|. \tag{2.3}$$

Isométries

Les isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique sont les homographies

$$z \to \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c, d, réels et $ad - bc > 0$. En effet ce sont les seules homographies préservant l'axe réel et son orientation.

Exercices :

1. Soit (a, b) une géodésique et x un point hyperbolique. Soit σ mla symétrie d'axe (a, b), montrez que la géodésique passant par x et $\sigma(x)$ est l'unique géodésique orthogonale (a, b) passant par x.
2. Montrez que la symétrie axiale d'axe imaginaire pure dans le demi plan de Poincaré est l'application $z \to -\bar{z}$.
3. Montrez que toute isométrie du plan renversant l'orientation du plan hyperbolique s'écrit

$$z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

avec a, b, c, d, réels et $ad - bc < 0$

Longueur des courbes

Le modèle du demi plan permet d'introduire une notion importante.

Définition 2.2.8 *Soit $\gamma : [a,b] \to x(t)+iy(t)$ une courbe continue et C^1 par morceaux à valeurs dans le demi plan de Poincaré. La* longueur hyperbolique *de la courbe c est*

$$\ell(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}{y(t)} \mathrm{d}t.$$

La propriété suivante résume les propriétés importantes de la longueur hyperbolique

Proposition 2.2.9 *Soit γ une courbe définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{H}^2$.*

1. *Soit ϕ un difféomorphisme de l'intervalle $[c,d]$ sur l'intervalle $[a,b]$. Alors*
$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \phi).$$
2. *Soit H une isométrie de $\mathbb{H}^2$ dans lui même, alors*
$$\ell(\gamma) = \ell(H \circ \gamma).$$
3. *Nous avons l'inégalité*
$$\ell(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)),$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si la courbe γ est une paramétrisation de la géodésique entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$
4. *nous avons l'inégalité*
$$d(a,b) \geq \left| \log\left(\frac{\Im(a)}{\Im(b)}\right)\right|.$$

Examinons les conséquences de cette proposition. La deuxième propriété nous permet de définir la longueur d'une courbe dans tout plan hyperbolique. En effet si A est un plan hyperbolique, il existe une isométrie ψ de A vers $\mathbb{H}^2$ unique à composition à gauche par une homographie. Soit maintenant γ une courbe tracée dans A. Nous pouvons alors poser sans ambiguïté

$$\ell(\gamma) = \ell(\psi(\gamma)),$$

et d'après la deuxième propriété cette longueur ne dépend pas du choix de ψ.

La troisième propriété nous dit que – comme leur nom l'indique – les géodésiques sont les courbes de plus petite longueur. Elle nous permet de montrer l'inégalité triangulaire pour la distance hyperbolique :

$$d(x,y) + d(y,w) \geq d(x,w).$$

En effet la réunion de l'arc géodésique de x à y puis de y à w est une courbe C^1 par morceaux dont la longueur est la somme des longueurs des arcs géodésiques, à savoir $d(x,y)+d(y,w)$. L'inégalité triangulaire est alors une conséquence de l'inégalité de la troisième propriété.

Démonstration : La première propriété est une conséquence de la formule de changement de variable

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma \circ \phi) &= \int_c^d \frac{\sqrt{x \dot{\circ} \phi(t)^2 + x \dot{\circ} \phi(t)^2}}{y \circ \phi(t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} |\dot{\phi}(t)| \frac{\sqrt{\dot{x} \circ \phi(t)^2 + \dot{y} \circ \phi(t)^2}}{y \circ \phi(t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}{y(t)} = \ell(\gamma).
\end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, soit

$$H : z \to \frac{\alpha z + \beta}{\lambda z + \delta}$$

une homographie, où $\alpha.\delta - \lambda.\beta = \pm 1$. Alors si u est un vecteur complexe

$$D_z H(u) = \frac{1}{(\lambda z + \delta)^2} u.$$

Nous pouvons par ailleurs écrire

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \frac{|\dot\gamma(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t.$$

Remarquons par ailleurs que

$$\Im(H(z)) = \frac{1}{|\lambda.z + \delta|^2} \Im(z).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\ell(H \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{|H \dot{\circ} \gamma(t)|}{\Im(H \circ \gamma(t))} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{|\dot\gamma(t)|}{|\lambda\gamma(t) + \delta|^2 \Im\left(\frac{\alpha\gamma(t)+\beta}{\lambda\gamma(t)+\delta}\right)} \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{|\dot\gamma(t)|}{\Im(\gamma(t))} \mathrm{d}t = \ell(\gamma).
\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue montre que si $I : z \to -\bar{z}$, alors $\ell(I \circ c) = \ell(c)$. Comme tout isométrie est soit une homographie, soit la composée de I et d'une homographie nous obtenons le résultat.

Démontrer la troisième inégalité. En composant avec une homographie, nous pouvons supposer que $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont sur l'axe imaginaire. Alors

$$\begin{aligned}
\ell(c) &= \int_a^b \frac{\sqrt{\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2}}{y(t)} \mathrm{d}t \\
&\geq \int_a^b \frac{|\dot y(t)|}{y(t)} \mathrm{d}t \\
&\geq \left| \int_a^b \frac{\dot y(t)}{y(t)} \right| \mathrm{d}t \\
&= \left| \log \frac{y(a)}{y(b)} \right| = d(\gamma(a), \gamma(b)).
\end{aligned}$$

Le cas d'égalité implique que $\dot x = 0$ et $\dot y$ de signe constant, autrement dit γ est une paramétrisation de l'arc joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$.

La quatrième inégalité suit de la première partie de la preuve de la troisième inégalité. □

2.2.4 Le modèle du disque de Poincaré

On choisit une carte affine qui envoie le cercle projectif / bord à l'infini vers le cercle U de rayon 1, centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Dans ce modèle le plan hyperbolique est l'intérieur du disque et les géodésique sont soit les cercles orthogonaux au bord soit les droites passant par l'origine. La distance hyperbolique à l'origine se calcule aisément dans ce modèle

$$d(x, 0) = \log\left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|}\right) \tag{2.4}$$

En effet

$$d(x, 0) = \log\left[-\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}, x, 0\right] = \log \frac{(-\frac{x}{|x|} - x)(\frac{x}{|x|})}{(\frac{x}{|x|} - x)(-\frac{x}{|x|})} = \log\left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|}\right)$$

Corollaire 2.2.10 *Les boules hyperboliques – c'est-à-dire pour la distance hyperbolique – du modèle de Poincaré sont des boules euclidiennes.*

Attention : la boule hyperbolique et la boule euclidienne avec laquelle elle coïncide n'ont souvent ni le même centre ni le même rayon. Si nous notons par $B_h(x,R)$ la boule hyperbolique de centre x et de rayon R. Le résultat s'écrit

$$\forall x \in U,\ \forall R > 0,\ \exists y \in U,\ \exists S > 0,\ B_h(x,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |y-z| < S\}.$$

DÉMONSTRATION : Les boules hyperboliques centrées en zéro sont des boules euclidiennes par le calcul de la distance à l'origine.

Par ailleurs, il existe toujours une isométrie ϕ préservant l'orientation envoyant un point x sur 0. Comme ϕ est une isométrie $\phi(B_h(x,R)) = B_h(0,R)$. En particulier

$$\phi^{-1}(B_h(0,R)) = B_h(x,R),$$

est une boule euclidienne car l'image d'une boule euclidienne par une homographie est une boule euclidienne : les homographies préservent les cercles projectifs.

□

2.2.5 Le modèle projectif de Klein

Considérons la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^3$

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Nous avons alors trois types de droites dans $\mathbb{R}^3$

1. les droites de type *espace* : celles pour lesquelles la restriction de Q est positive,
2. les droites de type *temps* : celles pour lesquelles la restriction de Q est négative,
3. les droites de type *lumière* : celles pour lesquelles la restriction de Q est nulle.

Soit alors $\mathcal{C}$ la conique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Montrons tout d'abord la propriété suivante

Proposition 2.2.11 *Soit x_0 une droite de type temps. Il existe alors une carte affine dans laquelle $x_0 = 0$, et la conique $\mathcal{C}$ est le cercle de centre x_0.*

DÉMONSTRATION : En effet, nous choisissons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle e_3 est un vecteur de norme -1 de x_0, (e_1, e_2) est une base orthonormé de $x_0^\perp$. Dans cette base, si z est de coordonnées (u,v,w) alors $Q(z) = u^2 + v^2 - w^2$. Dans la carte affine $w = 0$, x_0 est l'origine et $/mathcalC$ est une cercle centré sur l'origine. □

Définition 2.2.12 *Le* modèle projectif de Klein *est le modèle pour lequel*

- *Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est l'ensemble des droites de type lumière, c'est-à-dire la conique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,*
- *le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ est l'ensemble des droites de type temps,*
- *les géodésiques sont les intersections des droites projectives avec $\mathbb{H}^2$,*
- *le birapport sur $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est donnée par la paramétrisation unicursale de la conique $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Nous devons montrer que ce modèle vérifie les axiomes. Le seul point délicat à montrer est que l'inversion par rapport à un point x_0 préserve le birapport. Ceci découle de la proposition 2.2.11. En effet dans la carte affine pour laquelle x_0 est l'origine et $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est une cercle centré sur l'origine. L'inversion est la restriction de l'application $z- > -z$ qui est une tranformation projective préservant $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ et en particulier préservant le birapport.

Une autre version du modèle projectif de Klein consiste à prendre ce modèle dans une carte affine :

- Le bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine
- le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ est l'intérieur du disque
- les géodésiques sont les intersections des droites affine avec $\mathbb{H}^2$,
- le birapport sur C est donné par la pramétrisation unicursale de C, c'est-à-dire que si quatre points sont repérés par leur angle, leur biraport est

$$\left[\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right); \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right);\right].$$

Chapitre 3

Le plan hyperbolique comme espace métrique

Nous venons de voir que l'espace hyperbolique muni de sa distance hyperbolique est un espace métrique. Nous allons reconstituer sa géométrie à partir de distance. Nous allons d'abord reconstituer les géodésiques, l'angle de deux géodésiques, le bord à l'infini et enfin les isométries.

3.1 Reconstruction de la géométrie à partir de la métrique

3.1.1 Géodésiques

Les géodésiques se construisent à partir de la distance.

Proposition 3.1.1 *Soit a et b deux points du plan hyperbolique. Alors l'arc géodésique joignant a à b est*

$$\{x \mid d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\}.$$

3.1.2 Le bord à l'infini

Nous pouvons interpréter du point de vue métrique le fait que deux géodésiques passent par le même point à l'infini.

Introduisons une définition

Définition 3.1.2 *Deux arcs géodésiques (a,A) et (b,B) où a et b sont des points de $\mathbb{H}^2$ et A et B des points de $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ paramétrées par $t \to a(t)$ et $t \to b(t)$ respectivement sont* asymptotes *si et seulement si*

$$\limsup_{t\to\infty}\{d(a(t),b(t))\} < \infty.$$

Proposition 3.1.3 *Deux arcs (a,A) et (b,B) sont asymptotes si et seulement si $A = B$*

Nous pouvons alors reconstruire le bord à l'infini à partir de la métrique de la manière suivante : nous remarquons que la relation "être asymptote" est une relation d'équivalence et nous identifions le bord à l'infini avec l'ensemble des classes d'équivalence.

Démonstration : Cela se fait par un calcul explicite dans le plan hyperbolique. Onconstante suppose tout d'abord que $A = B = \infty$, la première géodésique est alors paramétrée par $a : t \to a + ie^{t+\alpha}$ et la deuxième par $b : t \to b + ie^{t+\beta}$.

En considérant les courbes de niveaux y constante on remarque que $d(a+iy, b+iy) \leq |a-b|/y$.

Nous obtenons alors que

$$d(a(t), b(t) \leq \alpha + \beta d(a + e^{it}, b + e^{it}) \leq \alpha + \beta + \frac{|a-b|}{e^t}.$$

Ainsi $a(t)$ et $b(t)$ sont asymptotes.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde et on suppose que $A = \infty \neq B$. En particulier

$$\lim_{t\to\infty} (\Im(b(t)) = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} (\Im(a(t)) = \infty.$$

Par ailleurs, on a toujours

$$d(u, v) \geq \left|\log\left(\frac{\Im(u)}{\Im(v)}\right)\right|.$$

En particulier

$$\lim_{t\to\infty} d(a(t), b(t)) = \infty.$$

□

3.1.3 Birapport

Le birapport se reconstruit lui aussi à l'aide de la métrique à partir de sa définition :

Nous nous donnons quatre points à l'infini (a, b, c, d), nous considérons la géodésique (a, b). Il existe un unique point x tel que l'arc géodésique (x, c) est orthogonal à (a, b), de même il existe un unique point y tel que (y, d) est orthogonal à (a, b).

Alors, d'après la définition de la métrique hyperbolique

$$|[a, c, d, b]| = e^{d(x,y)}.$$

Le signe du birapport dépend de l'entrelacement de (a, b) et (c, d). Ceci nous permet de reconstruire de birapport entre quatre points à partir de la seule distance.

Voici une autre formule qui nous sera utile par la suite

Proposition 3.1.4 *Soit (a, b, c, d) quatre points à l'infini tels que (a, b) n'est pas entrelacé avec (c, d) et (a, c, d, b) est ordonné, il existe alors une unique géodésique orthogonale γ avec (a, b) et (c, d). De plus*

$$[a, c, d, b] = \frac{1}{2}\cosh^2\left(\frac{d(x, y)}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$[a, b, c, d] = \tanh^2(d(x, y)). \tag{3.2}$$

où x est l'intersection de γ avec (a, b) et y est l'intersection de γ avec (c, d).

Démonstration : On choisit un demi plan de Poincaré tel que (a, b) est l'axe vertical. Les géodésiques orthogonales sont alors les demi-cercles $C(x)$ de centre 0 passant par x, $-x$ avec $x > 0$. La géodésique (c, d) est alors un demi-cercle passant donc par z, w avec $zw > 0$. Pour que les géodésiques $C(x)$ et (c, d) soit orthogonales, il faut que

$$-1 = [x, -x, z, w] = \frac{(x - z)(x + w)}{(x + z)(x - w)}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$x^2 + x(w - z) - 1 - wz,$$

qui a deux solutions de signes opposés et donc une seule solution positive. Ceci garantit l'existence d'une unique géodésique orthogonale à la fois à (a, b) et (c, d).

Enfin, pour la dernière formule, on suppose que γ va de zéro à l'infini dans le modèle du demi-plan. Alors $(a,b) = (-X, X)$ et $(c,d) = (-Y, Y)$. Dans ces conditions

$$d(x,y) = \left|\log\left(\frac{X}{Y}\right)\right|$$

Par ailleurs,

$$[a,c,d,b] = \frac{(X+Y)^2}{4XY}.$$

□

3.1.4 Triangles

Nous allons montrer le lemme suivant

Proposition 3.1.5 [Classification des triangles] *Soit p, g, r trois nombres réels strictement positifs tels que $p+q > r$, $p+r > q$ et $q+r > p$. Il existe alors trois points a, b et c dont les distances entre les sommets sont exactement p, q et r. Un tel triangle est unique à isométrie près.*

Démonstration : Soit x et y deux points à distance p. Les hypothèses entraînent que la boule de rayon p autour de x et de rayon q autour de y s'intersectent. Les bords de ces boules - qui sont des cercles projectifs – s'intersectent en deux points qui sont échangés par la symétrie d'axe (x,y). L'un quelconque de ces deux points forme le troisième sommet du triangle.

La construction montre que tous les triangles dont les côtés sont de longueur p, q et r sont isométriques. □

3.2 Extension des isométries

Nous avons vu qu'une isométrie préserve la distance et les géodésiques.

Théorème 3.2.1 *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{H}^2$. Soit H une application de K dans $\mathbb{H}^2$ préservant la distance. Alors H est la restriction d'une isométrie.*

Pour l'unicité, il est intéressent de rappeler qu'une isométrie préservant l'orientation et fixant deux points est l'identité.

Démonstration : Soit a un point de K, en composant avec une isométrie on peut supposer que $H(a) = a$. Si $K = \{a\}$ c'est fini.

On note maintenant par (a, A) la géodésique passant par a et le point à l'infini A de même que le K-*arc* $\widehat{(a,A)}$ qui l'intersection de cette géodésique avec K.

D'après la proposition 3.1.1, l'image de $\widehat{(a,A)}$ est un sous-ensemble d'un arc géodésique. En composant avec une homographie, nous pouvons nous ramener à la situation suivante : il existe un point A du bord à l'infini, tel que $\widehat{(a,A)}$ contient un point a_1 distinct de a et est fixé point par point par H.

Si $K = \widehat{(a,A)}$ c'est fini.

Soit donc un arc $\widehat{(a,B)}$ un autre arc non réduit à a et $b \in \widehat{(a,B)} \setminus \{a\}$. Par la la proposition 3.1.5, nous savons que le triangle $(a, a_1, H(b)) = (H(a), H(a_1), H(b))$ est l'image de (a, a_1, b) par une isométrie de $\mathbb{H}^2$. En composant avec cette isométrie nous pouvons donc nous ramener au cas où H fixe (a, a_1, b). Soit alors γ l'angle entre $\widehat{(a,A)}$ et $\widehat{(a,B)}$.

Montrons maintenant que H préserve tous les K-arcs géodésiques passant par a.

Soit donc η un tel K-arc. Nous savons que $H(\eta)$ est inclus dans un arc géodésique. Si β est l'angle orienté entre η et (a, A) et si $\hat{\beta}$ est l'angle orienté entre $H(\gamma)$ et (a, A), la proposition 3.1.5 entraîne par unicité des triangles que

$$\cos(\beta) = \cos(\hat{\beta})$$

Si $\beta = \hat{\beta}$ alors H préserve η. Raisonnons par l'absurde et supposons que H ne préserve par η, alors $\hat{\beta} = 2\pi - \beta$.

De même, si α est l'angle entre γ et (a, a_1) et alors $\hat{\alpha}$ est l'angle entre $H(\gamma)$ et (a, a_1) alors

$$\cos(\alpha) = \cos(\hat{\alpha}).$$

Pour la même raison, $\hat{\alpha} = 2\pi - \alpha$. Supposons $\alpha > \beta$, alors – un petit dessin aide –

$$\alpha - \beta = \gamma \ [2\pi].$$

De même

$$\hat{\beta} - \hat{\alpha} = \gamma \ [2\pi].$$

Nous obtenons donc la contradiction car $\gamma \neq -\gamma \ [2\pi]$.

Nous venons de montrer qu'après composition avec une homographie H est l'identité. □

3.3 Au voisinage d'un point

3.3.1 Les boules ouvertes

Rappelons que la boule ouverte de centre x de rayon R dans un espace métrique M est

$$B(x, R) := \{y \in M \mid d(y, x) < R\}.$$

Nous avons alors

Proposition 3.3.1 *Une boule ouverte est un disque dans le modèle du disque ou du demi plan de Poincaré. De plus, une boule est* géodésiquement convexe *: un arc géodésique passant par deux points d'une boule est une boule.*

Démonstration : D'après la formule (2.4), la boule ouverte centrée à l'origine est un disque. Comme l'image d'un disque par une homographie est un disque nous en déduisons la première partie du résultat.

Pour le deuxième partie du résultat, nous pouvons choisir un modèle du demi-plan tel que la géodésique passant par deux points est une droite affine verticale. Dans ce modèle, une boule est un disque. Comme un disque est convexe, nous en déduisons le résultat. □

De plus, "vu de près" une très petite boule ouverte ressemble à une boule euclidienne.

Proposition 3.3.2 *Il existe une fonction ϵ est une fonction qui tend vers zéro en zéro, telle que si B une boule de rayon u centrée en 0 dans le modèle du disque de Poincaré. Alors pour tout a et b de B*

$$|d(a, b) - |a - b|| \leq \epsilon(u).u.$$

Démonstration : Soit alors A et B les extrémités de la géodésiques passant par a et b. Notre première remarque est que A et B sont presque opposés :

$$|A + B| \leq \epsilon(u).$$

Voici une preuve de ce fait géométrique par le calcul. On peut supposer après une rotation que $A = 1$. On sait alors que

$$\Re([1, B, i, a]) = 0 \text{ et } \Re([1, B, -i, a]) = 0.$$

Or

$$\Re\left([1, B, i, a] + [1, B, -i, a]\right) = \Re\left(\frac{(a-1)(B+1)}{B-a}\right) = \Re\left(1 + \overline{B}\right) + \epsilon(u).$$

Ainsi $\Re(1 + B) = \epsilon(u)$. Comme $B = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$, nous obtenons $\cos(\theta) = -1 + \epsilon(u)$ et donc que $1 + B = \epsilon(u)$.

Un développement limité nous donne alors

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \log[A, B, a, b] \\ &= \log\left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B} + \frac{a}{B} + \frac{b}{A} + \epsilon(u)\right) \\ &= |a-b|.\left(|\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \epsilon(u)\right) \\ &= |a-b|.(1 + \epsilon(u)) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est le résultat recherché. □

3.3.2 Angle

Cette dernière proposition nous permet de reconstruire l'angle entre deux géodésiques à l'aide de la distance :

Proposition 3.3.3 *Soit (a, A) et (a, B) deux arcs géodésiques. Pour tout t, soit A_t l'unique point de (a, A) tel que $d(a, A_t) = t$; de même, B_t l'unique point de (a, B) tel que $d(a, B_t) = t$; alors, l'angle β entre les deux arcs vérifie*

$$1 - \cos(\beta) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{d(A_t, B_t)^2}{2t^2}\right).$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition précédente

3.4 Comment caractériser l'espace hyperbolique

Nous venons de voir que la géométrie de l'espace hyperbolique peut être reconstruite à l'aide de la seule distance. Nous n'avons pas parlé du birapport mais celui-ci peut-être reconstruit à partir par exemple de l'angle entre les géodésiques.

Autrement dit, un plan hyperbolique est un espace métrique dont la distance vérifie un certain nombre de propriétés supplémentaires.

Une propriété toute particulière peut caractériser le plan hyperbolique et résumer ainsi les propriétés précédentes, cette propriété se définit à l'aide d'un invariant numérique appelé *courbure*. Malheureusement, définir la courbure sort du cadre de ce cours.

Chapitre 4

Les figures du plan hyperbolique

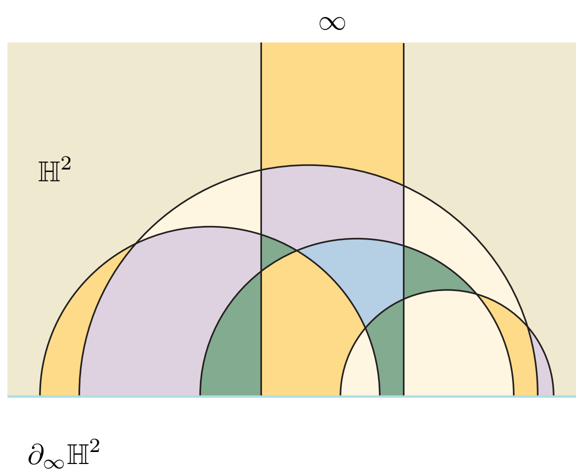


FIGURE 4.1 – Polygones convexes hyperboliques

4.1 Demi-plan, quadrant, polygone convexes, triangles

4.1.1 Ensemble convexe

Définition 4.1.1 [CONVEXE] *qu'un ensemble G est* géodésiquement convexe *si pour toute paire de points x et y de G ; l'arc géodésique passant par x et y est inclus dans G.*

D'après le modèle projectif de Klein, un ensemble G est convexe si et seulement si, vu comme sous-ensemble du plan projectif réel, il est convexe.

4.1.2 Polygones convexes

Définition 4.1.2 *Un* demi-plan *est l'une des régions complémentaires d'une géodésique. Un* quadrant *est l'une des régions complémentaires de la réunion de deux géodésiques orthogonales. Un* polygone convexe *est l'une des composantes connexes comme sur la figure 4.1.*

REMARQUES :

1. Tout les demi-plans sont isométriques. Tout les quadrants sont isométriques.

2. Rappelons qu'un ensemble G est *géodésiquement convexe* si pour toute paire de points x et y de G ; l'arc géodésique passant par x et y est inclus dans G. Un polygone convexe est géodésiquement convexe : en effet un demi plan est géodésiquement convexe et l'intersection d'ensembles géodésiquement convexes est géodésiquement convexe.
3. l'intersection de deux polygone convexes est un polygone convexe.

Proposition 4.1.3 *Soit P un polygone convexe. Alors*

1. *Le polygone P est une intersection finie de demi-plans ouverts.*
2. *Un polygone convexe est géodésiquement convexe.*

Démonstration : Ceci se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein.
□

Proposition 4.1.4 *Soit γ_i des géodésiques distinctes. Pour tout i, soit H_i un demi-plans bordé par la géodésique γ_i. Soit P le polygone convexe $P = \bigcap_i H_i$. Soit $\overline{P}$ l'adhérence de P. Soit x un point de $\overline{P}$.*

Il existe alors un voisinage convexe B de x pour lequel nous avons l'une des situations suivantes

1. *soit $B \subset P$,*
2. *soit, il existe i tel que $B \cap P = B \cap H_i$, et $x \in \gamma_i$,*
3. *soit, il existe i et j distincts tels que $\{x\} = \gamma_i \cap \gamma_j$ et $B \cap P = B \cap H_i \cap H_j$, où H_i et H_j sont des demi-plans bordés par γ_i et γ_j*

De plus $\overline{P}$ est l'intersection finie de demi-plans fermés : $\overline{P} = \cap_i \overline{H}_i$. Enfin, $\overline{P}$ est aussi géodésiquement convexe.

Démonstration : Ceci se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein. □

Définition 4.1.5 *Soit P un polygone convexe. Un* sommet *de P est un point de $\overline{P}$ qui n'est inclus dans aucun arc géodésique inclus dans $\overline{P}$, c'est aussi un point x tel que $\overline{P} \setminus \{x\}$ est convexe. Un* côté *de P est un arc γ géodésique fermé tracé dans $\overline{P}$, tel que $P \setminus \{\gamma\}$ est géodésiquement convexe.*

Remarques :

1. Un point est un sommet de P si et seulement si il correspond au troisième cas de la proposition 4.1.4

La proposition suivante se déduit des propriétés correspondantes des polygones dans l'espace affine en utilisant le modèle projectif de Klein.

Proposition 4.1.6 *Les extrémités d'un côte d'un polygone convexe sont les sommets de ce polygone. Par chaque sommet passe exactement deux côtés. Un polygone convexe a un nombre fini de sommets et de côtés. Un polygone convexe compact a autant de sommets que de côtés.*

4.1.3 Triangles

Définition 4.1.7 *Un* triangle *de sommets distincts a_1, a_2, a_3, éventuellement à l'infini, est l'intersection des trois demi-plans P_1, P_2 et P_3 tels que P_i est le demi-plan contenant a_i et complémentaire à la géodésique passant par les deux autres sommets. L'*angle *au sommet a est l'angle est les deux côtés issus de a, ou par convention deux géodésiques qui se rencontrent à l'infini on un angle nul en ce point.*

Remarques :

1. Lorsqu'un triangle a ses trois sommets à l'infini on dit que c'est un triangle *idéal*. Tout les triangles idéaux sont isométriques.

Proposition 4.1.8 [Classification des triangles] *Soit p, g, r trois nombres réels strictement positifs tels que $p+q > r$, $p+r > q$ et $q+r > p$. Il existe alors un triangle dont les distances entre les sommets sont exactement p, q et r. Un tel triangle est unique à isométrie près.*

Démonstration : Soit x et y deux points à distance p. Les hypothèses entraînent que la boule de rayon p autour de x et de rayon q autour de y s'intersectent. Les bords de ces boules - qui sont des cercles projectifs – s'intersectent en deux points qui sont échangés par la symétrie d'axe (x, y). L'un quelconque de ces deux points forme le troisième sommet du triangle.

La construction montre que tous les triangles dont les côtés sont de longueur p, q et r sont isométriques.

□

4.2 Hexagones droits

Définition 4.2.1 *Un* hexagone droit *– ou* demi-pantalon *– est un polygone convexe compact ayant six sommets et six côtés et dont les angles aux sommets sont $\pi/2$. Une* couture *d'un hexagone est la réunion de trois côtés d'intersection vide.*

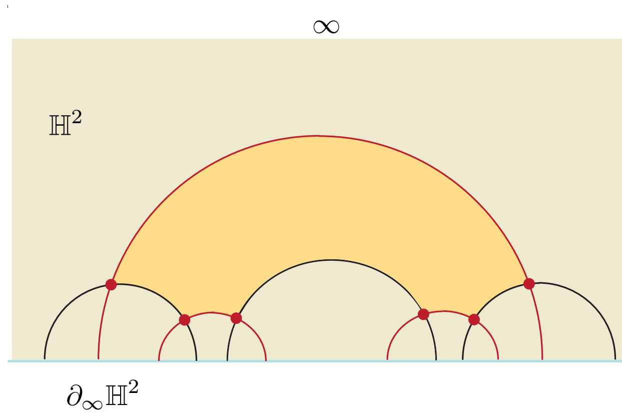


Figure 4.2 – Hexagone droit

Proposition 4.2.2 [Classification des demi-pantalons] *On se donne trois nombres réels positifs p, q, r. Il existe un unique demi-pantalon dont les longueurs des côtés d'une couture sont p, q et r. Un tel hexagone droit est unique à isométries près.*

Démonstration : Soit $\alpha = (\alpha^+, \alpha^-)$, $\beta = (\beta^+, \beta^-)$, $\gamma = (\gamma^+, \gamma^-)$ les géodésiques correspondants au trois autres coutures. Nous pouvons toujours supposer que $\alpha^- = 0$, $\alpha^+ = \infty$, $\gamma^+ > \gamma^- > \beta^+ =$

$1 > \beta^-$. D'après la proposition 3.1.4, les longueurs p, q et r des coutures se calculent par

$$\begin{array}{rcl} P = \tanh(p)^2 & = & [\alpha^-, \alpha^+, \beta^-, \beta^+,], \\ Q = \tanh(q)^2 & = & [\alpha^-, \alpha^+, \gamma^-, \gamma^+], \\ R = \tanh(r)^2 & = & [\beta^+ \beta^-, \gamma^-, \gamma^+], \end{array}$$

Remarquons que P, Q et R tous compris entre 0 et 1. Nous sommes donc amené à résoudre le système

$$S := \left\{ \begin{array}{rcl} \beta^- & = & P\beta^+ \\ \gamma^- & = & Q\gamma^+ \\ (\beta^+ - \gamma^-)(\beta^- - \gamma^+) & = & R(\beta^+ - \gamma^+)(\beta^- - \gamma^-). \end{array} \right.$$

Nous en déduisons

$$(1 - Q\gamma^+)(P - \gamma^+) \quad = \quad R(P - Q\gamma^+)(1 - \gamma^+).$$

Soit donc F la fonction définie par

$$F(x) = \frac{(P - x)(1 - Qx)}{(1 - x)(P - Qx)}$$

La dérivée de cette fonction est du signe de

$$(Q - 1)(P - 1)(Qx^2 - P).$$

Elle est donc postive sur $[1/Q, \infty[$, car puisque P et Q sont plus grands que 1, si $x > P$

$$Qx^2 > 1/Q > 1 > P.$$

La fonction F donc une bijection de $[1/Q, \infty[$ vers $[0, 1[$. Dès lors, si $R > 1$, il existe une unique solution plus grande que $1/Q$ de l'équation en x définie par

$$F(x) = R(p - 1)(Q - 1).$$

Le système S a donc une solution unique. Nous laissons au lecteur vérifier que ceci entraîne qu'un hexagone droit est déterminé par les longueurs d'un couture à isométrie près. $\square$

4.3 Aire

Soit C un ensemble mesurable du demi plan $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid z > 0\}$. L'aire hyperbolique de C est la quantité

$$\mathrm{Aire}_h(C) = \int_C \frac{1}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proposition 4.3.1 *Soit C un sous-ensemble mesurable du demi-plan de Poincaré et H une isométrie de ce demi-plan. Alors*

$$\mathrm{Aire}_h(C) = \mathrm{Aire}_h(A(C)).$$

Cette proposition nous permet de donner la définition suivante

Définition 4.3.2 *Soit C un sous ensemble mesurable d'un plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Son* aire hyperbolique *est définie comme l'aire hyperbolique de $\phi(C)$ où ϕ est une isométrie de $\mathbb{H}^2$ vers le demi-plan de Poincaré.*

Remarques : L'aire d'un ensemble est invariant par isométrie.

4.4 La formule de Gauß-Bonnet

L'angle à un sommet x d'un polygone P est l'angle α entre les côtés de ce polygone. L'*angle extérieur* à ce sommet x est $\beta = \pi - \alpha$.

La formule de Gauß-Bonnet pour un polygone convexe compact relie la somme des angles extérieurs et l'aire du polygone.

Théorème 4.4.1 [Formule de Gauss-Bonnet] *Soit P un polygone convexe compact. On note S l'ensemble de ses sommets et $\beta(s)$ l'angle extérieur au sommet s. Alors*

$$\sum_{s \in S} \beta(s) \quad = \quad 2\pi + \mathrm{Aire}_h(P). \tag{4.1}$$

Pour les triangles cette formule s'énonce différemment :

Théorème 4.4.2 [Formule de Gauss-Bonnet] *Soit T un triangle. Soit α, β et γ ces angles au sommet, alors*

$$\alpha + \beta + \gamma \quad = \quad \pi - \mathrm{Aire}_h(T). \tag{4.2}$$

Remarques : Voici quelques conséquences de la formule de Gauß-Bonnet qui montre à quelle point la situation diffère du cals euclidien.

1. Il n'y a pas de rectangles hyperboliques : la somme des angles intérieurs d'un polygone à quatre côtés est strictement plus petite que 2π. Il n'existe donc pas de polygones convexes à quatre sommets ayant des angles droits.
2. L'aire d'un hexagone droit est π.
3. La somme des angles d'un triangles est strictement plus petite que π.

Nous laissons en exercice la démonstration de la formule de Gauß-Bonnet à partir de la formule de Gauß-Bonnet pour les triangles.

Nous allons démontrer cette formule en procédant par étapes.

4.4.1 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles idéaux

Nous montrons

Proposition 4.4.3 *Soit T un triangle idéal. Alors*

$$\mathrm{Aire}_h(T) = \pi.$$

Démonstration : Ceci suit d'un calcul. On se place dans le plan hyperbolique et on envoie les trois sommets en 0, 1 et ∞ comme sur la figure 4.3. Alors

$$T_0 = \{x + iy \mid -1 < x < 1,\ y > \sqrt{1 - x^2}\}.$$

En particulier

$$\mathrm{Aire}_h(T_0) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi.$$

□

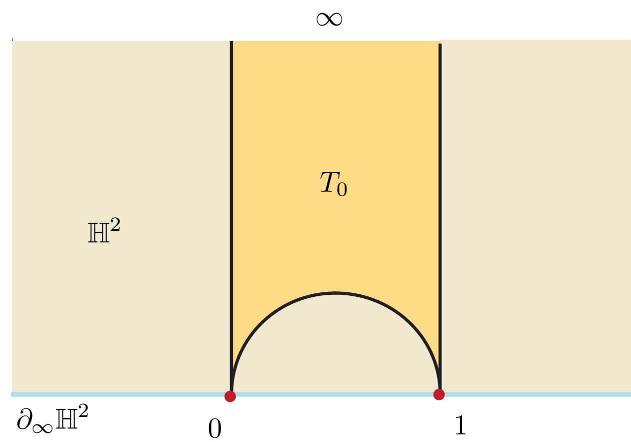


FIGURE 4.3 – Triangle idéal

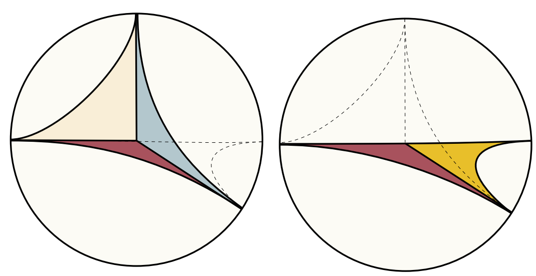


FIGURE 4.4 – Additivité de Gauß

4.4.2 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles avec deux points à l'infini

Nous noterons $A(\theta)$ l'aire du triangle hyperbolique dont deux des sommets sont à l'infini et dont l'angle au sommet extérieur est θ. Cette fonction est bien définie car tout ces triangles sont isométriques. La formule de Gauß-Bonnet dans ce cas se réduit à

$$A(\theta) = \theta.$$

Nous savons par la proposition précédente que $A(\pi) = \pi$. La fonction A étant continue, il suffit pour conclure de montrer

Proposition 4.4.4 [ADDITIVITÉ DE GAUSS] *La fonction A est additive : elle vérifie*

$$A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha + \beta).$$

DÉMONSTRATION : Cette formule suit du dessin 4.4.

En effet, l'aire du triangle bleu additionnée à celle du rose est π soustraite de l'aire du triangle marron, et donc égale à celle du triangle jaune.

Par ailleurs la somme des angles extérieurs des triangles bleu et rose est l'angle extérieur au triangle jaune $\square$

4.4.3 La formule de Gauß-Bonnet pour les triangles

La formule de Gauß-Bonnet pour un triangle avec un point à l'infini se démontre à partir de la proposition précédente en utilisant le fait qu'un tel triangle est la différence symétrique entre deux triangles ayant deux points à l'infini.

De même, le cas général de la formule de Gauß-Bonnet se démontre à utilisant le fait qu'un triangle est la différence symétrique entre deux triangles ayant un point à l'infini.

Ces deux cas sont traités dans la figure 4.5 ou à chaque fois on compare l'aire du triangle rose avec la différence entre l'aire du triangle bicolore jaune et marron avec celle du triangle marron.

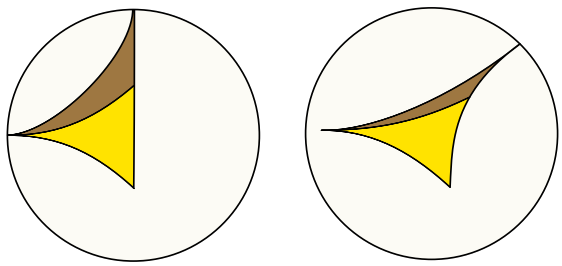


Figure 4.5 – Formule de Gauß-Bonnet

Chapitre 5

Surfaces hyperboliques

Nous allons donner la définition de plusieurs types de surfaces hyperboliques. Commençons par une définition

Définition 5.0.5 *Soit X et Y deux espaces métriques. Soit x un point de X et y un point de Y. Une* isométrie locale *de (X,x) vers (Y,y) est la donnée d'un réel r strictement positif, d'une bijection ϕ entre la boule de rayon r de centre x et celle de rayon r ce centre y, tels que*

$$\forall z,t \in B(x,r), \quad d(z,t) = d(\phi(z),\phi(t)).$$

Nous dirons également que (X,x) et (Y,y) sont localement isométriques*.*

Nous dirons que X est modelé *sur Y si pour tout point de x, il existe un point y de Y tel que (X,x) est localement isométrique à (Y,y) ; Y est le* modèle *de X.*

Remarques :

1. Le plan hyperbolique est modelé sur le demi-plan hyperbolique ; la réciproque n'est pas vraie.
2. De même, le demi-plan hyperbolique est modelé sur le quadrant hyperbolique ; la réciproque n'est pas vraie.
3. Enfin si Q est un quadrant, si (Q,x) est localement isométrique à (Q,y) alors x est le sommet de Q si et seulement si y est le sommet de Q, de même x appartient à un côté de Q si est seulement si y appartient à un côté de Q. En effet, être un sommet ou appartenir au bord est par la définition une condition métrique et donc invariante par isométrie locale.

5.1 Premières définitions

Voici les différentes définitions.

Définition 5.1.1 *1. Une* surface hyperbolique *est un espace métrique modelé sur le plan hyperbolique.*

2. Une surface hyperbolique à bord géodésique *est un espace métrique modelé sur le demi-plan hyperbolique.*

3. Une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés *est un espace métrique modelé sur le quadrant hyperbolique.*

Remarques :

1. Notre premier exemple de surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés est un polygone convexe dont tous les angles sont droits : ceci suit de la proposition 4.1.4.

2. Par ailleurs, toute surface hyperbolique est également hyperbolique à bord géodésique ; nous verrons plus tard que son *bord* est vide. De même, toute surface hyperbolique à bord géodésique est également hyperbolique à bord géodésique et coins carrés ; nous verrons plus tard qu'elle n'a pas de *coins*.
3. Une surface hyperbolique est localement compacte et localement connexe par arcs. Ceci suit de la propriété correspondante pour l'espace hyperbolique.

5.1.1 Cartes et coordonnées

Définition 5.1.2 *Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coin carré. Une* carte de rayon ϵ *au voisinage d'un point x de S, est une paire (B, ϕ) où B est une boule de rayon ϵ contenant x et ϕ une isométrie de B sur une boule du quadrant hyperbolique.*

Si (B, ϕ) est une carte, on dit que B est le domaine de la carte *et ϕ les* coordonnées *de la carte.*

5.1.2 Bord et coins

Lorsque nous sommes en présence d'une surface à bord géodésique et coins carrés, nous allons identifier son bord et ses coins.

Définition 5.1.3 *Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés. Notons Q le quadrant hyperbolique.*

1. *Un point x de S est un* coin*, si et seulement si (S, x) est localement isométrique à (Q, s_0) où s_0 est le sommet de Q.*
2. *Un point x de S est au* bord *de S , si et seulement si (S, x) est localement isométrique à (Q, s) où s appartient à un côté de Q.*
3. *le bord de S, noté ∂S est l'ensemble des points au bord de S.*

D'après la remarque (3) de l'introduction de ce chapitre, si S et Σ sont deux surfaces hyperboliques, si (S, x) et (Σ, y) sont localement isométriques alors x est un coin si et seulement si y est un coin, de même x appartient au bord, si et seulement si y appartient au bord.

5.2 Longueur des courbes et distance riemannienne

Nous voulons définir la longueur des courbes. Nous allons définir la longueur des courbes C^1 par morceaux et pour cela nous devons définir les courbes C^1 par morceaux.

5.2.1 Courbes et longueurs

Définition 5.2.1 *Une* courbe *à valeurs dans une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés S est une application continue γ d'un intervalle I à valeurs dans S. Un telle courbe est C^1* par morceaux *si pour tout x, il existe une carte (B, ϕ) au voisinage de x dans I, telle que $c(I) \subset B$ et $\phi \circ \gamma$ est C^1 par morceaux.*

On remarque que si γ est une courbe C^1 par morceaux définie de I dans S, il existe alors une famille $\{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ – où A est dénombrable – telle que

- les intervalles I_i partitionnent I :
$$I = \bigsqcup_{i \in A} I_i.$$
- pour tout i, ϕ_i est une isométrie locale définie au voisinage de $\gamma(I_i)$.

Une telle famille $\{(I_i, \phi_i)\}_{i \in A}$ s'appelle une *découpe* de γ.

Nous avons alors

Proposition 5.2.2 *Soit γ une courbe et $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i\in A}$ une découpe de γ. Alors la quantité*

$$\ell_{\mathcal{A}}(\gamma) = \sum_{i\in A} \ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)),$$

ne dépend pas du choix de la découpe.

Cette proposition nous permet d'introduire les définitions suivantes :

Définition 5.2.3 *Soit γ une courbe C^1 par morceaux. Soit $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i\in A}$ une découpe de γ. La* longueur *de la courbe γ est la quantité*

$$\ell(\gamma) = \sum_{i\in A} \ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)),$$

Une courbe $\gamma : I \to S$ est paramétrée par l'arc *si pour tout t et s de I,*

$$\ell(\gamma|_{[t,s]}) = |t - s|.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{A} = \{(I_i, \phi_i)\}_{i\in A}$ et $\mathcal{B} = \{(J_j, \psi_j)\}_{j\in B}$ deux découpes.

Supposons tout d'abord que les intervalles J_j sont des raffinements des intervalles I_i, autrement dit que pour tout i, il existe un ensemble B_i, tel que

$$I_i = \bigsqcup_{j\in B_i} J_j.$$

Supposons également dans ce cas que $\phi_j|_{\gamma(I_j)} = \phi|_{\gamma(I_j)}$ si $j \in B_i$, alors l'additivite de la longueur entraîne que

$$\ell_{\mathcal{A}}(\gamma) = \ell_{\mathcal{B}}(\gamma).$$

Nous pouvons donc supposer en prenant les intersections des intervalles que $A = B$ et que $I_i = J_i$. Il suffit donc de démontrer que

$$\ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_i)) = \ell_h(\psi_i \circ \gamma(I_i)).$$

or $H = \psi_i \circ \phi_i^{-1}$ préserve la distance. Par le théorème d'extension 3.2.1, H est la restriction d'une isométrie et préserve les longueurs. Ainsi

$$\ell_h(\phi_i \circ \gamma(I_j)) = \ell_h(H \circ \psi_i \circ \gamma(I_i)) = \ell(\psi_i \circ \gamma(I_i)).$$

Nous avons terminé notre preuve. □

Il est important de minimiser la longueur des courbes.

Proposition 5.2.4 [Minorer la longueur des courbes] *Soit x un point de S et $\epsilon_0 >$ tel que $B(x, \epsilon_0)$ est isométrique à une boule du quadrant par l'application ϕ. Soit $\alpha < \epsilon_0$ Soit c une courbe joignant un point z appartenant à $B(x, \alpha)$ à un point y n'appartenant pas à $B(x, \epsilon_0)$. Alors*

$$\ell(c) > \epsilon_0 - \alpha.$$

Démonstration : En effet supposons $c(0) = z$ et $c(a) = y$. Par le théorème des valeurs intermédiaire appliqué à la fonction $t \to d(x, c(t))$, il existe un intervalle $[0, u]$ tel que

1. $c[0, u[\subset B(x, \epsilon_0)$,
2. $d(x, c(u)) = \epsilon_0$.

Alors
$$\ell(c) \geq \ell\left(\phi \circ c|_{[0,u]}\right).$$
Comme la distance hyperbolique minimise la longueur, nous avons

$$\ell\left(\phi \circ c|_{[0,u]}\right) \geq d_h(\phi \circ c(0), \phi \circ c(u)).$$

En utilisant successivement l'inégalité triangulaire et le fait que ϕ est une isométrie, nous avons

$$d_h(\phi \circ c(0), \phi \circ c(u)) \geq d_h(\phi(x), \phi \circ c(u)) - d_h(\phi \circ c(0), x) = d(x, c(u)) - d(c(0), x) \geq \epsilon_0 - \alpha.$$

Nous obtenons le résultat en combinant ces inégalités. □

5.2.2 La distance riemannienne

Au départ, une surface hyperbolique est un espace métrique. Ceci dit la distance initiale pourrait ne pas être très intéressante. Remarquons en effet que si f est un fonction croissante, égale à l'identité au voisinage de 0, alors l'espace hyperbolique muni de la distance $d_f(x,y) = f(d(x,y)$ est modelé sur le plan hyperbolique. Il existe cependant sur une surface hyperbolique une meilleur métrique que nous appelerons *riemannienne*

Définition 5.2.5 *Soit x et y deux points d'une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés connexe. La* distance riemannienne *entre x et y est*

$$d_R(x,y) := \inf(\ell(c) \mid c \text{ courbe } C^1 \text{ par morceaux joignant } x \text{ à } y\}$$

On montre aisément qu'il existe toujours une courbe C^1 par morceaux joignant deux points d'une surface connexe.

Proposition 5.2.6 *Soit S une surface hyperbolique muni d'une métrique d. Soit x un point de S, il existe alors $\epsilon > 0$, tel que*

1. *si $d(y,x) > \epsilon$ alors $d_R(y,x) > \epsilon$.*
2. *si z et t appartiennent à la boule de centre x de rayon ϵ alors $d_R(z,t) = d(z,t)$.*

Corollaire 5.2.7
1. *La surface S munie de la distance riemannienne est localement isométrique en tout point à la surface S muni de la distance initiale.*
2. *La distance riemannienne est une distance.*

A partir de maintenant, nous munirons toujours une surface hyperbolique de sa distance riemannienne.

Démonstration : Notons Q le quadrant. Soit x un point de S. Soit $\epsilon_0 > 0$, tel qu'il existe un point x_0 de Q, une isométrie ϕ de $B(x, \epsilon_0)$ avec

$$B_h = \{w \in Q \mid d_h(w,x)\epsilon_0) \cap Q.$$

Posons enfin $\epsilon = \epsilon_0/4$. Soit tout d'abord y n'appartenant pas à $B(x,\epsilon)$ et c une courbe joignant x à y. D'après la proposition 5.2.4 pour $\alpha = 0$, nous avons

$$\ell(c) \geq \epsilon.$$

Ceci démontre le premier point.

Soit maintenant c une courbe quelconque joignant deux points z et y de la boule $B(x,\epsilon)$,

- si $c \subset B(x,\epsilon_0)$, alors
$$\ell(c) = \ell(\phi(c)) \geq d_h(\phi(z), \phi(y)) = d(z,y).$$

- si c sort de la boule $B(x, \epsilon_0)$, alors $\ell(c) \geq 2\epsilon \geq d(z, y)$, en appliquant la proposition 5.2.4 pour $\alpha = \epsilon_0/4$

Nous obtenons donc que, pour toute courbe c joignant deux points z et y de la boule $B(x, \epsilon)$, nous avons

$$\ell(c) \geq d(z, y).$$

En particulier,

$$d_R(z, y) \geq d(z, y). \tag{5.1}$$

Enfin, comme $\phi(B)$ est convexe, il existe une courbe c tracée dans $\phi(B)$ tell que

$$\ell(c) = d_h(\phi(z), \phi(y)).$$

Il existe donc une courbe $c_0 = \phi^{-1} \circ c$, telle que

$$\ell(c_0) = d_h(z, y).$$

Ainsi,

$$d_R(z, y) \leq d(z, y). \tag{5.2}$$

et en combinant les deux inégalités (5.1) et (5.2)

$$d_R(z, y) = d(z, y).$$

□

5.3 Géodésiques

Des courbes jouent un rôle particulier.

Définition 5.3.1 *Une courbe C^1 par morceaux $\gamma : I \to S$ est une* géodésique*, pour tout x de I, il existe un intervalle J qui est un voisinage de x dans I tel que*

$$\forall y, z \in J, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = |y - z|.$$

La proposition suivante donne quelques propriétés élémentaires des géodésiques.

Proposition 5.3.2 *1. Si γ est une géodésique, alors $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |t - s|$.*

2. Si γ est une géodésique alors γ est paramétrée par l'arc *: $\ell(\gamma|_{[s,t]}) = |s - t|$.*

Remarques :

1. En particulier, une géodésique *minimise localement la longueur* : pour tout x de I, il existe un intervalle J qui est un voisinage de x dans I tel que
$$\forall y, z \in J, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = \ell(\gamma|_{[y,z]}).$$
2. Cette notion de géodésique coincide avec celle des géodésiques usuelles dans le plan hyperbolique, le demi-plan hyperbolique et le quadrant.
3. Nous avons même un résultat plus précis. Soit $c :]u, v[$ dans le plan hyperbolique, le demi-plan hyperbolique ou le quadrant qui minimise localement la longueur. Alors c est un arc géodésique. Ceci suit de la proposition 3.1.1.
4. Nous en déduisons que si c est une géodésique, si ϕ est une isométrie d'une boule contenant c dans une boule du quadrant. Alors l'image de c par ϕ est un arc géodésique.
5. Par contre, nous verrons plus tard que les géodésiques ne minimisent pas toujours globalement la longueur contrairement au cas du plan hyperbolique.

6. Une géodésique γ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est *périodique* s'il existe un T strictement positif tel que
$$\forall, \gamma(s+T) = \gamma(s).$$
La période de γ est alors
$$T = \inf\{t > 0 \mid \gamma(s+t) = \gamma(s)\}.$$
On remarque que la période d'une géodésique périodique est strictement positive ; en effet une géodésique est toujours localement injective car localement minimisante.

5.3.1 Extension des géodésiques

Définition 5.3.3 *Soit γ et $\overline{\gamma}$ deux géodésiques definies ur des intervalles I et J respectivement, nous dirons que γ* étend *$\overline{\gamma}$ si $J \subset I$ et*
$$\gamma|_J = \overline{\gamma}|_J .$$
Nous dirons qu'une géodésique γ définie sur un intervalle I est maximale*, si pour toute géodésique $\overline{\gamma}$ définie sur un intervalle J tel que $J \cap I$ est d'intérieur non vide, telle que γ étend $\overline{\gamma}$ restreinte à $I \cap J$, alors $J \subset I$ et γ étend $\overline{\gamma}$.*

Notre but est le théorème suivant

Théorème 5.3.4 [Les géodésiques ont une extension maximale] *Soit $\overline{\gamma}$ $:]a, b[\to S$ une géodésique. Il existe alors une unique géodésique maximale $\gamma : I \to S$ qui étend $\overline{\gamma}$.*

De plus, si S est un espace métrique complet alors l'intervalle I est fermé.

Commençons par un lemme de prolongement.

Lemme 5.3.5 *Soit γ_1 et γ_2 définie sur des intervalles I_1 et I_2 respectivement tels que $I_1 \cap I_2$ est d'intérieur non vide. On suppose que γ_1 et γ_2 coïncide sur un intervalle ouvert non vide contenant a. Alors, il existe une géodésique γ qui étend à la fois γ_1 et γ_2.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que la proposition est vraie pour les géodésiques du quadrant hyperbolique. Montrons tout d'abord que γ_1 et γ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.
$$\begin{aligned} k_1 &= \inf\{t \in I_1 \cap I_2 \mid t > a,\ \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}, \\ k_2 &= \sup\{t \in I_1 \cap I_2 \mid t > a,\ \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}. \end{aligned}$$
Raisonnnons par l'absurde et supposons que $k_1 \in \mathrm{int}(I_1 \cap I_2)$. Alors $\gamma_1(k_1) = \gamma_2(k_2) := x$. Soit $\epsilon > 0$ tel que la boule B de centre x de rayon ϵ est isométrique à une boule du quadrant. Comme la proposition est vraie dans le quadrant, nous en déduisons que γ_1 et γ_2 coïncident au voisinage de k_1 et la contradiction. Un raisonnement analogue sur k_2 montre que γ_1 et γ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.

Ensuite, soit γ la courbe définie par $\gamma = \gamma_1$ sur I_1 et $\gamma = \gamma_2$ sur I_2. Comme $I_1 \cap I_2$ est d'intérieur non vide, tout point de $I_1 \cup I_2$ a un voisinage inclus soit dans I_1 soit dans I_2. Cette observation entraîne que γ minimise localement la longueur puisque γ_1 et γ_2 le font. □

Nous allons maintenant démontrer le théorème.

Démonstration : Nous dirons que t est *sup-admissible* s'il existe une géodésique γ définie sur $]a, t]$ qui étend $\overline{\gamma}$. Soit alors
$$k_1 = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ sup-admissible }\}.$$
Remarquons que $k_1 \geq b$. Supposons que $k < \infty$. D'après le lemme précédent, il existe une géodésique γ définie sur $]a, k[$ étendant $\overline{\gamma}$. Pour toute suite $\{t\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers k, la suite $\{\overline{\gamma}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Ainsi que γ définie sur $]a, k]$. Par le lemme précédent si γ_1 est définie sur

un intervalle $]c, d[$ avec $c \in]a, k[$ coïncide avec $\overline{\gamma}$ sur un intervalle ouvert alors, d est admissible et donc γ étend γ_1. Un raisonnement analogue pour la borne inférieure montre que γ est maximale et définie sur un intervalle fermé. □

La proposition suivante décrit les géodésiques maximales.

Proposition 5.3.6 *Soit γ une géodésique maximale définie sur un intervalle fermé I. Soit c une borne de I. Alors $\gamma(c)$ appartient au bord de S.*

Soit γ une géodésique maximale dont une restriction à un intervalle est incluse dans le bord. Alors, γ tout entière est à valeurs dans le bord et ses extrémités – si elles existent – sont des coins.

En particulier si le bord de S est vide, alors $I = \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : En effet, supposons que $\gamma(c)$ soit dans l'intérieur de S. Alors il existe une boule autour de $\gamma(c)$ isométrique à une boule du plan hyperbolique, nous pouvons alors prolonger γ au-delà de c car nous pouvons le faire dans le plan hyperbolique. □

.

5.3.2 Géodésiques globalement minimisantes

Définition 5.3.7 *Une géodésique $\gamma : I \to S$ est* globalement minimisante *si*

$$\forall y, z \in I, \quad d(\gamma(y), \gamma(z)) = |y - z|.$$

REMARQUES :

1. Une géodésique entre x et y est globalement minimisante si $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(d(x, y)) = y$.
2. Une courbe c entre x et y est une géodésique globalement minimisante si $c(0) = 0$, $c(d(x, y)) = y$ et $d(c(t), c(s)) \geq |t - s|$.
3. Dans le cas du plan hyperbolique toute géodésique est globalement minimisante.
4. Cela ne sera plus le cas pour les surfaces hyperboliques en général : nous verrons qu'il existe des géodésiques périodiques.

Le théorème de Hopf-Rinow nous garantit l'existence d'une géodésique minimisante entre deux points quelconques.

Théorème 5.3.8 [HOPF-RINOW] *Soit S une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés, connexe et complète en tant qu'espace métrique. Il existe toujours une géodésique minimisante entre deux points.*

DÉMONSTRATION : Soit x un point de S. Soit

$$S_x(\epsilon) = \{y \mid d(y, x) = \epsilon\}.$$

Soit y un point quelconque et $\epsilon < d(y, x)$. Pour ϵ suffisamment petit, $S_x(\epsilon)$ est compact, et il existe z appartenant à $S_x(\epsilon)$ tel que

$$d(z, y) = \inf\{d(u, y) \mid u \in S_x(\epsilon)\}.$$

Par ailleurs pour tout courbe c joignant x à y, par continuité de la fonction distance.

$$\ell(c) \geq d(y, z) + \epsilon.$$

Nous en déduisons que
$$d(x, y) = d(y, z) + \epsilon.$$
Soit maintenant γ la géodésique maximale passant par x et z, telle que $\gamma(0) = x$ et définie sur un intervalle J. Considérons alors

$$K = \sup\{t \in J \mid d(x, y) = d(y, \gamma(t)) + t\}.$$

Comme J est fermé, K est également fermé. Soit alors $s = \sup(K)$. Pour conclure, il nous suffit de montrer que $s = d(x, y)$. On remarque que $s \leq d(x, y)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $s < d(x, y)$. Par définition de s, nous avons alors $\gamma(s) \neq y$. Soit donc $\epsilon > 0$ tel que

- $B(\gamma(s), \epsilon)$ est isométrique à une boule du quadrant.
- $\epsilon < d(\gamma(s), y)$.

Raisonnons comme auparavant, et soit u appartenant à $S_{\gamma(s),\epsilon}$ pour ϵ suffisamment petit tel que

$$d(y, \gamma(s)) = d(y, u) + \epsilon.$$

Alors
$$d(y, x) = d(y, \gamma(s)) + s = d(y, u) + s + u.$$
Soit ensuite c la courbe composée de la géodésique γ de x à $\gamma(s)$ et de la géodésique de $\gamma(s)$ à u. Alors

1. $c(0) = x$, $c(s + \epsilon) = u$.
2. $d(c(t), c(r)) \geq |t - r|$.
3. $d(c(0), c(s + \epsilon)) = d(x, u) \geq d(y, u) - d(x, y) = s + u$.

Donc c est une géodésique globalement minimisante. Par maximalité de γ, c coincide avec γ. Dès lors particulier $s + \epsilon \in K$. Nous obtenons donc que $s \geq s + \epsilon$ ce qui est la contradiction recherchée.
□

Chapitre 6

Construction par recollement

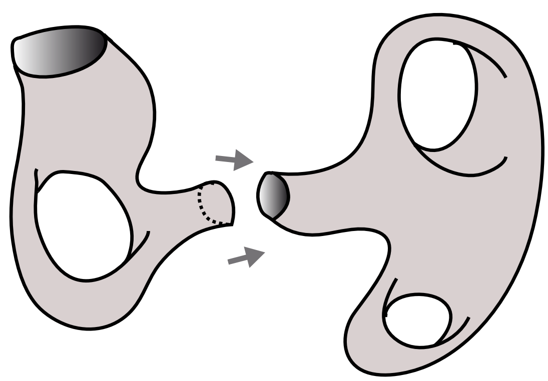


Figure 6.1 – Recollement

Nous voulons recoller des surfaces hyperboliques le long de leur bord. Nous avons besoin de définitions

Définition 6.0.9 *Une* arête *du bord d'une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés est une géodésique maximale incluse dans le bord de la surface.*

Remarques :

1. Nous avons vu dans la proposition 5.3.6 que les extrémités d'une arête – si elles existent – sont des coins.

6.1 Recollement et espace quotient

Nous nous donnons une surface S à bord géodésique et coins carrés. Soit γ_1 et γ_2 deux arêtes différentes définies sur des intervalles I_1 et I_2 de même longueur. On suppose par ailleurs que

- si γ_1 et γ_2 sont périodiques, alors elles ont la même période T.
- si γ_1 et γ_2 sont des longueur finies, alors les extremités de γ_1 sont distinctes, de même que les extrémités de γ_2.

Nous nous donnons enfin une isométrie ϕ de I_1 sur I_2.

Nous en déduisons une application noté également ϕ de $\gamma(I_1)$ dans $\gamma(I_2)$

Proposition 6.1.1 *Si x est un point de $\gamma_1(I_1)$, il existe $\epsilon > 0$, tels que z et t sont des points de $\gamma_1(I_1)$ tels que $d(x,z) < \epsilon$ et $d(x,t) < \epsilon$ sont des points de S, alors*

$$d(\phi(z), \phi(t)) = d(z,t).$$

Démonstration : Il suffit de prendre ϵ de telle sorte que les boules de centre x et $\phi(x)$ de rayon ϵ soient isométriques à une boule du demi-plan hyperbolique. $\square$

Définition 6.1.2 *Le* recollement *de S par ϕ est l'espace $S_\phi = S/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par*

$$x \sim y$$

si et seulement si $x = y$, ou $x = \gamma_1(s)$ et $y = \gamma_2(\phi(s))$. Nous noterons π la projection de S sur S_ϕ. Nous noterons également

$$\dot{S} = S \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2).$$

Nous ne demandons pas à S d'être connexe. Nous remarquons que π est une bijection de $\dot{s}$ sur son image.

Exercices :

1. Recollement de demie-boules : Soit x un point appartenant au bord d'un demi-plan hyperbolique P bordé par la géodésique γ. Soit S_0 une surface hyperbolique isométrique par ψ_0 à
$$B = \{y \in P \mid d(x,y) < \epsilon\}.$$
Soit S_1 une autre surface isométrique par ψ_1 à B. Soit ensuite a :$]-\epsilon, \epsilon[$ – respectivement b – l'arête de S –respectivement l'arête de Σ. On considère $\phi = \text{id}$ de $]-\epsilon, \epsilon[$ dans lui-même. Soit enfin, σ la symétrie par rapport à la géodésique γ.
Montrez que l'application Ψ de $S_0 \sqcup S_1$ dans la boule $B(x, \epsilon)$ de centre x de rayon ϵ, donnée par
$$\forall x \in S_0,\ \Psi(x) = \psi_0(x), \forall x \in S_1, \quad \Psi(x) = \sigma\psi_1(x),$$
donne naissance à une bijection, que nous noterons ψ de $(S_0 \sqcup S_1)/\sim$ dans $B(x, \epsilon)$.
2. Recollement de quart de boule : Énoncez une construction analogue pour les quarts de boules.
3. Représentez-vous visuellement le recollement de deux hexagones droits isométriques le long de leur couture.

6.2 Une distance sur le quotient

6.2.1 Courbes et longueurs

Définition 6.2.1 *Soit c une application de $[a,b]$ dans S_ϕ. Nous dirons que c est* adaptée *au recollement s'il existe une subdivision*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

et des courbes c_i C^1 par morceaux à valeurs dans S définie sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que

- $\pi \circ c_i = c|_{[x_i, x_{i+1}]}$,
- $\pi \circ c_i(x_{i+1}) = \pi \circ c_{i+1}(x_{i+1})$.

La longueur de c est alors

$$\ell(c) = \sum_i \ell(c_i).$$

Exercice : Montrez que l'application ψ définie en 1 du pragraphe précédent préserve la longueur des courbes : si c et une courbe adaptée, alors $\psi(c)$ est une courbe adaptée et de plus $\ell(\psi(c)) = \ell(c)$.

Minoration de la longueur des courbes

Nous allons démontrer une proposition utile qui nous permet de minorer la longueur des courbes adaptées. Il s'agit d'une généralisation de 5.2.4. Cette proposition nous garantit que les courbes sortant d'une boule sont de grande longueur.

Proposition 6.2.2 *Soit x un point de γ_1. Nous suppososerons que ϵ_0 est telle que les boules de centre x et $\phi(x)$ de rayon ϵ_0 sont isométriques des boules du quadrant. Pour tout $\alpha < \epsilon_0$, posons*

$$\overline{B}_\alpha = \pi(B(x,\alpha) \cup B(\phi(x),\alpha)).$$

Soit alors z et t deux points de $\overline{B}_\alpha$. Si c est une courbe adaptée joignant z à t qui n'est pas incluse dans $\overline{B}_{\epsilon_0}$, alors

$$\ell(c) \geq \epsilon_0 - \alpha.$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que

$$\pi^{-1}(\overline{B}_\alpha) = B(x,\alpha) \cup B(\phi(x),\alpha).$$

Soit maintenant c une courbe adaptée. Soit c_i et $x_0 < \ldots < x_n$ comme dans la définition. Si c n'est pas incluse dans n'est pas incluse dans $\overline{B}_{\epsilon_0}$, alors il existe s, tel que $s \in [x_i, x_{i+1}]$ telle que

$$c_i(s) \notin B(x,\alpha) \cup B(\phi(x),\alpha).$$

Soit alors

$$i_0 = \inf\{i \mid \exists s \in [x_i, x_i+1], c_i(s) \notin B(x,\alpha) \cup B(\phi(x),\alpha)\}.$$

Soit y_i le point de γ_1 tel que

$$y_i \sim (c_i(x_i)) \sim (c_{i-1}(x_i)).$$

Notre première remarque est que si $j < i_0$

$$\ell(c_i) \geq d(y_i, y_{i+1})$$

En effet

- soit $c_i(x_i)$ et $c_i(x_{i+1})$ appartiennent tous deux à γ_1 et

$$\begin{aligned} \ell(c_i) &\geq d(c_i(x_i), c_i(x_{i+1})) \\ &= d(y_i, y_{i+1}). \end{aligned}$$

- soit ils appartiennent tous deux à γ_2 et alors

$$\begin{aligned} \ell(c_i) &\geq d(c_i(x_i), c_i(x_{i+1})) \\ &= d(\phi \circ c_i(x_i), \phi \circ c_i(x_{i+1})) \\ &= d(y_i, y_{i+1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la proposition 5.2.4 appliquée soit à x soit à $\phi(x)$,

$$\ell(c_{i_0}) \geq \epsilon_0 - d(y_{i_0}, x).$$

Nous en déduisons finalement que

$$\begin{aligned} \ell(c) &\geq \sum_{i=0}^{i=i_0} \ell(c_i) \\ &\geq \epsilon_0 - d(y_{i_0}, x) + d(y_{i_0}, z) \\ &\geq \epsilon_0 - d(x,z) \\ &\geq \epsilon_0 - \alpha. \end{aligned}$$

□

6.2.2 Distance riemannienne

Ceci nous permet de définir une "distance" sur S_ϕ par

Définition 6.2.3 *Soit x et y deux points de S_ϕ. S'il n'existe pas de courbe adaptée joignant x à y, nous posons $d(x,y) = \infty$; Sinon, nous posons*

$$d(x,y) = \inf\{\ell(c) \mid c \textit{ adaptée joignant } x \textit{ à } y\}.$$

Recollement de demi-boules

Notre premier lemme nous permet de comprendre le recollement de deux demi-boules (ou de quart de boule).

Lemme 6.2.4 *Soit x un point appartenant au bord d'un demi-plan hyperbolique P bordé par la géodésique γ. Soit S_0 une surface hyperbolique isométrique par ψ_0 à*

$$B = \{y \in P \mid d(x,y) < \epsilon\}.$$

Soit S_1 une autre surface isométrique par ψ_1 à B. Soit ensuite a :$]-\epsilon,\epsilon[$ – respectivement b – l'arête de S –respectivement l'arête de Σ. On considère $\phi = \mathrm{id}$ de $]-\epsilon,\epsilon[$ dans lui-même.

Alors $(S_0 \sqcup \S_1)/\sim$ est isométrique à la boule de rayon ϵ de $\mathbb{H}^2$.

Nous avons un lemme analogue pour les quarts de boules.

Lemme 6.2.5 *Soit x un sommet du quadrant hyperbolique Q. Soit S une surface hyperbolique isométrique à*

$$\hat{B} = \{y \in Q \mid d(x,y) < \epsilon\}.$$

Soit Σ une autre surface isométrique à $\hat{B}$. Soit ensuite a : $[0,\epsilon[$ – respectivement b – une arête de S –respectivement une arête de Σ. On considère $\phi = \mathrm{id}$ de $[0,\epsilon[$ dans lui-même. Alors $(S \sqcup \Sigma)/\sim$ est isométrique à la boule B de rayon ϵ du demi plan centrée sur un point du bord.

La démonstration du premier lemme repose sur les exercices faits dans les paragraphes précédents : l'application ψ construite lors de ces exercices est une isométrie.

6.2.3 Recollement de surface

Nous allons montrer

Théorème 6.2.6 *L'espace S_ϕ muni de d est une surface hyperbolique à bord géodésique et coins carrés.*

De plus, π est une isométrie locale de S sur son image. Enfin, $\pi(\gamma_1)$ est une géodésique de S_ϕ.

Si S a n-arêtes et p coins. Alors S_ϕ a moins de $n-2$ arêtes. Si γ_1 a k extrémités (avec $0 \leq k \leq 2$) alors S_ϕ a $p - 2k$ coins.

Dire que π est une isométrie locale, c'est dire que pour tout x de S il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout z et t de $B(x,\epsilon)$,

$$d(\pi(z),\pi(t)) = d(z,t).$$

Nous allons démontrer ce théorème en plusieurs étapes.

Étape 1 : π est une isométrie locale.

Soit tout d'abord z et t deux points de S. L'image par π d'une courbe dans S joignant z à t est adaptée. En particulier

$$\begin{aligned} d(z,t) &= \inf\{\ell(c) \mid c \text{ joignant } z \text{ à } t\} \\ &\geq \inf\{\ell(c) \mid c \text{ adaptée joignant } \pi(z) \text{ à } \pi(t)\} \\ &\geq d(\pi(z), \pi(t)) \end{aligned}$$

Nous allons démontrer l'inégalité opposée. Soit x un point de S. Soit $\epsilon = \frac{1}{4}\epsilon_0$ un réel positif. Soit alors z et t deux points de $B(x,\epsilon)$. Notons Soit maintenant c une courbe adaptée joignant $\pi(z)$ à $\pi(t)$. Il nous suffit de montrer que, pour ϵ suffisamment petit $\ell(c) \geq d(z,t)$.

Distinguons trois cas.

Tout d'abord supposons que $x \in \dot{S}$. On peut choisir ϵ_0 suffisamment petit pour que $B(x,\epsilon_0)$ soit aussi inclus dans $\dot{S}$ et vérifie les hypothèes de la proposition 5.2.4. Si c est une courbe adaptée joignant z à t, nous avons deux situations :

- La courbe $c = \pi(c_0)$ est tracée dans $B(x,\epsilon_0)$ dans ce cas

$$\ell(c) = \ell(\pi(c_0)) = \ell(c_0) \geq d(z,t).$$

- La courbe c_0 sort de $B(x,\epsilon_0)$ et dans ce cas par la proposition 5.2.4

$$\ell(c) \geq \ell(\pi(c_0)) = \ell(c_0) \geq \frac{3\epsilon_0}{4} \geq d(z,t).$$

Supposons maintenant que $x \in \gamma_1$. Nous noterons comme dans la proposition 6.2.2,

$$\overline{B}_\alpha = \pi(B(x,\alpha) \cup B(\phi(x),\alpha)).$$

nous choisissons alors ϵ_0 suffisamment petit produit par la proposition 6.2.2 et posons $\epsilon = \epsilon_0/4$. Nous avons à nouveau deux deux cas,

- La courbe c est incluse dans $\overline{B}_\epsilon$. Soit alors Ψ l'application de $\overline{B}_\epsilon$ dans la boule de rayon ϵ du plan hyperbolique. Nous savons alors que

$$\ell(c) = \ell(\Psi(c)) \geq d(\Psi(z), \Psi(t)) = d(z,t).$$

- La courbe c sort de $\overline{B}_\epsilon$. Dans ce cas, d'après la proposition 6.2.2, on a

$$\ell(c) \geq \frac{3\epsilon_0}{4} \geq d(z,t).$$

Ceci termine la preuve du fait que π est une isométrie locale.

Étape 2 : d est une distance.

Étape 3 : S_ϕ est une surface hyperbolique.

6.3 Hexagones droits et pantalons

Chapitre 7

Constructions par quotient

7.1 Groupes agissant proprement discontinuement sans point fixe

Les définitions suivantes sont importantes.

Définition 7.1.1 *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$*.*

1. *On dit que* Γ *agit* proprement discontinuement *si tout point* x *de* $\mathbb{H}^2$*, il existe un réel* r *strictement positif tel que*
$$\sharp\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} < \infty.$$
2. *On dit que* Γ *agit* sans point fixe *si tout point* x *de* $\mathbb{H}^2$*,*
$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in \Gamma \mid x = gx\} = \mathrm{Id}.$$

Exercice : Montrez que le sous-groupe Γ de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit *proprement discontinuement sans point fixe* si et seulement si pour tout point x de $\mathbb{H}^2$, il existe un réel r strictement positif tel que
$$\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} = \mathrm{Id}.$$

7.1.1 La surface hyperbolique quotient

Notre principal résultat est le suivant

Théorème 7.1.2 *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *agissant proprement discontinuement sans point fixes sur* $\mathbb{H}^2$*. Alors, il existe une structure de surface hyperbolique sur* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$*, pour laquelle la projection de*
$$p : \mathbb{H}^2 \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^2,$$
est une isométrie locale.

Nous considérons le temps de cette preuve les éléments de $X := \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ comme des sous ensembles de $\mathbb{H}^2$.

Le théorème suit de la proposition suivante

Proposition 7.1.3 *Soit* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *définie par*
$$d(x, y) = \inf\{d(z, t) \mid p(z) = x,\ p(t) = y\}.$$
Alors,

1. *la fonction d est une distance,*
2. *pour tout x de $\mathbb{H}^2$, il existe ϵ strictement positif tel que p est une bijection préservant les distances de $B(x,\epsilon)$ dans $B(p(x),\epsilon)$.*

Démonstration : d est une distance : Clairement, d est symétrique et il est facile de vérifier l'inégalité triangulaire. Pour montrer que $d(x,y)=0$ implique $x=y$. Si $d(x,y)=0$, soit z et t tels que $p(z)=x$ et $p(t)=y$. Il existe donc des suites d'éléments $\{\gamma_i,\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tels que

$$d(\gamma_i z,\eta_i t)\to 0.$$

En posant $\beta_i=\eta_i^{-1}.\gamma_i$, on a

$$d(\beta_i z,t) \quad\to\quad 0. \tag{7.1}$$

Soit alors $r>0$, obtenu par la définition de groupe agissant proprement discontinument sans point fixe, tel que

$$\{g\in\Gamma \mid d(x,gx)<r\}=\mathrm{Id}.$$

Or, il existe i_0 tel que $i\geq i_0$ entraîne

$$d(\beta_i z,t)<r/2,$$

donc $i,j>i_0$,

$$d(\beta_j^{-1}.\beta_i z,z)=d(\beta_i z,\beta_j z)<r.$$

Dès lors $\beta_j^{-1}=\beta_i^{-1}=\beta_{i_0}^{-1}$. Nous déduisons de (7.1) que $t=\beta_{i_0}z$. Ainsi $x=p(z)=p(t)=y$.

p est une isométrie locale : Soit x un point de $\mathbb{H}^2$ et r tel que

$$\{g\in\Gamma \mid d(x,gx)<r\}=\mathrm{Id}.$$

Nous allons montrer que p est une isométrie locale de $B(x,r/4)$ sur son image. Soit en effet z et t appartenant à $B(x,r/4)$. Il est clair que

$$d(p(z),p(z))\leq d(t,z).$$

Démontrons l'inégalité inverse. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$d(p(t),p(z))<d(t,z).$$

Nous en déduisons qu'il existe γ et η dans Γ tel que

$$d(\gamma z,\eta t)<d(t,z). \tag{7.2}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} d(x,\eta^{-1}\gamma x) &\leq d(x,t)+\leq d(t,\eta^{-1}\gamma z)+d(\eta^{-1}\gamma z,\eta^{-1}\gamma z)\\ &\leq d(x,t)+\leq d(t,\eta^{-1}\gamma z)+d(z,x)\\ &\leq d(x,t)+\leq d(t,z)+d(z,x)\\ &< 2d(x,t)+2d(z,t)<r.\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que $\eta^{-1}\gamma=\mathrm{Id}$ et dons $\eta=\gamma$. En particulier,

$$d(\gamma z,\eta t)=d(t,z),$$

ce qui contredit (7.2).

Pour conclure, il suffit de montrer que p est surjective de $B(x,r)$ dans $B(p(x),r)$. Or nous savons que $p(B(x,r))\subset B(p(x),r)$. Si maintenant $d(p(y),p(x))<r$, alors il existe γ dans Γ tel que $d(\gamma.y,x)<r$. Ainsi $p(y)=p(\gamma.y)\in B(x,r)$ et donc $B(p(x),r)\subset p(B(x,r))$.

□

7.2 Sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

7.2.1 Sous-groupe discrets et sans torsion

Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 7.2.1 *Un sous-groupe* Γ *de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *agit proprement discontinument sur* $\mathbb{H}^2$ *si et seulement si il est discret.*

Un sous-groupe Γ *de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *agit proprement discontinument sans point fixe sur* $\mathbb{H}^2$ *si et seulement si il est discret et sans torsion.*

Nous allons définir les termes de ce théorème puis le démontrer.

Sous-groupes discrets

Notons $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices de déterminant ± 1. Rappellons que le choix d'un modèle du demi-plan de Poincaré, donne naissance à un homomorphisme surjectif

$$\pi : \mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2),$$

dont le noyau est le groupe $\{+\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$. Le morphisme est donné si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

par

$$\pi(A).z = \frac{az+b}{cz+d},$$

si $\det(A) = 1$ et

$$\pi(A).z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},$$

si $\det(A) = -1$. Pour simplifier les notations si $A \in SL^{\pm}(2,\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}^2$ nous écrirons $A.z$ plutôt que $\pi(A).z$.

Rappelons enfin qu'un ensemble X d'un espace topologique Y est *discret* si pour tout x de X, il existe un ouvert U de Y tel que

$$U \cap X = \{x\}.$$

Définition 7.2.2 *Nous dirons qu'un sous-groupe* Γ *de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *est* discret *si* $\pi^{-1}(\Gamma)$ *est un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$.

Voici quelques propriétés importantes des sous-groupes discrets de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$

Lemme 7.2.3 *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$

1. *Si* Γ *est discret, toute suite convergente formé d'élements de* Γ *est constante à partir d'un certain rang.*
2. *Si* Γ *est discret,* Γ *est fermé.*
3. *Le sous-groupe* Γ *est discret si et seulement si il existe un voisinage* U *de* Id *dans* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *tel que* $U \cap \gamma = \{\mathrm{Id}\}$.
4. *Si* Γ *est discret, alors tout sous-groupe de* Γ *est discret. Réciproqument, si* Γ *admet un sous-groupe discret d'indice fini, alors* Γ *est discret.*

DÉMONSTRATION : Pour (1), soit $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On suppose que cette suite converge vers g_0. Comme Γ est discret, il existe un ouvert U de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tel que $U\cap\Gamma=\{\mathrm{Id}\}$. On sait que $\{\gamma_n g_0^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Id. Pour j suffisamment grand $\gamma_j g_0^{-1}$ appartient à U. Comme de plus la suite $\{\gamma_j\gamma_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma_j g_0^{-1}$, nous en déduisons que pour i suffisamment grand $\gamma_j\gamma_i^{-1}$ appartient à U et donc $\gamma_j=\gamma_i$ à partir d'un certain rang.

L'assertion (2) est une conséquence immédiate de (1). Si enfin U est comme dans (3), alors pour tout g de Γ, $g.U$ est un voisinage ouvert de g tel que $g.U\cap\Gamma=\{\mathrm{Id}\}$. En particulier Γ est discret.

Nous laissons la dernière propriété en exercice. □

REMARQUES : La proposition n'utilise que les propriétés suivantes du groupe $G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ vu comme espace topologique

1. l'application inverse $g\mapsto g^{-1}$ de G dans G est continue,
2. le produit $(g,u)\mapsto g.h$ de $G\times G$ dans G est continu.

En général, un groupe G muni d'une topologie vérifiant ces deux propriétés est appelé *groupe topologique*. La proposition est vraie dans le cadre général d'un sous-groupe discret d'un groupe topologique.

Proposition 7.2.4 *Le groupe* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *image des matrices à coefficients entiers de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est un sous-groupe discret de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

DÉMONSTRATION : En effet, lorsque l'on réalise les matrices comme des éléments de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\cap\mathbb{Z}^4.$$

Le sous-ensemble $\mathbb{Z}^4$ étant discret, un sous-ensemble d'un ensemble discret étant discret, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est discret. □

Élements de torsion

Définition 7.2.5
1. *Un élément g de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *diférent de l'identité est* de torsion *s'il existe $n>0$ tel que $g^n=\mathrm{Id}$.*
2. *Un sous-groupe Γ de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ *est* sans torsion *s'il n'a pas d'élément de torsion.*

EXERCICE : Montrez que si $g^2=\mathrm{Id}$ et g renverse l'orientation, alors g est un symétrie axiale. Montrez que si g est de torsion et conserve l'orientation alors g est elliptique. En déduire que si Γ contient un élément de torsion, alors il contient un élément non trivial ayant un point fixe.

Un lemme important dû à Atle Selberg généralise ce dernier résultat. Sa démonstration dépasse le cadre de ce cours. Nous n'utiliserons pas ce lemme.

Lemme 7.2.6 [SELBERG] *Tout sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ engendré par un nombre fini d'élements admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion.*

Proposition 7.2.7 *Soit p un entier naturel premier et Γ_p, le noyau de l'application naturelle de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *dans* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. *Alors, pour $p>3$, le groupe Γ_p est sans torsion.*

DÉMONSTRATION : Comme un élement de torsion A de Γ_p est elliptique sa trace est plus petite que 2. Comme elle est entière elle vaut 1, -1 ou 0. Mais par ailleurs cette trace est congrue à 2 modulo p, ce qui est impossible si $p>3$. □

Un premier lemme

Nous avons besoin d'un lemme

Lemme 7.2.8 *Soit x un point du demi-plan de Poincaré et ϵ un réel strictement positif Alors l'ensemble*

$$K_x(\epsilon) = \{g \in \mathrm{SL}^{\pm}(2, \mathbb{R}) \mid d(x, g(x)) \leq \epsilon\},$$

est compact.

Démonstration : Si ϕ est un élément de $\mathrm{SL}^{\pm}(2, \mathbb{R})$, on a

$$K_{\phi(x)}(\epsilon) = \phi^{-1} K_x(\epsilon) \phi.$$

Il suffit donc de démontrer que K_i est compact. Comme cet ensemble est fermé, il suffit de démontrer qu'il est borné. Or remarquons que pour tout r, il existe k_0, k_1 et k_2 strictement positifs tel que

$$B(i, \epsilon) \subset \{x + iy \mid k_1 > y > k_0,\ |x| < k_2\}$$

Supposons tout d'abord que $A \in SL(2, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A(i) &= \frac{(ai + b)(d - ci)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Dès lors, si $A(i) \in B(i, \epsilon)$, alors $k_1 > \Im(A(i)) > k_0$ et donc

$$\begin{aligned} c &< 1/\sqrt{k_0} \\ d &< 1/\sqrt{k_0} \\ c^2 + d^2 &> 1/k_1. \end{aligned}$$

Comme $|\Re(A(i))| < k_2$, il vient $|ac + bd| < k_2/k_1$; en utilisant $ac - bd = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{k_2 + k_1}{k_1 \sqrt{k_0}} &\geq |c||ac + bd| + |d||ad - bc| \\ &\geq |ac^2 + bdc + ad^2 - bdc| = |a||c^2 + d^2| \\ &\geq \frac{a}{k_1}. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que $a \leq (k_2 + k_1)/\sqrt{k_0}$. Un raisonnement analogue montre que $b \leq (k_2 + k_1 1)/\sqrt{k_0}$. Nous venons de montrer que pour tout ϵ, il existe K tel que $A(i)$ élément de $B(i, \epsilon)$, alors

$$\sup(|a|, |b|, |c|, |d|) \leq K.$$

En particulier, l'ensemble $K_i(\epsilon) \cap \mathrm{S}\,L(2, \mathbb{R})$ est borné et donc compact. Un raisonnement analogue pour les isométries renversant l'orientation monte que $K_i(\epsilon)$ est compact. □

Démonstration du théorème

Nous voulons montrer la première partie du théorème.

Proposition 7.2.9 *Un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$. Si, de plus, il est sans torsion, il agit sans point fixes.*

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{H}^2$. Nous allons montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\sharp\{g \in \Gamma \mid d(x, gx) < r\} < \infty.$$

Raisonnons par l'absurde. Dans le cas contraire il existe une suite infinie g_i d'éléments de Γ tous distincts tels que la suite $\{g_i.x\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Soit $\tilde{g}_i$ des relevés de g_i dans $\mathrm{SL}^{\pm}(2, \mathbb{R})$.

D'après le lemme 7.2.8, la suite $\{\tilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact. Nous pouvons donc extraire une sous-suite convergente vers g_0 tels que $g_0(x) = x$. Cette suite étant constante à partir d'un certain rang d'après le lemme 7.2.3 nous obtenons la contradiction.

Supposons de plus que Γ est sans torsion, raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons qu'il existe g dans Γ et $x \in \mathbb{H}^2$ tel que $gx = x$. Dès lors, pour tout n, $g^n.x = x$, le groupe $\{g^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fini, ce qui implique que g est un élement de torsion et la contradiction. □

Nous démontrons la deuxième partie du lemme,

Proposition 7.2.10 *Un sous-groupe Γ de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$ qui agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}^2$ est discret, si de plus il n'a pas de point fixe il est sans torsion.*

Démonstration : Supposons que Γ nest pas discret, alors il existe une suite d'éléments $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ qui converge vers Id. Mais alors pour tout x de $\mathbb{H}^2$, la suite $\{g_i.x\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers x et la contradiction. De même, si g_0 vérifie $g_0^n = \mathrm{Id}$, alors g_0 est un élément elliptique et fixe donc un point x de $\mathbb{H}^2$, ce qui donne à nouveau une contradiction. □

7.3 Quotient et pavages

7.3.1 Domaine fondamental

Commençons par une définition généralisant celle de polygone convexe.

Définition 7.3.1 *Une famille de geodésiques $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ est* localement finie *si pour tout x de $\mathbb{H}^2$, pour tout $R > 0$*

$$\sharp\{i \in I \mid \gamma_i \cap B(x, R) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Un polygone convexe infini *est une composant connexe du complémentaire d'une famille localement finie de géodésiques.*

Remarques :

1. De la même manière que pour les polygones convexes, un polygone convexe infini est une intersection de demi plan.
2. Par construction, si P est un polygone convexe, pour tout x et R il existe un polygone convexe Q tel que
$$B(x, R) \cap P = B(x, r) \cap Q.$$
3. Les propriétés "locales" des polygones convexes restent vraies pour les polygones convexes infini.

Définition 7.3.2 *Si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$, un* domaine fondamental *de Γ est un polygone convexe infini P tel que*

- *Pour tout γ de Γ différent de l'identité, $\gamma P \cap P = \emptyset$.*
- *De plus $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma.\overline{P}$.*

Autrement dit, le plan hyperbolique est *pavé* par les images de P par Γ.

Nous avons alors

Théorème 7.3.3 *Tout sous-groupe discret sans torsion* Γ *admet un domaine fondamental. De plus, si* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ *est compact, alors* Γ *admet un domaine fondamental qui est un polygone convexe borné.*

Réciproquement, si Γ *admet un domaine fondamental, alors* Γ *est discret.*

La première partie du theorème découle du lemme suivant

Lemme 7.3.4 *Soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion. Soit* x *un point de* $\mathbb{H}^2$*. Soit*

$$\Delta_x = \{y \in \mathbb{H}^2 \mid \forall g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}, d(x,y) < d(g.x,y)\}.$$

Alors, Δ_x *est un polygone convexe infini et un domaine fondamental pour l'action de* Γ

Démonstration :

□

7.4 Des exemples de groupes discrets

Nous allons donner des exemples de groupes et de surfaces hyperboliques quotients. Nous ne donnerons pas les démonstrations. Les deux premiers cas sont des exercices faciles.

A chaque fois, un domaine fondamental est construit.

7.4.1 Groupes élementaires

Une isométrie hyperbolique et son tube

Nous considérons une translation hyperbolique τ. Alors le groupe $\Gamma = \{\tau^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est discret et sans torsion. De plus

- soit γ l'axe de τ et $x \in \gamma$,
- soit γ_0 la géodésique orthogonale à γ passant par x ;
- soit P le polygone bordé par γ_0 et $\tau(\gamma_0)$,

Alors le *tube hyperbolique* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est la surface obtenue à partir de P en recollant γ_0 et $\tau(\gamma_0)$ par τ.

Le polygone P est le domaine fondamental de Γ

Une isométrie parabolique et sa pointe

Nous considérons une transformation parabolique τ. Alors le groupe $\Gamma = \{\tau^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est discret et sans torsion. De plus

- soit x le point fixe à l'infini de τ,
- soit γ_0 une géodésique orthogonale passant par x,
- soit P le polygone bordé par γ_0 et $\tau(\gamma_0)$,

Alors la *pointe hyperbolique* $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est la surface obtenue à partir de P en recollant γ_0 et $\tau(\gamma_0)$ par τ.

A nouveau, le polygone P est le domaine fondamental de Γ

7.4.2 Groupes engendrés par des reflexions

Polygones à angles droits

Le théorème suivant est utile pour construire des sous-groupe discrets.

Théorème 7.4.1 *Soit* P *un polygone à angles droits. Soit* Γ_P *le groupe engendré par les symétries axiales par rapport aux côtés de ce polygone. Alors* Γ *est un groupe discret dont* P *est un domaine fondamental.*

Un nouveau point de vue sur les pantalons

Soit γ_1 et γ_2 et γ_3 des géodésiques disjointes. Soit σ_i les translations hyperboliques tels que $\sigma_i(\gamma_{i+1}) = \gamma_{i+2}$. Soit Γ le groupe engendré par σ_1, σ_2 et $\sigma 3$. Soit P le polygone bordé par les trois géodésiques γ_1 et γ_2 et γ_3.

Théorème 7.4.2 *Le groupe Γ est un sous-groupe discret. De plus $\Gamma\backslash \operatorname{Iso}(\mathbb{H}^2)$ contient une image isométrique d'un pantalon. Enfin, P est un domaine fondamental pour Γ*

DÉMONSTRATION : Soit Γ_P le groupe engendré par les reflexions sur les côtés de P, et $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma_P$. On montre que Γ_0 est d'indice 2 dans Γ et donc que Γ est discret. $\square$

7.4.3 Groupes de triangles

Voici un autre exemple de construction que nous admetterons sans démonstration.

Théorème 7.4.3 *Soit p, q, r des entiers positifs tels que $1/p + 1/q + 1/r < 1$. Soit T le triangle d'angles aux sommets π/p, π/q et π/r alors le* groupe de triangle $\mathcal{T}(p, q, r)$ *engendré par les trois symétries d'axe les côtés de ce triangle est un sous-groupe discret.*

Chapitre 8

Les applications à valeurs dans dans le cercle

8.1 Motivation

Question 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t \mapsto c(t)$, $I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note $r(t) \in]0, +\infty[$, $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \to \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) \in \bar{\theta}(t)$ pour tout t ?

Question 2. Supposons que $I = \mathbb{R}$ et que c est 2π-périodique. Peut-on choisir la fonction continue $t \mapsto \theta(t)$ 2π-périodique ?

Question 3. La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Rappel : détermination principale du logarithme

Définition 8.1.1 *La* détermination principale du logarithme *est la fonction holomorphe* Log *définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $z \mapsto 1/z$.*

On la calcule en intégrant $1/z$ le long d'arcs évitant $\mathbb{R}_-$. On trouve que si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, alors

$$\mathrm{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de Log en un point de $\mathbb{R}_-$ sont distinctes entraîne que $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc la réponse à la question 3 est négative.

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

Exemple : Soit $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$. Alors $r(t) = 1$ pour tout t et il n'existe pas de fonction continue 2π-périodique $t \mapsto \theta(t)$ telle que $c(t) = e^{i\theta(t)}$.

En effet, sinon, la formule $\mathrm{my} - \log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$ définirait une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $e^{my-log(z)} = z$. Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que $\mathrm{my} - \log$ est holomorphe, de dérivée $1/z$, contradiction.

8.2 Le théorème de relèvement

Théorème 8.2.1 *On note $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$. Soit $t \mapsto u(t)$, $I \to U$ une application continue. Soit θ_0 un réel tel que $e^{i\theta_0} = u(x_0)$. Il existe une unique fonction continue $t \mapsto \theta(t)$, $I \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.*

Démonstration : L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans $2\pi\mathbb{Z}$, nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en t_0.

Supposons d'abord qu'il existe un point $v \in U$ qui n'est pas dans l'image de u. Si $v = -1$, posons $\theta_v(t) = -i\mathrm{Log}(u(t))$. Si $v \neq -1$, posons $\theta_v(t) = -i\mathrm{Log}(-u(t)/v) - i\mathrm{Log}(v) - i\pi$. Dans les deux cas, $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$ pour tout $t \in I$. En particulier, $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$, donc il suffit d'ajouter un multiple entier de 2π à θ_v pour que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Passons au cas général. Soit $T = \sup\{s \in I \mid \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$ (éventuellement, $T = +\infty$). Supposons que $T \in I$. Soit $v \in U$ un point distinct de $u(T)$. Par continuïté de u, il existe $\epsilon > 0$ tel que u ne prenne pas la valeur v sur $]T - \epsilon, T + \epsilon[\cap I$. Par définition de T, il existe un $t > T - \epsilon$ et une solution θ_s définie sur $[t_0, s]$. Alors $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$, donc il existe un entier n tel que $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$. On prolonge θ_s par continuïté en posant $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$ pour $t \in [s, T + \epsilon[\cap I$. On obtient une solution définie sur $[t_0, T + \epsilon[\cap I$. Ceci contredit le choix de T. On conclut que $T \notin I$, donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de t_0, on construit le relèvement souhaité sur I entier. □

Moralité. On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle $\mathbb{R} \to U$ du cercle unité : au voisinage de chaque point de U, on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les *revêtements*, on y reviendra.

8.3 Degré

Retour à la question 2. Soit $u : \mathbb{R} \to U$ une application 2π-périodique. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relèvement de u. Alors $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$ est un autre relèvement de u, donc il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$. L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ($\theta(t) = t$) montre que n n'est pas toujours nul.

Définition 8.3.1 *Soit $f : U \to U$ une application continue, soit θ un relèvement de $t \mapsto f(e^{it})$. On appelle* degré *de f l'entier $n = \deg(f)$ tel que $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$.*

Exemple : Le degré de $z \mapsto z^n$ est n.

Proposition 8.3.2 *Si deux applications f et $g : U \to U$ sont telles que pour tout s, $|f(s) - g(s)|$ est strictement plus petit que 2, elles ont même degré.*

Démonstration : Supposons que $|f - g| < 2$. Soit θ_f, $\theta_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des relèvements de f et g. On peut les choisir de sorte que $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$. Supposons que $s = \inf\{t > 0 \,|\, |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi\}$ est fini. Alors $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$, ce qui contredit $|f(s) - g(s)| < 2$. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g)| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\deg(f) = \deg(g)$. □

Chapitre 9

Groupe fondamental

9.1 Chemins et lacets

9.1.1 Définitions

Définition 9.1.1 *Soit X un espace topologique. Un* chemin *dans X est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$. Lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de* lacet, basé *au point $x = \gamma(0) = \gamma(1)$.*

Dans le cas où X est le cercle U, on définit le degré du lacet α par la formule

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\eta(1) - \eta(0)),$$

où $\alpha = e^{i\eta}$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de η.

9.1.2 Composition et inverse

Définition 9.1.2 [Composition] *Si α, $\beta : [0,1] \to X$ sont des chemins tels que $\beta(0) = \alpha(1)$, leur* composition *est le chemin noté $\alpha \cdot \beta$ tel que*

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \textit{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t-1) & \textit{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Proposition 9.1.3 *Si $X = U$ alors $\deg(\alpha.\beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$.*

Démonstration : En effet supposons $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(0) = \eta(0)$. Nous pouvons alors écrire $\alpha.\beta = e^{i\xi}$ où

$$\begin{cases} \xi(t) = \theta(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \xi(t) = \eta(2t-1) + \deg(\alpha)2\pi & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que ξ est continue et que $\xi(1) - \xi(0) = 2\pi(\deg(\alpha + \deg(\beta))$. □

Définition 9.1.4 [Inverse] *L'*inverse *d'un chemin α, noté α^{-1}, est défini par*

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t).$$

Exercice : Si $X = U$ alors $\deg(\alpha^{-1}) = -\deg(\alpha)$.

9.2 Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

Définition 9.2.1 *Soit α, $\beta : [0,1] \to X$ des chemins de mêmes extrémités x_0 et x_1. On dit que α et β sont* homotopes *(à extrémités fixées), et on note $\alpha \sim \beta$, s'il existe une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ – appelée* homotopie *– telle que*

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \alpha(t), \\ F(1,t) &= \beta(t), \\ F(s,0) &= x_0, \quad F(s,1) = x_1. \end{aligned}$$

Notre premier lemme explique que deux paramétrisations différentes donne deux chemins homotopes.

Lemme 9.2.2 *Soit α et β deux chemins. On suppose qu'il existe une application continue h de $[0,1]$ dans lui-même tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ et $\alpha = \beta \circ h$. Alors α et β sont homotopes.*

9.2.1 Exemples d'homotopie

Voici deux exemples concernant des espaces topologiques particuliers.

Proposition 9.2.3 *Si X est un convexe d'un espace affine, alors deux chemins quelconques ayant les mêmes extrémités sont homotopes.*

Proposition 9.2.4 *Soit α un chemin et h une aplication continue de $[0,1]$ dans lui même tekle que $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ alors $\alpha \circ h$ est homotope à α.*

Proposition 9.2.5 *Si $X = U$, deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même degré.*

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que α et β sont homotopes par une application H. Par définition pour tout s, l'application $H_s : t \to H(s,t)$ est un lacet. Par uniforme continuité de H, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|s - s'| \leq \epsilon$ entraine $|H_s(t) - H_{s'}(t)| \leq 1$. En particulier, d'après la proposition 8.3.2, $\deg(H_s) = \deg(H_{s'})$. La fonction $s \to \deg(H_s)$ est localement constante donc constante. En particulier $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$.

Réciproquement, supposons $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$. Nous pouvons écrire $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\eta}$ tels que $\theta(0) = \eta(0)$. Puisque $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$, nous avons également $\theta(1) = \eta(1)$. Nous pouvons alors définir une homotopie entre α et β par

$$H(s,t) = e^{i((1-s)\theta(t)+s\eta(t))}.$$

□

9.3 Simple connexité

Définition 9.3.1 *On dit qu'un espace topologique X est* simplement connexe *si il est connexe et si tout lacet est homotope à un lacet constant.*

9.3.1 Premiers exemples

Comme premier exemple, nous avons

Proposition 9.3.2 *Si X est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, alors X est simplement connexe.*

Proposition 9.3.3 *Si X est un ensemble géodésiquement convexe de $\mathbb{H}^2$, alors X est simplement connexe.*

Proposition 9.3.4 *Le cercle U n'est pas simplement connexe.*

9.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental

9.4.1 Propriétés fondamentales

Par la suite il ne sera pas toujours utile de construire explicitement les homotopies. Les propriétés suivantes nous permettront de montrer l'homotopie de nombreux chemins

Proposition 9.4.1 *Si x_0 est un point de X, on note par x_0 le chemin constant égale à x_0*

(i) Si α est homotope à β, alors β est homotope à α.

(ii) Si α est homotope à β et β à γ, alors α est homotope à γ.

(iii) Si α est homotope à α' et β à β', alors $\alpha.\beta$ est homotope à $\alpha'.\beta'$.

(iv) Le chemin α est homotope à $\alpha.\alpha(1)$ et à $\alpha(0).\alpha$.

(v) Le lacet $\alpha.\alpha^{-1}$ est homotope à $\alpha(0)$.

(vi) Le chemin $(\alpha.\beta).\gamma$ est homotope à $\alpha.(\beta.\gamma)$.

Démonstration : Pour les propriétés (iv,v,vi), on utilisera avec profit la proposition 9.2.4. □

Nous en déduisons immédiatement

Corollaire 9.4.2 *Etre homotope est une relation d'équivalence.*

9.4.2 Le groupe fondamental

Nous déduisons immédiatement des propriétés prouvées dans la proposition 9.4.1.

Théorème 9.4.3 *Soit $x \in X$. Soit $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en x. La composition des lacets induit sur $\pi_1(X,x)$ une structure de groupe.*

Définition 9.4.4 *On appelle $\pi_1(X,x)$ le* groupe fondamental *de X.*

On note quelquefois $\Omega_x(X)$ l'ensemble des lacets de X basés en x de telle sorte que

$$\pi_1(X,x) = \Omega_x(X)/\sim .$$

9.4.3 Exemples

Nous pouvons énoncer de manière plus savante nos diverses remarques sur le degré des lacets dans le cercle.

Proposition 9.4.5 *Le groupe fondamental du cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est donné par le degré* $\deg : \pi_1(U,1) \to \mathbb{Z}$.

Proposition 9.4.6 *Soit S^n la sphère de dimension n. Si $n \geq 2$, alors S^n est simplement connexe.*

Démonstration : Soit $\gamma : [0,1] \to S^n$ un lacet. Nous appelerons *cercle* l'intersection d'un plan de dimension deux avec la s sphère.

Premier cas. Supposons que γ évite au moins un point $u \in S^n$. Comme $S^n \setminus \{u\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, γ est homotope à une constante dans $S^n \setminus \{u\}$, et *a fortiori* dans S^n. Plus géneralement, le même raisonnment montre que tout chemin évitant un point est homotope à un chemin tracé sur un cercle.

Cas général. Pour se ramener au premier cas, on montre que γ est homotope à un lacet qui évite un point. Par continuïté uniforme, il existe un entier N tel que si $|t'-t| \leq 1/N$, alors $|\gamma(t')-\gamma(t)| < 1$. En particulier, le chemin γ_i qui est la restriction de γ à l'intervalle $[i/N,(i+1)/N]$ evite le point $-\gamma(t_i)$. Le chemin γ_i est donc homotope à un chemin tracé sur un cercle. Le chemin γ est alors lui aussi homotope à un chemin tracé sur une réunion finie de cercles. Si $n \leq 2$ alors. Cette réunion finie de cercles évite un point. □

Proposition 9.4.7 *Soit X, Y des espaces topologiques, $x \in X$, $y \in Y$. Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y).$$

En particulier, le groupe fondamental du tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.

DÉMONSTRATION : Un lacet basé en (x, y) dans $X \times Y$, c'est un couple d'un lacet de X basé en x et d'un lacet de Y basé en y. Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. □

9.5 Changement de points base et applications

Les théorèmes suivants résument quelques constructions supplémentaires.

9.5.1 Chemins et changements de points base

Théorème 9.5.1 *Soit c un chemin joignant x à y, alors l'application $\alpha \mapsto c^{-1}.\alpha.c$ de $\Omega_x(X)$ dans $\Omega_y(X)$ donne naissance à un isomorphisme de groupe $c_* : [\alpha] \mapsto [c^{-1}.\alpha.c]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_(Y, y)$. De plus si c joint x à y et c' joint y à z alors $(c.c')_* = c_* \circ c'_*$.*

9.5.2 Applications entre espaces

Théorème 9.5.2 *Soit f une application continue de X dans Y alors l'application $\alpha \mapsto f \circ \alpha$ de $\Omega_x(X)$ dans $\Omega_{f(x)}(Y)$ donne naissance à un morphisme de groupe $f_* : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$, de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$.*

1. *de plus $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$,*
2. *si f et g sont homotopes par H alors $g_* = c_* \circ f_*$, où c est le chemin $t \mapsto H(t, x)$.*

9.6 Surfaces hyperboliques simplement connexes

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 9.6.1 *Soit S une surface hyperbolique simplement connexe complète alors il existe une isométrie locale p de S dans $\mathbb{H}^2$.*

Si de plus S est complète alors S est une isométrie de S sur un polygone hyperbolique à angle droit localement fini du plan hyperbolique.

9.6.1 Isométries et chemins de boules

Définition 9.6.2 *Soit x et y deux points d'une surface hyperbolique S. Un* chemin de boules *de x à y est une famille finie de boules $\{B_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ où les B_i sont des boules de S isométriques à des boules de l'espace modèle telles que*

- *La boule B_1 contient x, la boule B_n contient y,*
- *$B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$,*
- *Pour tout i, il existe un boule $\tilde{B}_i$ isométrique à une boule hyperbolique et tel que alors $B_j \subset \tilde{B}_i$ où $j \in \{i-1, i, i+1\}$,*

Les boules B_1 et B_n sont respectivement appelées boules initiales et boules finales.

Nous dirons qu'un courbe $c : [0, 1] \to S$ est couverte *par un chemin de boules $\{(B_i, \tilde{B}_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ si il exiset une subdvision $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_n = 1$ telle que $c[t_i, t_{i+1}] \subset B_i$*

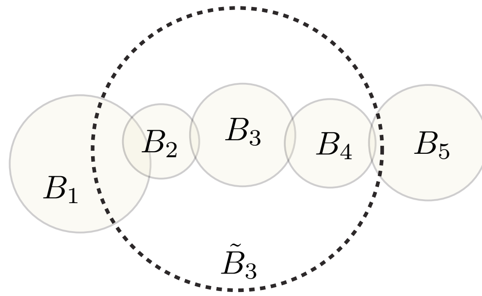


FIGURE 9.1 – Un chemin de boules

Nous remarquons que toute courbe est couverte par un chemin de boules : il suffit de trouver un $\epsilon > 0$ tel que la boule $B(c(t), \epsilon)$ est isométrique avec une boule de l'espace hyperbolique pour tout t, puis de considérer N tel que $|t - s|frm[o]--/N$ implique $d(c(t), c(s)) \leq \epsilon/4$. Alors $\{B(c(i/N), \epsilon/4), B(c(i/N), \epsilon)\}$ est un chemin de boules qui recouvre c.

Réciproquement tout chemin de boules recouvre un chemin.

La propriété utile est la suivante

Proposition 9.6.3 *Soit $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ un chemin de boule. Soit f_1 une isométrie de $\tilde{B}_1$ dans l'espace modèle. Il existe alors une unique suite d'isométries f_i de $\tilde{B}_i$ dans l'espace modèle, telle que si $|i - j| < 2$*

$$f_i|_{B_j} = f_j|_{B_j}.$$

*L'isométrie f_n est l'*isométrie finale *déterminée par f_1 et le chemin de boule $\mathcal{B}$.*

DÉMONSTRATION : Cette proposition repose sur les deux remarques suivantes :

1. Soit ϕ et ψ deux isométries d'une boule b dans dans $\mathbb{H}^2$, alors il existe une unique isométrie F de $\mathbb{H}^2$ telle que $\phi = H \circ \Psi$.
2. Soit B une boule de S isométrique à une boule de $\mathbb{H}^2$, soit $b \subset B$ une autre boule et ϕ une isométrie de b dans $\mathbb{H}^2$. Il existe alors une unique isométrie ψ de B dans $\mathbb{H}^2$ telle que $\phi = \psi|_b$.

Nous en déduisons de (1) l'unicité de la suite f_i. On construit cette suite par récurrence de la manière suivante. Soit f_i l'isométrie de B_i dans $\mathbb{H}^2$. Par (2), il existe une isométrie g_i de $\tilde{B}_i$ dans $\mathbb{H}^2$ telle que $g_i|B_i = f_i$. On pose alors $f_{i+1} = g_i|_{B_{i+1}}$ $\square$

9.6.2 Chemin de boules homotopes

Définition 9.6.4 *Nous dirons que le chemin de boule $\mathcal{B}$ est une* restriction *du chemin de boules $\mathcal{B}'$ si les boules définissant $\mathcal{B}$ forment un sous ensembles des boules définissant $\mathcal{B}'$.*

Deux chemins de boules $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont homotopes à extrémité fixées *s'il existe une famille finie de chemins de boules $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\{1,\dots,p\}}$ allant de x à y tels que pour tout i,*

- *soit $\mathcal{B}_i$ est une restriction de $\mathcal{B}_{i+1}$,*
- *soit $\mathcal{B}_{i+1}$ est une restriction de $\mathcal{B}_i$,*

Nous remarquons immédiatement

Proposition 9.6.5 *Soit c et c' deux chemins de x à y couverts par deux chemins de boules homotopes, alors c et c' sont homotopes.*

Nous démontrerons dans la proposition 9.6.7 la réciproque de ce résultat.
Nous avons la proposition immédiate suivante

Proposition 9.6.6 *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont* homotopes, *alors l'isométrie finale déterminée par $\mathcal{B}$ et f_1 coincide avec l'isométrie finale déterminée par $\mathcal{B}'$ et f_1.*

Démonstration : En effet, il suffit de considérer le cas où $\mathcal{B}'$ est obtenu à partir de $\mathcal{B}$ en intercalant une boule B entre la boule B_1 et B_2. On sait alors qu'il existe une boule $\tilde{B}$ isométrique à une boule hyperbolique qui contient B_1 et B_2. Soit alors (f_1, f_2) les isométries correspondant au chemin (B_1, B_2) et (g_1, f, g_2) les isométries correspondant au chemin (B_1, B, B_2). Nous voulons montrer que si $f_1 = f_2$ alors $g_1 = g_2$. Ceci provient de ce qu'il existe g de $\tilde{B}$ dans $\mathbb{H}^2$ telle que $f_1 = g|_{B_1}$ Alors, $g_2 = g|_{B_2} = f_2$. ☐

Nous allons montrer

Proposition 9.6.7 *Deux chemins de boules couvrant des courbes homotopes allant de x à y sont homotopes. En particulier, deux chemins de boules sur une surface simplement connexe sont homotopes.*

Démonstration : On utilise la même idée que pour recouvrir les chemins en recouvrant les homotopies. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux chemins de boules allant de x à y. Soit c et c' deux chemins de x à y couvert par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.

Soit H l'homotopie entre c et c'. Considérons alors ϵ tel que la boule de centre $H(s,t)$ de rayon 4ϵ soit isométrique à une boule hyperbolique. Soit ensuite $N \in \mathbb{N}$ tel

$$\forall s, t, s', t' \text{ tel que } |s-t| + |s'-t'| \leq 1/N, \text{ alors } d(H(s,t), H(s',t'))|\epsilon.$$

Soit ensuite $b_{k,l}$ la boule de centre $H(k/N, l/N)$ et de rayon ϵ. Par construction pour toute suite d'indice k_i, l_i tels que $\sup(|k_i - k_{i+1}|, |l_i - l_{i+1}| \leq 1)$ la suite $B_i = b_{k_i, l_i}$ est un chemin de boules. Cette suite d'indice se représente graphiquement comme un "chemin" sur le quadrillage du carré $[0,1] \times [0,1]$ par N^2 côtés.

Nous remarquons que les chemins $(B_{i,j}, B_{i+1,j}, B_{i+1,j+1})$, $(B_{i,j}, B_{i+1,j+1})$ et $(B_{i,j}, B_{i,j+1}, B_{i+1,j+1})$ sont homotopes. Nous en déduisons que tous les chemins joignant le côté inférieur du carré au côté supérieur sont homotopes à extrémités fixés (voir figure 9.2)

La fin de la preuve suit de la proposition suivante. ☐

Proposition 9.6.8 *deux chemins de boules couvrant le même chemin sont homotopes.*

Démonstration : Nous dirons qu'un chemin de boule $\{B_i\}$ est plus fin que le chemin $\{B'_i\}$, s'il existe une suite croissante k_i tel que $B_i \subset B'_{k_i}$. Un chemin plus fin qu'un autre lui est homotope : par construction, il suffit de regarder le cas où $k_i = i$. L'homotopie est obtenue en ajoutant la boule B'_i entre B_i et B_{i+1} puis en retirant la boule B_i. La proposition suit de ce qu'il existe toujours un chemin de boule plus fin que deux chemins de boules couvrant le même chemin. ☐

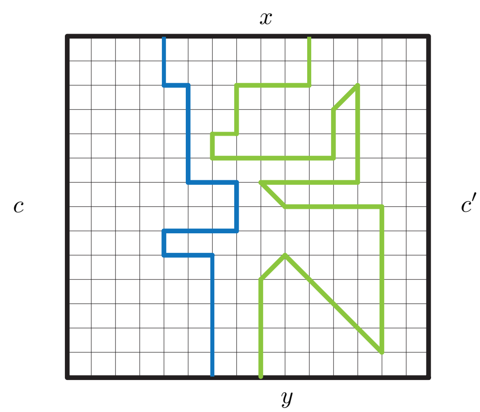


Figure 9.2 – Homotopie des chemins de boules

9.6.3 Surfaces hyperboliques simplement connexes

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 11.4. Nous fixons un point x de S et une isométrie définie au voisinage de x. Nous allons construire une isométrie locale ϕ de S dans $\mathbb{H}^2$. Soit y un autre point de $\mathbb{H}^2$ et soit $\mathcal{B}$ un chemin de boule joignant x à y. Soit B la dernière boule de $\mathcal{B}$. Nous posons alors pour tout z de B, $\phi(z) = g(z)$ où g est l'isométrie finale de $\mathcal{B}$. Comme tous les chemins de boules sont homotopes $g(z)$ ne dépend pas du chemin de boule de x à z. Nous en déduisons que ϕ est bien définie et que c'est une isométrie locale.

Si enfin S est complète. Il existe une géodésique entre deux points quelconques de S, l'image de cette géodésique est une géeodésique de $\mathbb{H}^2$. Les extrémités d'un arc géodésique de $\mathbb{H}^2$ étant distinctes, nous en déduisons que ϕ est injective.

Chapitre 10

Revêtements

10.1 Introduction

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle $\mathbb{R} \to U$.

10.1.1 Définition

Définition 10.1.1 *Une application continue $p : E \to X$ est un* revêtement *si tout point $x \in X$ a un voisinage U tel que*

1. $p^{-1}(V) = \sqcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subset E$, $I \neq \emptyset$, *réunion disjointe d'ouverts,*
2. *pour chaque $i \in I$, $p_{|V_i} = V_i \to U$ est un homéomorphisme.*

On appelle X la base *et E l'*espace total *du revêtement. J'appelle U un* voisinage trivialisant.

Démontrons les propriétés suivantes

Proposition 10.1.2
1. *si U est un ouvert trivialisant, si V est un ouvert contenu dans U, alors V est égelement trivialisant.*
2. *Si U est un ouvert trivialisant connexe, alors p est un homéomorphisme de chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ sur U.*
3. *p est un homéomorphisme local, donc les fibres $p^{-1}(y)$ sont discrètes.*
4. *On peut faire des produits de revêtements $(p, p') : E \times E' \to X \times X'$.*
5. *Si X est connexe, les* fibres *$p^{-1}(x)$, $x \in X$, ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).*
6. *Si $p : E \to X$ est un revêtement et $Y \subset X$, alors $p_{|p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to Y$ est un revêtement.*

Démonstration :

1. Ce premier point est trivial.
2. Pour le deuxième point, on voit que si $p^{-1}(V) = \sqcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont ouverts, alors chaque V_i est à la fois ouvert et fermé dans $p^{-1}(V)$.
3. Les derniers points sont évidents.

10.1.2 Exemples

1. Soit S un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur $p : X \times S \to X$ est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre S.

2. $t \mapsto e^{it}$, $\mathbb{R} \to U$ est un revêtement.
3. $z \mapsto e^z$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
4. Si $n \neq 0$, $z \mapsto z^n$, $U \to U$, est un revêtement.
5. La restriction de $t \mapsto e^{it}$ à $]0, 3\pi[$ n'est pas un revêtement de $]0, 3\pi[$ sur U.

En effet, soit U le voisinage de -1 dans U formé des $z \in U$ dont l'argument diffère de π (modulo 2π) d'au plus ϵ. Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe de deux intervalles, $V_1 =]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$ et $V_2 =]3\pi - \epsilon, 3\pi[$. V_1 est l'image d'une section de p au-dessus de U, mais V_2 ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

Proposition 10.1.3 *Soit $p : E \to X$ un homéomorphisme local, avec E compact. Alors p est un revêtement.*

DÉMONSTRATION : Soit $x \in X$. Alors $p^{-1}(x) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est fini car discret et compact. Soit W_i un voisinage ouvert de e_i tel que $p_{|W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant x. Quitte à rétrécir, on peut supposer les W_i deux à deux disjoints. Quitte à retrécir encore, on peut supposer qu'il existe un voisinage U de x, tel que pour tout i, p est un homéomophisme de W_i sur U.

Il reste à montrer, au besoin en rétrécissant U, que $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$. Considérons $K = Y \setminus \bigcup_i W_i$, K est un compact, donc $p(K)$ est un compact qui ne contient pas x. Par construction $O = X \setminus p(K)$ est un voisinage ouvert de x. Considérons enfin, $O_i = p^{-1} \cap W_i$. A nouveau, p est un homéomorphisme local de O_i sur O, et les O_i sont tous disjoints.

Par construction $p^{-1}(O) \cap K = \emptyset$. Nous en déduisons que $p^{-1}(O) \subset \sqcup_i W_i$ et ainsi $p^{-1}(O) = \sqcup_i W_i$. L'ouvert O est donc trivialisant. $\square$

EXEMPLE : L'application $f : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui à un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.

En effet, soit $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que $p = [0 : \cdots : 1]$. Si $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est proche de p, il admet des coordonnées homogènes de la forme $q = [x_0 : \cdots : x_n]$ avec $x_n > 0$. Alors $(x_0^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \cdots, x_n)$ est l'unique vecteur unitaire sur la droite q dont la dernière composante est > 0. Il dépend continûment de q. Il y a deux telles applications réciproques locales de f, donc f est un revêtement. $\square$

Proposition 10.1.4 *Soit E un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit G un groupe qui agit sur E*

1. librement*, i.e. si $x \in E$ et $g \neq 1$, alors $ge \neq e$;*

2. proprement*, i.e. si $K \subset E$ est compact, l'ensemble des $g \in G$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini.*

Alors $X = G \backslash E$ est séparé, et la projection $p : E \to G \backslash E$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION : Séparation : voir TD. Soit $e \in E$. Soit V un voisinage compact de e. Comme E est séparé, et comme l'intersection de V et de l'orbite de e est un ensembme fini, les points de $Ge \cap V = \{e = g_0 e, g_1 e, \ldots, g_n e\}$ admettent des voisinages U_i deux à deux disjoints dans V. Soit $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$. C'est un voisinage de e dont les translatés par des éléments de G sont deux à deux disjoints. La restriction de p à chaque gU est un homéomorphisme sur le voisinage $[U]$ de la classe $[p] \in G \backslash E$. $\square$

EXEMPLE : L'application $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par $x \mapsto -x$.

EXEMPLE : Soit $C_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}$ le groupe cyclique à n éléments, agissant par multiplication sur U. Alors le revêtement associé n'est autre que $z \mapsto z^n$, $U \to U$.

EXEMPLE : Soit $G \subset \mathbb{R}$ le groupe engendré par la translation de 2π. Alors G agit librement et proprement sur $\mathbb{R}$. Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel $\mathbb{R} \to U$.

10.2 Relèvement des homotopies

10.2.1 Relèvements

Définition 10.2.1 *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Soit $f : Y \to X$ une application continue. Un* relèvement *de f à E, c'est une application $\tilde{f} : Y \to E$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$. Si on se donne en plus des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$, et un relèvement $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ dans E, on parle de* relèvement d'origine *$\tilde{x}_0$.*

Lemme 10.2.2 *Lorsque Y est connexe, quand f admet un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il est unique.*

DÉMONSTRATION : Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements d'oigine $\tilde{x}_0$. Alors $\{y \in Y \,|\, \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouvert. En effet, au voisinage de $\tilde{f}(y)$, p est un homéomorphisme, donc pour z proche de y, l'équation $p(\tilde{x}) = f(z)$ admet une unique solution voisine de $\tilde{f}(y)$, c'est $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$. Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est Y, donc $\tilde{f} = \tilde{f}'$. □

10.2.2 Sections

Définition 10.2.3 *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Une* section *de p est une application continue $s : X \to E$ telle que $p \circ s = id_X$. Une* section au-dessus de *$Y \subset Y$, c'est une section de $p_{|p^{-1}(Y)}$, i.e. définie seulement au-dessus de Y. Une* section locale *en x est une section définie sur un voisinage de x.*

Proposition 10.2.4 *Nous avons*

1. *Une section s au-dessus de Y est automatiquement un homéomorphisme de Y sur $s(Y)$.*
2. *Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point x, exactement autant que d'images réciproques de x*
3. *Si Y est connexe, deux sections au dessus de Y qui coincident en un point sont égales*
4. *une section locale est une application ouverte.*
5. *si σ est une section au-dessus d'un ouvert U connexe alors $\sigma(U)$ est une composante connexe de $p^{-1}(U)$.*

10.2.3 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

Proposition 10.2.5 *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Tout chemin $\gamma : [0,1] \to X$ admet des relèvements. Si on fixe $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine $\tilde{x}_0$.*

DÉMONSTRATION : On se donne une subdvision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, tel que pour tout i, $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j. On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$ et on note σ_i^j la section locale de p définie de O^j dans O_i^j.

Ensuite on construit par récurrence une suite $i_1, \dots i_n$ telle que

$$\sigma^j_{i_j}(c(t_{j+1})) = \sigma^{j+1}_{i_{j+1}}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma^j_{i_j}(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ $\square$

10.2.4 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

Proposition 10.2.6 *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Soit Y un espace topologique. Fixons des points bases $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ et un relèvement $\tilde{x}_0 \in E$ de x_0. Soit $F : [0,1] \times Y \to X$ une homotopie entre deux applications f_0 et $f_1 : Y \to X$ envoyant y_0 sur x_0. Si f_0 possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$, il en est de même de F, et par conséquent de f_1.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, pour chaque $y \in Y$, le chemin $\gamma_y : s \mapsto F(s, y)$ possède un unique relèvement $\tilde{\gamma}_y$ d'origine $\tilde{f}_0(y)$. On pose $\tilde{F}(s, y) = \tilde{\gamma}_y(s)$. Pour montrer que $\tilde{F}$ est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin γ_y, c'est faire appel à un nombre fini de sections locales s_j (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact $\gamma([0, 1])$). Les mêmes sections locales permettent de relever γ_z pour z proche de y.

Donnons une preuve plus précise, en utilisant la démonstration du relèvements des chemins. Nous nous donnons un point y de Y et le chemin $c = \gamma_y$ défini plus haut. D'après la preuve du relèvement des chemins, nous avons une subdvision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, tel que pour tout i, $c[t_j, t_{j+1}]$ soit inclus dans un ouvert trivialisant O^j. On pose ensuite $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O^j_i$ et on note σ^j_i la section locale de p définie de O^j dans O^j_i.

Nous avons ensuite par récurrence une suite $i_1, \dots i_n$ définie de manière unique par la propriétés suivantes

$$\sigma^j_{i_j}(c(t_{j+1})) = \sigma^{j+1}_{i_{j+1}}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit $\tilde{c} = \sigma^j_{i_j}(c)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$.

Nous nous proposons de montrer que pour t appartenant à $[t_j, t_{j+1}]$, pour (z, s) au voisinage de (y, t) on a $\tilde{F}(z, s) = \sigma^j_{i_j} F(z, s)$. Ceci montrera que $\tilde{F}$ est continue. Or pour z suffisamment proche de y on a par continuité de F

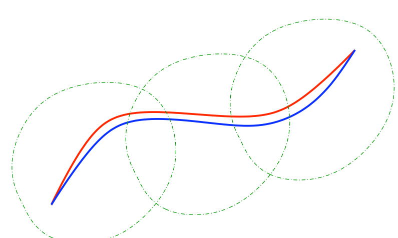
$$\begin{array}{rcl} \gamma_z[t_j, t_{j+1}] & \subset & O^j, \\ \sigma^j_{i_j}(\gamma_z(t_{j+1})) & \in & O^{j+1}_{i_{j+1}}, \end{array}$$

car ce sont deux propriétés ouvertes. En particulier, comme les σ sont des sections locales on a

$$\sigma^j_{i_j}(\gamma_z(t_{j+1})) = \sigma^{j+1}_{i_{j+1}}(\gamma_z(t_{j+1})).$$

D'après la construction du relèvement des chemins, cela donne bien $\tilde{F}(z, s) = \sigma^j_{i_j} F(z, s)$. $\square$

$\square$



Corollaire 10.2.7 *Soit α, β deux chemins dans X de mêmes extrémités x_0 et x_1. Soit $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0. Soit $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ les relèvements de α et β d'origine $\tilde{x}_0$. Si α et β sont homotopes à extrémités fixées, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. En particulier, si α est un lacet homotope à une constante, $\tilde{\alpha}$ est un lacet.*

Démonstration : Par l'hypothèse, l'homotopie F de α à β satisfait $F(s,1) = x_1$ pour tout s. Son relèvement $\tilde{F}$ satisfait $\tilde{F}(s,1) \in p^{-1}(x_1)$ pour tout s. Comme $p^{-1}(x_1)$ est discret, $\tilde{F}(s,1)$ ne dépend pas de s, donc $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0,1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$. □

10.3 Critère de relevabilité

Théorème 10.3.1 *Soit $p : E \to X$ un revêtement connexe, $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0. Soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs, soit $y_0 \in Y$ un point base. Soit $f : Y \to X$ une application continue qui envoie y_0 en x_0. Alors f possède un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ si et seulement si*

$$f_\sharp(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_\sharp(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

Le relèvement est alors unique.

Démonstration : Supposons que f possède un relèvement $\tilde{f} : Y \to E$. Alors $f_\sharp = p_\sharp \circ \tilde{f}_\sharp$ donc son image est contenue dans celle de $p_\sharp$.

Réciproquement, supposons que l'image de $f_\sharp$ est contenue dans celle de $p_\sharp$. Soit $y \in Y$ et γ un chemin de y_0 à y. Le chemin $\alpha = f \circ \gamma$ de x_0 à $f(y)$ possède un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'origine $\tilde{x}_0$. Posons $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$. Si γ' est un autre lacet de y_0 à y, alors le lacet $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_\sharp(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$ dans X est homotope à un lacet de la forme $p_\sharp(\beta)$ où β est un lacet dans E basé en x_0. Autrement dit, les chemins $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ et α' sont homotopes à extrémités fixées dans X. Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine $\tilde{x}_0$ de $(p \circ \beta) \cdot \alpha$ est $\beta \cdot \tilde{\alpha}$. On conclut que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Nous définissons alors $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$ ne dépend pas du choix du chemin γ.

Il nous reste à démontrer la continuité de $\tilde{f}$. Soit y un point quelconque de Y. Par construction nous avons une section locale σ définie sur un ouvert trivialisant O contenant $f(y)$ et telle que $\tilde{f}(y) = \sigma \circ f(y)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\tilde{f} = \sigma \circ f$ au voisinage de y. Soit donc U un voisinage connexe par arcs de y tel que $f(U)$ soit inclus dans O. Soit z un point de U, nous pouvons alors trouver un chemin de y_0 à z tel que $c(1/2) = y$ et $c[1/2, 1]$ soit inclus dans U. Soit par ailleurs $\tilde{f}_c$ le relèvement de $f \circ c$ partant de $\tilde{x}_0$. D'après ce que nous avons vu, $\tilde{f}_c(1/2) = \tilde{f}(y)$. Nous en déduisons par unicité du relèvement des chemins que $\sigma^i \circ f \circ c$ coïncide avec $\tilde{f}_c$ sur l'intervalle $[1/2, 1]$. En particulier, $\sigma^i f(z) = \sigma^i \circ f \circ c(1) = \tilde{f}(z)$

Exemple : Une application $f : U \to U$ se relève à travers le revêtement $z \mapsto z^n$ si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par n. Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par n.

En particulier,

Corollaire 10.3.2 *Soit $p : E \to X$ un revêtement, soit $x_0 \in X$ un point base, $\tilde{x}_0 \in E$ un relèvement de x_0. Soit Y un espace connexe par arcs, simplement connexe et localement connexe par arcs, avec point base y_0. Toute application continue $f : Y \to X$ envoyant y_0 en x_0 possède un (unique) relèvement à E d'origine $\tilde{x}_0$.*

□

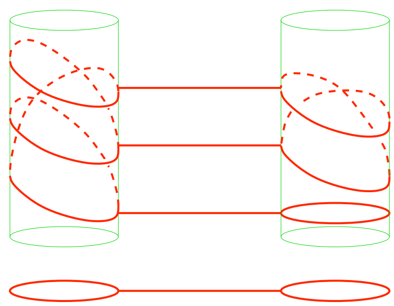
Remarques : Supposons E connexe par arcs. La réciproque du corollaire 10.2.7 est vraie si et seulement si E est simplement connexe.

Lemme 10.3.3 *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Supposons E connexe par arcs. Alors les deux énoncé suivants sont équivalents.*

1. *Pour tout lacet α, $\tilde{\alpha}$ est un lacet $\Rightarrow$ α est homotope à une constante.*
2. *E est simplement connexe.*

Démonstration : Si E est simplement connexe, un relèvement $\tilde{\alpha}$ qui est un lacet est homotope à une constante, donc $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ l'est aussi. Réciproquement, soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans E basé en $\tilde{x}_0$. C'est un relèvement du lacet $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Par hypothèse, γ est homotope à une constante dans X. Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie du lacet constant 1_{x_0} à γ. Comme 1_{x_0} se relève en le lacet constant $1_{\tilde{x}_0}$, F se relève en $\tilde{F}$, qui est une homotopie de $1_{\tilde{x}_0}$ à $\tilde{\gamma}$. □

Exercice : La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit x_0 le sommet de droite de X. Déterminer les relèvements de divers lacets basés en x_0, pour diverses origines $\tilde{x}_0$. En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.



10.3.1 Automorphismes d'un revêtement

Définition 10.3.4 *Un* automorphisme *ϕ d'un revêtement connexe $p : E \to X$ est un homéomorphisme tel que $p \circ \phi = \phi$ On note* $\mathrm{Aut}(E/X)$ *le groupe des automorphismes d'un revêtement $p : E \to X$.*

Théorème 10.3.5 *Soit $p : E \to X$ un revêtement simplement connexe de X. Alors*

1. *pour tout $x_0 \in X$, $\mathrm{Aut}(E/X)$ agit simplement transitivement sur $p^{-1}(x_0)$.*
2. *Soit x_0 un point fixé, l'application qui à un élement γ de $\mathrm{Aut}(E/X)$ associe le lacet $[p \circ c]$ où c est un chemin quelconque de x_0 à $\gamma(x_0)$ est un isomorphisme de groupe.*

Démonstration : Cela résulte du théorème 10.3.1 : étant donnés deux relèvements $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}'_0$ de x_0, il existe un unique isomorphisme du revêtement $f : E \to E$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$. □

Corollaire 10.3.6 *Soit $p : E \to X$, un revêtement d'espace total simplement connexe. Alors $X = E/\mathrm{Aut}(E;X)$.*

Remarques :

1. En particulier $\sharp(\pi_1(X)) = \sharp(p^{-1}(x_0))$ si $p : E \to X$ est un revêtement simplement connexe. Montrez en application que $\pi_1(\mathbb{RP}^n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de 2π.
3. Si p est une isométrie locale qui est un revêtement entre deux surfaces hyperboliques, alors tout automorphisme est une isométrie. En particulier, $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2/(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)) = \Gamma$.
4. De même, $\pi_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2) = \Gamma$.

10.4 Construction d'un revêtement simplement connexe

Notre but est de démontrer la propriété suivante

Théorème 10.4.1 *Soit X une surface hyperbolique connexe. Alors X possède un revêtement E connexe et simplement connexe.*

Remarque :

Ce théorème est beaucoup plus général. Il est vrai en géneral si X est *semi-localement simplement connexe* c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes.

- X est connexe,
- tout point x admet un voisinage U tel que tout lacet basé en x, contenu dans U soit homotope à une constante dans X.

10.4.1 Construction d'un revêtement simplement connexe

La construction que nous allons donner utilise les chemins de boules. La démontrastion dans le cas d'un espace topologique quelconque utilise les chemins et elle suit le même schéma.

Nous fixons un point x_0 dans S et considérons l'espace Ω_{x_0} formé des paires $(\mathcal{B}, y)$ où y est un point de S et $\mathcal{B}$ un chemin de boules de x_0 à y. NOus considérons l'espace $E = \Omega_{x_0}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par l'homotopie. Nous notons π la projection de E dans S donnée par $\pi[(\mathcal{B}, y)] = y$. Soit $\tilde{y} = [(\mathcal{B}, y)]$ et $\tilde{z} = [(\mathcal{B}', z)]$ deux points de E, nous dirons qu'un chemin c tracée sur S va de $\tilde{y}$ à $\tilde{z}$ si

- la courbe c va de x à y,
- la courbe c est homotope à une courbe de la forme $\gamma^{-}1.\gamma'$ où γ est couverte par $\mathcal{B}$ et γ' par $\mathcal{B}$.

Montrons tout d'abord

Proposition 10.4.2 *Soit d la fonction définie sur $E \times E$ par*

$$d(\tilde{z}, \tilde{y}) = \inf\{\ell(c) \mid c \text{ va de } \tilde{z} \text{ à } \tilde{y}\ \}.$$

Alors

1. *d est une métrique,*
2. *π est un revêtement qui est une isométrie locale de E sur S,*

Démonstration : La fonction d vérifie l'inégalité triangulaire et est symétrique. Par construction,

$$d(\tilde{y}, \tilde{z}) \geq d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z})$$

. Soit $\tilde{y} = [(\mathcal{B}, y)]$ un point de E, avec $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_n)$.

Soit $B = B(y, \epsilon)$ une boule centrée sur y isométrique à une boule hyperbolique. S'il existe une courbe c allant de $\tilde{y}$ à $\tilde{z}$ telle que $\ell(c) \leq \epsilon$, alors z appartient à B.

Remarquons, par ailleurs qu'il existe r tel que $b = B(y, r) \subset B \cap B_n$. En particulier $\mathcal{B}_0 = (B_1, \ldots, B_n, b, B)$ est un chemin de boules homotope à $\mathcal{B}$

Comme la courbe $\gamma.c$ est homotope à γ' par définition, nous en déduisons que $\mathcal{B}_0$ – qui couvre $\gamma.c$ est homotope à $\mathcal{B}'$.

Nous venons de montrer que si $d(\tilde{y}, \tilde{z}) \leq \epsilon$ alors $\tilde{z} = [(\mathcal{B}_0, z)]$ et de plus $d(\pi(\tilde{z}), \pi(\tilde{y})) = d(y, z)$.

En particulier, si ϵ est tel que $B(y, \epsilon)$ une boule centrée sur y isométrique à une boule hyperbolique, alors π est une bijection isométrique de

$$\{\tilde{z} \mid d(\tilde{y}, \tilde{z}) \leq \epsilon\}$$

sur $B(y, \epsilon)$.

Nous en déduisons donc immédiatement que d est une métrique et π est une isométrie locale de E sur S. Enfin, π est un revêtement, en effet d'après ce que nous venons de voir

$$\pi^{-1}B(y,\epsilon/2) = \cup_{\tilde{t}\in\pi_{-1}(y)}B(t,\epsilon/2)$$

. Par ailleurs, π est une bijection isométrique de $B(t,\epsilon/2)$ sur $B(y,\epsilon/2)$. Enfin si t_1 et t_2 appartiennent à $\pi^{-1}(y)$ et si

$$B(t_1,\epsilon/2)\cap B(t_2,\epsilon/2)\neq\emptyset,$$

Alors $t_1 \in B(t_2,\epsilon)$, et donc $t_1 = t_2$ car π est injective de $B(t_2,\epsilon)$ sur son image. $\square$

Il nous reste à montrer

Proposition 10.4.3 *L'espace E est simplement connexe.*

Démonstration : Soit β un lacet dans E basé en x_0. Par le lemme 10.3.3 , il nous suffit de montrer que α est homotope à une constante.

Recouvrons $\alpha = \pi(\beta)$ par un chemin de boules $(B_1,\dots B_n)$. Par la proposition 9.6.5, il nous suffit de montrer que le chemin de boules $(B_1,\dots B_n)$ est homotope à une constante.

Soit

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1,$$

une subdivision de $[0,1]$ telle que $\alpha[t_{i-1},t_i]\subset B_i$.

Nous allons montrer que si $t_{i-1}\leq t\leq t_i$ alors

$$\beta(t) = [(B_1,\dots,B_i),\alpha(t)]$$

Supposons par recurrence que

$$\beta(t_{i-1}) \quad = \quad [(B_1,\dots,B_{i-1}),\alpha(t_{i-1})] \tag{10.1}$$

Par définition, $(B_1,\dots B_{i-1})$ est homotope à $(B_1,\dots B_i)$, en particulier l'ensemble des t qui vérifie l'équation (10.1) est non vide. Par ailleurs, la courbe définie de $[t_{i-1},t_i]$ dans E par

$$t\mapsto[(B_1,\dots,B_i),\alpha(t)]$$

est continue et est donc un relevé de α. Nous en déduisons que tous les éléments de $[t_{i-1},t_i]$ vérifie (10.1).

En particulier, puisque β est un lacet

$$[(B_1,\alpha(0)] = \beta(0) = \beta(1) = [(B_1,\dots,B_n),\alpha(0)].$$

Nous en déduisons par définition de E que le chemin de boules $(B_1,\dots,B_n)$ est homotope au chemin constant. $\square$

10.4.2 Propriété universelle

Proposition 10.4.4 *Soit $p : E\to X$ un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de X. Soit $p' : E'\to X$ un autre revêtement. Soit $\tilde{x}_0\in E$ et $\tilde{x}'_0$ des relèvements d'un même point base $x_0\in X$. Alors il existe une unique application $m : E\to E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ telle que $p'\circ m = p$.*

Démonstration : D'après le Corollaire 10.3.2, l'application $p : E\to X$ possède un relèvement $\tilde{p} : E\to E'$, tel que $p = p'\circ\tilde{p}$ et $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si $m : E\to E'$ est un morphisme de revêtements, alors $p = p'\circ m$, donc m est un relèvement de p. D'après le Corollaire 10.3.2, la condition sur les points bases le rend unique. $\square$

1. Lorsque E' est connexe, $m : E\to E'$ est un revêtement. On peut donc penser au revêtement E' comme à un revêtement intermédiaire entre X et E.
2. Les revêtements finis du cercle $z\mapsto z^n$, $U\to U$, sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.

10.4.3 Unicité du revêtement simplement connexe

Théorème 10.4.5 *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi--localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ un point base. Soit $p : E \to X$ et $p' : E' \to X$ deux revêtements connexes et simplement connexes de X. Soit $\tilde{x}_0 \in E$ et $\tilde{x}'_0 \in E'$ des relèvements de x_0. Il existe un* unique *homéomorphisme $f : E \to E'$ envoyant $\tilde{x}_0$ en $\tilde{x}'_0$ tel que $p' \circ f = p$.*

Démonstration : Résulte de la propriété universelle. □

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de X est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

Terminologie. On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel*.

Exercice : Soit X le graphe de l'exercice 10.3. Déterminer le revpetement universel de X (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t'il autour de X ?

Chapitre 11

Revêtement des surfaces hyperboliques

11.1 Le théorème d'uniformisation

Notre but principal est de démontrer le résultat suivant qui montre que les surfaces hyperboliques complètes sont obtenues par quotient.

Théorème 11.1.1 [Uniformisation des surfaces hyperboliques] *Soit Σ une surface hyperbolique complète, alors il existe un sous-groupe discret Γ des isométries du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ tel que Σ est isométrique à $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$.*

De plus Γ est isomorphe au groupe $\pi_1(\Sigma, s)$.

Nous démontrerons dans les prochaines sections des résultats dont l'intérêt est autonome et qui relient revêtements et isométries locales dans le cas des surfaces hyperboliques.

- L'espace total d'un revêtement de base une surafce hyperbolique peut être muni d'une structure de surface hyperbolique tel que la projection soit une isométrie locale.
- Une isométrie locale surjective d'une surface hyperbolique complète dans une autre est un revêtement.

11.2 Revêtements

Commençant par étudier l'espace total d'un revêtement au-dessus d'une surface hyperbolique.

Théorème 11.2.1 *Soit p un revêtement de S un espace topologique connexe sur une surface hyperbolique Σ. Alors il existe une structure hyperbolique sur S telle que p est une isométrie locale. Si de plus Σ est complète alors S est complète.*

Nous allons procéder comme nous l'avons fait pour les quotients : définir les courbes C^1 par morceaux, puis leur longueur, puis une métrique.

Définition 11.2.2 *Si c est une courbe à valeurs dans S, nous dirons que c est C^1 par morceaux si $p \circ c$ l'est.*

Nous avons alors

Proposition 11.2.3 *Il existe toujours une courbe C^1 par morceaux joignant deux points quelconques de S.*

Démonstration : On montre en effet que l'ensembles des point joints à x par une courbe C^1 par morceaux est ouvert et fermés en utilisant la propriété de revêtement. $\square$

Définition 11.2.4 *La* longueur $\ell(c)$ *d'une courbe c est la longueur de $p \circ c$.*

Nous définissons enfin, pour tout x et y de S

$$d(x,y) = \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x,\ c(1) = y\}.$$

Nous avons alors la proposition suivante

Proposition 11.2.5 *Soit y_0 un point de Σ, il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout x_0 tel que $p(x_0) = x_0$, si $d(x, x_0) < \epsilon$ et $d(y, x_0)\epsilon$, alors $d(x, y) = d(p(x), p(y))$.*

Démonstration : Soit ϵ tel que $U = B(p(x_0), 2\epsilon)$ est isométrique à une boule de l'espace modèle et tel que

$$p^{-1}(U) = \sqcup_i U_i,$$

où p est un homéomorphisme de U_i dans U. On suppose que $x_0 \in U_{i_0}$.

Nous remarquons que si c est une courbe joignant x_0 à x de longueur plus petite que ϵ alors $p(c) \subset p(U)$ et donc $c \subset U_{i_0}$. Nous en déduisons que

$$U_{i_0} = \{x \in S, d(x_0, x) < 2\epsilon\}.$$

Par ailleurs, si $d(x, x_0) < \epsilon$ et $d(y, x_0)\epsilon$, et si c est un courbe joignant x à y de longueur plus petite que ϵ alors c est incluse dans U_{i_0}. En particulier

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x,\ c(0) = y\} \\ &= \inf\{\ell(c) \mid c(0) = x,\ c(0) = y; \ell(c) \leq \epsilon\} \\ &= \inf\{\ell(p(c)) \mid c(0) = x,\ c(0) = y; \ell(c) \leq \epsilon\} \\ &= d(p(x), p(y)). \end{aligned} \tag{11.1}$$

□

Corollaire 11.2.6 *la fonction d est une métrique et p est une isométrie locale. En particulier, S est une surface hyperbolique.*

11.2.1 Complétude

Il nous reste à montrer que si σ est complète alors S est complète. Nous nous donnons donc un suite de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par construction de la distance

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y).$$

Nous en déduisons donc que la suite $\{\pi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et soit donc y_0 sa limite. Soit ϵ tel que $U = B(y_0, 2\epsilon)$ soit isométrique avec une boule hyperbolique et trivialisant. Nous avons vu alors que pour tout y_i dans $p^{-1}(y_0)$, p est une isométrie de $B(y_0, \epsilon)$ sur $B(y_0, \epsilon)$. Nous en déduisons que si $y_i \neq y_j$, $d(y_i, y_j) \geq \epsilon$

Nous allons montrer qu'il existe un unique $z_0 \in p^{-1}(y_0)$ tel que pour n suffisamment grand $d(x_n, z_0) \leq \epsilon$.

En il existe N, tel que si n et p sont plus grands que N, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &< \epsilon/2 \\ d(\pi(x_n), y_0) &< \epsilon/2. \end{aligned}$$

Il existe donc pour n plus grand que N, un point $y(n) \in p^{-1}(y_0)$ tel que $d(x_n, y(n)) < \epsilon/2$. Dès lors si n et p sont plus grands que N, alors $d(y(n), y(p)) < \epsilon$ et donc $y(n) = y(p) := z_0$.

Comme p est une isométrie de $B(z_0, \epsilon)$ sur $B(y_0, \epsilon)$, nous en déduisons que la suite $\{x_n\}$ converge vers z_0. La surface S est donc complète.

11.3 Toute isométrie locale est un revêtement

Théorème 11.3.1 *Soit π une isométrie locale sujective d'une surface hyperbolique complète S sur une surface hyperbolique Σ. Alors π est un revêtement.*

11.3.1 Préliminaires : isométries locales et revêtement

Lemme 11.3.2 *Soit S une surface hyperbolique complète sans bord. Soit x un point de S. Soit π une isométrie locale de $B(x, R)$ sur Σ. Soit x un point de S et γ une géodésique passant par $\pi(x)$ et de longueur inférieure à R, il existe alors une géodésique c dans S passant par x telle que $\pi \circ c = \gamma$.*

Démonstration : Soit donc γ définie de l'intervalle I à valeurs dans Σ, telle que $\gamma(0) = p(x)$. Comme p est un isométrie locale au voisinage de x, il existe une géodésique c définie sur un intervalle $J \subset I$ contenant 0 telle que $p \circ c|_I = \gamma|_I$. Comme S est complète sans bord, nous pouvons prolonger par le théorème de Hopf-Rinow c sur $\mathbb{R}$ tout entier. La courbe $p \circ c$ est alors une géodésique, comme elle coïncide avec γ sur un intervalle, elle coïncide avec γ partout. $\square$

Lemme 11.3.3 *Soit S une surface complète et π une isométrie locale de $B(x, R)$ avec x appartenant à S dans $B(x_0, R)$ où x_0 appartient à $\mathbb{H}^2$. Alors π est une bijection isométrique de $B(x, R/4)$ dans $B(x_0, R/4)$.*

Démonstration : Nous devons montrer que π de $B(x, R/4)$ dans $B(x_0, R/4)$ est injective et surjective.

L'injectivité est facile : si x et y sont deux points distincts de $B(x, R/4)$, il existe une géodésique minimisante γ joignant x à y. Comme $\ell(\gamma) \leq R/2$, nécessairement γ est à valeurs dans $B(x_0, R)$. La courbe $\pi(\gamma)$ est alors un arc géodésique non constant de $\mathbb{H}^2$; ses extrémités sont donc distinctes. Nous venons de montrer que $\pi(x) \neq \pi(y)$.

La surjectivité découle du lemme précédent. Soit z un point de $B(\pi(x), R/4)$. Soit γ la géodésique de $\pi(x)$ à z de longueur plus petite que $R/4$. Nous avons vu alors qu'il existe une géodésique c de même longueur que γ telle que $\pi \circ c = \gamma$. En particulier, soit $t = c(d(x, z))$, alors $d(t, x) < R/4$ et $\pi(t) = z$. $\square$

11.3.2 Preuve du théorème

Démonstration : Soit en effet x un point de Σ et ϵ tel que $B(x, \epsilon)$ est isométrique à une boule hyperbolique. Soit $U = B(x, \epsilon/4)$. Soit $z \in p^{-1}(x)$ et

$$U_z = B(z, \epsilon/4)$$

.

D'après le lemme 11.3.3, π est une isométrie bijective de U_z dans U. Par ailleurs, si $U_z \cap U_{z'} \not\emptyset$, nous en déduisons que $d(z, z') < \epsilon$. Soit alors γ la géodésique minimisante joignant z à z'. Alors $\pi(\gamma)$ est une géodésique de longueur inférieure à ϵ joignant x à x et nous obtenons la contradiction avec le fait que $B(x, \epsilon)$ est isométrique avec une boule hyperbolique. $\square$

11.4 Uniformisation des surfaces hyperboliques

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème d'uniformisation.

Théorème 11.4.1 *Si S est une surface hyperbolique complète, il existe alors un sous-groupe Γ de* $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$*, tel que S est isométrique à $\mathbb{H}^2/\Gamma$. De plus, Γ est isomorphe à $\pi_1(S)$.*

Démonstration : D'après le théorème 10.4.1, la surface S admet un revêtement simplement connexe. D'après le théorème 11.2.1, l'espace total de ce revêtement Σ admet une structure hyperbolique complète. D'après le théorème , Σ est isométrique au plan hyperbolique. Alors soit $\Gamma = \mathrm{Aut}(\Sigma, S)$, comme Σ est isométrique au plan hyperbolique, $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^2)$. D'après le théorème 10.3.5, $S = \Sigma/\Gamma$ et Γ est isomorphe à $\pi_1(S)$. $\square$

Chapitre 12

Décomposition en pantalons

Le but de ce chapitre est de démontrer qu toute surface hyperbolique compacte s'obtient par recollement en pantalons.

12.1 Géodésique fermées

Soit S une surface hyperbolique Nous rappelons qu'un *lacet géodésique* est un lacet $\gamma : [a, b] \to S$ localement minimisant. Une *géodésique fermée* ou *périodique* de longueur ℓ est une géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to S$ telle que $\gamma(s + \ell) = \gamma(s)$.

Théorème 12.1.1 *Soit S une surface hyperbolique complète et s un point de S. Alors*

1. *tout lacet c basé en s est homotope – à extrémités fixées – à un unique lacet géodésique γ. De plus $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$.*
2. *Supposons S compacte, alors tout lacet c est homotope librement à une géodésique fermée γ. De plus, $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$.*

12.2 Courbes plongées

Nous dirons qu'un lacet est *plongé* s'il est injectif.

Théorème 12.2.1 *Soit Soit S une surface hyperbolique compacte. Alors*

1. *Si c est un lacet plongé, alors la géodésique auquel il est librement homotope est plongée.*
2. *Soit c_1 et C_2 deux lacets qui ne s'intersectent pas. Alors les géodésiques fermées auxquelles ils sont homotopes librement ne s'intersectent pas.*

12.3 Une caractérisation des surfaces hyperboliques simplement connexes

12.3.1 Surfaces à coins carrés

Théorème 12.3.1 *Soit S une surface hyperbolique compacte à coins carrés ne contenant aucune géodésique fermée. Alors S est simplement connexe et est isométrique à un polygone du pan hyperbolique.*

12.4 Une caractérisation géométrique des pantalons

Théorème 12.4.1 *Soit S une surface hyperbolique compacte. On suppose que les seules géodésiques fermées plongées dans S sont tracées sur le bord. Alors S est un pantalon.*

12.5 Classification des surfaces

Nous pouvons alors montrer

Théorème 12.5.1 *Soit S une surface hyperbolique. Il existe alors g géodésique plongées $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ telle que $S \setminus \gamma_1 \cup \ldots \gamma_g$ est une réunion finie de l'intérieur de n pantalons.*

Nous remarquons que ce nombre n est tel que $\mathrm{Aire}(S) = 2\pi n$. Autrement dit, le nombre de pantalons ne dépend que de la surface. Il s'appelle la *caractéristique d'Euler* de la surface. Nous verrons plus tard que ce nombre ne dépend que du groupe fondamental de la surface. Un petit calcul combinatoire nous dit que $3p = 2n$.

Chapitre 13

Géométrie différentielle des surfaces

13.1 Cartes et atlas

Définition 13.1.1 *Soit M un espace topologique.*

(i) *Une* carte *sur M est une paire (U, X) où U est un ouvert de U et $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Les fonctions x_i sont les* coordonnées*, l'ouvert U est le* domaine de la carte*, l'entier p est la dimension de la carte..*

(ii) *Deux cartes (U, X) et (V, Y) sont C^∞-*compatible *si le* changement de cartes *$Y \circ X^{-1}$ de $X(U \cap V)$ vers $Y(U \cap V)$ est un C^r difféomorphisme.*

(iii) *Un* atlas *est un ensemble de cartes $\{(U_i, X^i)\}$ de même dimension qui sont C^∞ compatibles et telles que $\{U_i\}$ est un recouvrement de M.*

(iv) *Deux atlas sont* équivalents *si toutes leurs cartes sont compatibles, ou de manière équivalente si la réunion est encore un atlas.*

(v) *Une* structure différentielle *sur M est une classe d'atlas compatibles.*

Ceci nous amène à la definition suivante

Définition 13.1.2 [Variétés différentielles] *Un espace topologique séparé et réunion dénombrable de compact muni d'une structure différentielle est une* variété différentielle*. Une carte est* compatible avec la structure de variété *si elle est compatible avec un atlas définissant la structure de variété.*

Par abus de langage on dira que $X = (x_1, \ldots, x_p)$ défini au voisinage de m sont des coordonnées au voisinage d'un point m d'une variété M si il existe un ouvert U contenant m tel que (u, X) est un cartes compatible avec la structure de variété. Autrement dit, on sera souvent amené à parler de coordonnées sans préciser le domaine de la carte corrrespondante.

13.1.1 Exemples

Nous avons vu deux exemples de variétés différentielles

1. Les cartes affines donnent un structure de variétés différentielles sur les espaces projectifs réels et complexe.
2. Les surfaces hyperboliques (sans bord) sont également des variétés différentielles de dimension 2 (on parle alors de *surface*) leur structure de variété est donnée par les atlas des cartes (U, X) où X est une isométrie de U sur un ouvert du plan hyperbolique.
3. Un ouvert d'un espace affine est muni d'une structure de variété. Plus généralement tout ouvert d'une variété a une structure de variété.

13.2 Fonctions et applications différentiables

Dans ce qui suit une fonction sera indifféremment à valeurs réelles ou complexes.

13.2.1 Fonctions

Définition 13.2.1 *(i) Soit f une fonction définie sur un ouvert V d'un espace topologique espace topologique M. On dit que f est C^r* par rapport à la carte (U, X) *si $f \circ X^{-1}$ est de classe C^r.*

(ii) Soit f une fonction définie sur un espace topologique M. On dit que f estC^r par rapport à un atlas *si f est de classe C^p dans toutes les cartes de l'atlas.*

(iii) Soit f une fonction sur une variété, alors elle est de classe C^r si elle est de classe C^r pour l'un des atlas définissant la structure différentielle.

Autrement dit une fonction f est de classe C^r au voisinage d'un point, s'il existe des coordonnées $(x_1, \dots ; x_n)$ telles que $f = F(x_1, \dots , x_n)$ avec F de classe C^r.

On a alors les propriétés immédiates suivantes qui utilise le fait que si une fonction est de classe C^r sur un ouvert d'un espace affine, alors $f \circ \phi$ est de classe C^r pour tout difféomorphisme ϕ.

Proposition 13.2.2 *Pour qu'une fonction soit de classe C^r au voisinage d'un point, il suffit de trouver une carte compatible avec la structure de variété telle que f est de classe C^r pour cette carte. En particulier, les coordonnées d'une carte sont des fonctions de classe C^∞.*

En particulier pour qu'une fonction F définit au voisinage de m soit C^r au voisinage de m, il suffit de trouver des coordonnées $X = (x_1, \dots , x_p)$ définies au voisinage de m, telle que la fonction f vérifiant $F = f(x_1, \dots , x_n)$ soit de classe C^r.

13.2.2 La différentielle d'une fonction

Ceci nous permet de définir définir la notion suivante.

Définition 13.2.3 *Soit f une fonction de classe C^1 définie au voisinage d'un point m d'une variété. Nous dirons que f* est de différentielle nulle en m *si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés equivalentes suivantes*

1. *Il existe des coordonnées $X = (x_1, \dots , x_n)$ tel que $f = F(x_1, \dots , x_n)$ au voisinage de m avec $\mathrm{d}_{X(m)}F = 0$.*
2. *Pour toutes coordonnées $X = (x_1, \dots , x_n)$ si F est définie par $f = F(x_1, \dots , x_n)$ au voisinage de m alors $\mathrm{d}_{X(m)}F = 0$.*
3. *il existe un entier k, des fonctions h_i, g_i s'annulant en m, dérivable en m et définies au voisinage de m pour $i \in \{1, \dots k\}$, telle que au voisinage de de m on ait*

$$f = f(m) + \sum_{i=1}^{i=k} g_i h_i.$$

L'équivalence entre les deux premières propriétés est facile. La troisième est donnée simplement pour illustrer le fait que l'on peut se passer de coordonnées. Cette dernière carcatérisation provient d'une formule de Taylor dans une carte .

Nous avons alors la proposition immédiate

Proposition 13.2.4 *L'espace $\mathcal{E}(m, U)$ des fonctions définies sur un voisinage U de m, nulle en m et de différentielle nulle est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{G}(m, U)$ des fonctions de classe C^1 s'annulant en m et définie sur U de m. De plus, si V est un voisinage de m inclus dans V, alors la restriction donne un isomorphisme de $\mathcal{G}(m, U)/\mathcal{E}(m, U)$ avec $\mathcal{G}(m, V)/\mathcal{E}(m, V)$.*

Démonstration : le point délicat est la surjectivité de la restriction : elle s'obtient en utilisant une fonction cloche constante au voisinage de m et de support dans V. $\square$

Ceci nous permet de proposer la définition suivante

Définition 13.2.5 [Espace cotangent et différentielle] *Avec les notations de la proposition précédente, l'*espace cotangent *de la variéte M en m, noté $T^*_m M$ est l'espace vectoriel $\mathcal{G}(m,U)/\mathcal{F}(m,U)$. La* différentielle d'une fonction *f de classe C^1 définie au voisinage de m – notée* $\mathrm{d}_m f$ *– est alors la classe de $f - f(m)$.*

On remarque en particulier que la différentielle d'une constante est nulle et que $\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$.

Le théorème suivant permet de comprendre ce qu'est l'espace cotangent et la différentielle d'une fonction.

Théorème 13.2.6 *Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées au voisinage d'un point m. Alors $(\mathrm{d}_m x_1, \ldots, \mathrm{d}_m x_n)$ est une base de $T^*_m M$. En particulier* $\dim T^*_m M = \dim M$*. De plus si $f = F(x_1, \ldots, x_n)$, alors*

$$\mathrm{d}_m f = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{X(m)} \mathrm{d}_m(x_i).$$

13.2.3 Applications différentiables

Les fonctions de classe C^∞ vont nous permettre la notion d'application différentiable. Alternativement, nous verrons que tout peut se définir en fonction de cartes.

Définition 13.2.7 *Une application continue $\phi : M \to N$ entre variétés est de classe C^r si pour toute fonction ϕ de classe C^r au voisinage de $f(x)$, $\phi \circ f$ est de classe C^r au voisinage de x.*

Nous venons de voir que l'injection d'une sous-variété dans $\mathbb{R}^n$ est une application C^∞. Nous déduisons immédiatement de cette définition que la composée d'applications de classe C^r est de classe C^r.

Alternativement, la caractérisation suivante est plus efficace.

Proposition 13.2.8 *Une application ϕ entre deux variétés est de classe C^r au voisinage de m, s'il existe des coordonnées X au voisinage de m, des coordonnées Y au voisinage de $f(m)$, telles que $X \circ \phi \circ Y^{-1}$ est de classe C^r.*

Par exemple, les coordonnées sont des exemples d'applications C^∞, de même que les isométries locales entre surfaces hyperboliques.

Définition 13.2.9 *Si F est une application différentiable de M dans N. Son* application cotangente *au point x est l'application linéaire, notée $T^*_x T$, définie de $T^*_{F(x)} N$ dans $T_x M$ par*

$$T*_x f : \ d_{F(x)} g \mapsto d_x(g \circ F).$$

Nous remarquons que si π est un revêtement entre surfaces hyperboliques alors $T * \pi$ est une application linéaire inversible.

13.3 Formes différentielles

13.3.1 Formes différentielles sur les variétés

Définition 13.3.1 [Forme différentielle de degré 1] *Une 1-forme différentielle ou* forme différentielle de degré 1 *sur une variété M est une application $\omega : m \to \omega_m$ définie de M dans T^*M telle que pour tout m de M on a $\omega_m \in T^*_m M$.*

Remarques :

1. La *différentielle* d'une fonction f définie par
$$\mathrm{d}f : x \to \mathrm{d}_x f,$$
est une 1-forme diiférentielle.
2. Si α et β sont deux 1-formes différentielles. La *somme* $\alpha + \beta$ définie par
$$\alpha_+\beta : m \to \alpha_m + \beta_m$$
est une 1-forme différentielle.
3. Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le *produit*
$$f.\omega : m \to f(m)\omega_m,$$
est également une 1-forme différentielle.
4. Si ω est une forme différentielle et $(x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées au voisinage U d'un point m. Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.\mathrm{d}x_i.$$

Cette dernière remarque nous permet de donner un sens à la notion de 1-forme différentiable.

Définition 13.3.2 [Forme différentielle lisse] *Nous dirons qu'une 1-forme différentielle ω est* de classe C^k *au voisinage du point m, s'il existe des coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$ telles qu'au voisinage de m nous ayions*
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i, \tag{13.1}$$
pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de m. Nous dirons qu'un 1-forme différentielle est de classe C^k *si elle est de classe C^k au voisinage de tout les points de la variété M.*

Comme précédement nous remarquons

Remarques :

1. La somme de deux 1-formes différentielles de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage d'un point.
2. Le produit d'une fonction et d'une forme de classe C^k au voisinage d'un point est de classe C^k au voisinage de ce point.
3. Si ω est de classe C^k au voisinage de m alors pour toutes coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage d'un point, nous avons
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i, \tag{13.2}$$
pour des fonctions f_i de classe C^k au voisinage de ce point.

Définition 13.3.3 *Nous notons $\Omega^1(M)$ l'espace des formes diiférentielles de classe C^∞ sur M. L'espace $\Omega^1(M)$ est un espace vectoriel. La multiplication par les fonctions C^∞ lui donne la structure d'un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M.*

Les différentielles de fonctions jouent un rôle particulier et nous dirons

Définition 13.3.4 [Formes exactes, formes fermées] *Nous dirons qu'une 1-forme différentielle est* exacte *si elle est la différentielle d'un fonction. Une forme est* fermée *est au voisinage de tout point la différentielle d'une fonction. Deux formes fermées sont* cohomologues *si leur différence est exacte.*

13.3.2 Intégration des formes différentielles sur les courbes

Définition 13.3.5 *Une* courbe *c de classe C^1 est une application continue d'un intervalle I dans une variété M telle que pour tout t de I, il existe une carte (U, X) au voisinage de $c(t)$ telle que $X \circ c$ – définie sur un voisinage de t – est une courbe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 13.3.6 *Soit f une fonction de classe C^1 et c une courbe, alors $f \circ c$ est de classe C^1.*

Définition 13.3.7 *Nous définissons alors*

$$\langle \mathrm{d}f|\dot{c}(t_0)\rangle = \left.\frac{df \circ c}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Les formes différentielles et les courbes sont reliées.

Proposition 13.3.8 *Soit c une courbe et f une fonctionω une forme différentielle qui s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=N} f_i \mathrm{d}g_i,$$

alors le nombre réel

$$\sum_{i=1}^{i=N} f_i \langle \mathrm{d}g_i|\dot{c}(t)\rangle,$$

ne dépend que de ω, c et t. On le note

$$\omega(\dot{c}(t)).$$

De plus la fonction $t \mapsto \langle\omega(\dot{c}(t))\rangle$ est continue.

Nous pouvons alors intégrer les fonctions le long des courbes

Définition 13.3.9 *L'intégrale de la forme ω sur la courbe c est*

$$\int_c \omega := \int_0^1 \langle\omega|\dot{c}(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

Nous vérifions que si f est une fonction alors

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

En particulier, si c est un *lacet*, c'est-à-dire si $c(a) = c(b)$, alors pour toute forme $\omega = \mathrm{d}f$ nous avons

$$\int_c \omega = 0.$$

Nous en déduisons qu'il Il existe des formes différentielles qui sont fermées sans être exactes. Ainsi la forme définies sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x,$$

est fermée et non exacte. Pour ce dernier point, nous avons en effet qui si c est le lacet $c : [0, 1] \to \mathbb{C}$, définit par $c(t) = e^{2i\pi t}$ alors

$$\int_c \omega = 2\pi.$$

13.3.3 Premier groupe d'homologie

Définition 13.3.10 [COHOLOMOGIE] *Soit M une variété. Son* premier groupe de cohomogie *est l'espace vectoriel*

$$H^1(M, \mathbb{C}) = \mathrm{Fer}(M)/\mathrm{Ex}(M),$$

où $\mathrm{Fer}(M)$ *désigne l'espace vectoriel des formes fermées sur M et* $\mathrm{Ex}(M)$ *celui des formes exactes sur M. Autrement dit, $H^1(M, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des classes de cohomologies de formes fermées.*

13.3.4 Lemme d'homotopie

Nous avons le résultat important suivant

Lemme 13.3.11 *Soit c_0 et c_1 deux chemins homotopes à extrémités fixées. Soit ω une forme fermée alors*

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega.$$

13.3.5 Formes fermées et groupe fondamental

Nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 13.3.12 *Soit ω une forme abélienne sur une surface S. Alors l'application $\widehat{\omega}$ de $\pi_1(S, s)$ dans $\mathbb{C}$ définit par*

$$[c] \mapsto \widehat{\omega}(c) = \int_c \omega,$$

est un homomorphisme de groupe.

Définition 13.3.13 [PÉRIODE]*Si c est un lacet et ω une forme fermée la quantité*

$$\int_c \omega,$$

s'appelle la période de ω

13.3.6 Le théorème d'Hurewicz

Le théorème d'Hurewicz précise la relation entre groupe fondamental et groupe d'homologie.

Théorème 13.3.14 *Soit M une variété, alors l'application définie de*

$$H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, \mathbb{C}),$$

which associates to $[\omega]$ the homomorphism

$$c \mapsto \int_c \omega,$$

is well defined and a linear isomorphism.

Table des matières