

# GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

François Labourie

9 février 2010

# Table des matières

<b>1 Géométrie affine</b>	<b>3</b>
1.1 Points et vecteurs	3
1.1.1 Espace affine	3
1.1.2 Repère d'un espace affine	4
1.1.3 Barycentre	4
1.1.4 Coordonnées barycentriques	5
1.2 Sous-espaces affines	5
1.3 Applications affines	6
1.3.1 Homothéties et théorème de Thalès	6
1.4 Complément : le complété vectoriel d'un espace affine	7
<b>2 Perspective</b>	<b>8</b>
2.0.1 Vues	8
2.0.2 Calcul de la vue en perspective	9
2.0.3 Applications projectives	10
2.0.4 Vues en perspective d'objets	10
<b>3 La droite projective</b>	<b>11</b>
3.1 La droite projective et le birapport	11
3.1.1 Homographies	11
3.1.2 Configurations de trois droites	12
3.1.3 Quadruplets de droites et birapport	12
3.1.4 Classification des homographies réelles	13
<b>4 Géométrie projective</b>	<b>14</b>
4.1 Espace projectif	14
4.2 Lien entre géométrie affine et projective	14
4.2.1 Carte affine	14
4.2.2 Complétion projective d'un espace affine	15
4.3 Sous-espaces projectifs	15
4.3.1 Intersection de sous espaces projectifs	15
4.3.2 Sous-espaces projectifs et cartes affines	15
4.4 Coordonnées homogènes	16
4.5 Repères projectifs	16
4.6 Applications projectives	18
4.6.1 Le groupe des homographies	19
4.6.2 Sous-groupes du groupe projectif : les transformations affines	19
4.7 Dualité	19
4.7.1 Dualité dans le plan projectif	20

<b>5</b>	<b>Les grands théorèmes</b>	<b>22</b>
5.1	Le théorème de Desargues . . . . .	22
5.2	Le théorème de Pappus . . . . .	23
5.3	Le théorème fondamental de la géométrie projective . . . . .	24
5.3.1	Géométrie d'incidence . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Coniques et quadriques</b>	<b>25</b>
6.1	Coniques et quadriques . . . . .	25
6.2	Plan tangent . . . . .	26
6.3	Polarité . . . . .	27
6.4	Groupes et coniques . . . . .	27
6.5	Paramétrisation unicursale des coniques . . . . .	28
6.6	L'hexagramme mystique de Pascal . . . . .	30
6.7	Le groupe projectif orthogonal . . . . .	31
6.8	Division harmonique . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Topologie de l'espace projectif</b>	<b>35</b>
7.1	Rappels de topologie . . . . .	35
7.2	Un premier point de vue sur la topologie de l'espace projectif . . . . .	35
7.3	Cartes affines, droites projectives, application . . . . .	36
7.4	Deux lemmes utiles de topologie générale . . . . .	36

# Chapitre 1

## Géométrie affine

### 1.1 Points et vecteurs

#### 1.1.1 Espace affine

**Définition 1.1.1** [ESPACE AFFINE] *Un espace affine modelé sur un espace vectoriel  $E$  défini sur un corps  $\mathbb{K}$  – ou d'espace tangent  $E$  – est un ensemble  $\mathcal{E}$  dont les éléments sont appelés points et de deux applications définies :*

1. la somme d'un point et d'un vecteur *qui est une application de  $\mathcal{E} \times E$  dans  $\mathcal{E}$ ,  $(p, u) \rightarrow p + u$ ,*
2. la différence de deux points *qui est une application de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  dans  $E$   $(p, q) \rightarrow q - p$*

*telles que pour tous points  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{E}$  et  $u$  et  $v$  de  $E$ , on ait les relations d'associativité suivantes*

$$p + (q - p) = q, \quad (1.1)$$

$$(p + u) + v = p + (u + v), \quad (1.2)$$

$$(p - q) + u = (p + u) - q. \quad (1.3)$$

REMARQUES : On vérifie alors qu'on a les relations suivantes

$$p - p = 0 \quad (1.4)$$

$$p + 0 = p \quad (1.5)$$

$$q - p = m - p \text{ si et seulement si } p = m, \quad (1.6)$$

$$p + u = p + v \text{ si et seulement si } u = v. \quad (1.7)$$

En effet,  $(p - p) + (q - p) = (p + (q - p)) - p = q - p$ . Donc  $p - p = 0$ . Ainsi  $p + 0 = p + (p - p) = p$ . Si maintenant  $p + u = p + v$ , alors  $(p + u) - p = (p + v) - p$  ainso  $(p - p) + u = (p - p) + v$  et  $u = v$ . Enfin, si  $(q - p) = (m - p)$  alors  $q = p + (q - p) = p + (m - p) = m$ .

On utilise aussi la notation  $\vec{p}q = q - p$ . Avec ces notations, on a alors la *relation de Chasles* :

**Proposition 1.1.2** *Pour tous points  $p, q$  et  $m$  d'un espace affine  $\mathcal{E}$*

$$\vec{p}q = \vec{p}m + \vec{m}q. \quad (1.8)$$

EXEMPLE :

1. Un espace vectoriel  $E$  est en particulier un espace affine modelé sur lui-même.
2. Ainsi,  $\mathbb{R}^n$  admet une structure d'espace affine canonique. les somme et différence correspondent alors aux calculs en coordonnées.

3. Par définition la *dimension d'un espace affine* est celle de l'espace vectoriel sous-jacent.

EXERCICE : Soit  $(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$  des points d'un espace affine modelé sur  $E$  tels que  $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$  forme une base de  $E$ . Montrez que pour tout  $i_0$ ,  $\{p_i - p_{i_0}\}_{i \neq i_0}$  est une base de  $E$ .

### 1.1.2 Repère d'un espace affine

**Définition 1.1.3** Un repère d'un espace affine de dimension  $n$  modelé sur  $E$  est la donnée d'un uplet  $\mathcal{R} = (M, e_1, \dots, e_n)$  où  $M$  est un point de  $\mathcal{E}$  – appelé origine – et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Dans ce cas, l'application  $\theta_{\mathcal{R}}$  de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathcal{E}$  définie par

$$(\lambda_1, \lambda_n) \rightarrow M + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i,$$

est un bijection. Si  $\theta_{\mathcal{R}}(\lambda_1, \lambda_n) = p$  alors  $(\lambda_1, \lambda_n)$  sont les coordonnées de  $p$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

EXEMPLE : Dans  $\mathbb{R}^n$  rapporté au repère  $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ , un point  $p$  est représenté par la colonne de ses coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur  $\vec{op}$ . Si  $p$  et  $q$  sont des points,  $\vec{v}$  un vecteur de composantes  $E$ ,  $a$  un réel, on note  $q - p = \vec{p}q$ ,  $r = p + \vec{v}$  le point tel que  $\vec{pr} = \vec{v}$ .

### 1.1.3 Barycentre

**Proposition 1.1.4** Soit  $p_1, \dots, p_n$  des points d'un espace affine  $\mathcal{E}$  défini sur  $\mathbb{K}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$ . Soit  $m_0$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $q$  tel que

$$q = m_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m_0 \vec{p}_i.$$

Alors, pour tout  $m$  de  $\mathcal{E}$

$$q = m + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m \vec{p}_i.$$

**Définition 1.1.5** Des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que  $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1$  s'appelle des poids.

**Définition 1.1.6** Avec les notations de la proposition, l'unique point  $q$  de  $\mathcal{E}$  tel que pour tout  $m$  de  $\mathcal{E}$ , on a

$$m \vec{q} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i m \vec{p}_i,$$

est appelé barycentre des points  $p_i$  affectés des poids  $\lambda_i$ . On le note

$$q = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i.$$

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Les coordonnées du barycentre sont les moyennes des coordonnées pondérées des poids.

2. Si la caractéristique de  $\mathbb{K}$  est différente de 2, le milieu de  $p$  et  $q$  est le barycentre affecté des coefficients  $\frac{1}{2}$ . Il est aussi noté  $\frac{p+q}{2}$ .
3. Pour tous points  $p, q, m$  et  $n$  de  $\mathcal{E}$ , on a

$$p\vec{q} = m\vec{n}$$

si et seulement si

$$\frac{p+n}{2} = \frac{q+m}{2}.$$

Autrement dit : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

### 1.1.4 Coordonnées barycentriques

**Proposition 1.1.7** Soit  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  des points d'un espace affine  $\mathcal{E}$  tels que  $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$  forme une base de l'espace tangent. Alors pour tout  $x$  de  $\mathcal{E}$ , il existe des scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que  $\sum_i \lambda_i = 1$  et

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i.$$

**Définition 1.1.8** Soit  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  des points d'un espace affine  $\mathcal{E}$  tels que  $\{p_i - p_1\}_{i \neq 1}$  forme une base de l'espace tangent. L'application qui a un point de  $\mathcal{E}$  associe les scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que  $\sum_i \lambda_i = 1$  et

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i p_i,$$

s'appelle coordonnées barycentriques.

En conclusion, la différence de deux points est un vecteur, le barycentre de deux points est un point, on peut ajouter un vecteur et un point. Plus généralement une combinaison  $\sum_i m_i p_i$  est un point (barycentre des points  $p_i$  affectés des masses  $m_i$ ) si  $\sum_i m_i = 1$ . Ces notations "additives" sont compatibles avec les calculs en coordonnées.

## 1.2 Sous-espaces affines

**Définition 1.2.1** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine d'espace tangent  $E$ , un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  tel que il existe un  $p$  tel que

$$F_p := \{q - p \mid p \in \mathcal{F}\},$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . La dimension de  $\mathcal{F}$  est celle de  $F$ .

REMARQUES :

- Le sous-espace affine  $\mathcal{F}$  de la définition est alors un espace affine d'espace tangent  $F$ .
- Deux sous-espaces affines sont *parrallèles* s'ils ont le même espace tangent.
- Si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine alors pour tout point  $p$  de  $\mathcal{F}$  l'ensemble

$$F_p := \{q - p \mid p \in \mathcal{F}\},$$

est l'espace tangent à  $\mathcal{F}$ .

- L'ensemble  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine si et seulement si tout barycentre de points de  $\mathcal{F}$  est un point de  $\mathcal{F}$ .

### 1.3 Applications affines

**Définition 1.3.1** Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  des espaces affines modelés sur  $E$  et  $F$ . Une application  $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est affine s'il existe une application linéaire  $L : E \rightarrow F$  telle que pour tous points  $p, q$  de  $\mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{L}(q) = \mathcal{L}(p) + L(\vec{pq}).$$

L'endomorphisme  $L$  s'appelle la partie linéaire de  $\mathcal{L}$ , ou l'application linéaire tangente à  $\mathcal{L}$ .

**Proposition 1.3.2** La composée d'applications affines est affine.

**Proposition 1.3.3** Si  $\mathcal{L}$  est affine, alors pour tous poids  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  on a

$$\mathcal{L}\left(\sum_i \lambda_i p_i\right) = \sum_i \lambda_i \mathcal{L}(p_i).$$

Réciproquement si pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ , l'application  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  vérifient

$$\mathcal{L}(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda \mathcal{L}(p) + (1 - \lambda)\mathcal{L}(q),$$

alors  $f$  est affine.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Applications linéaires.
2. Translations (ce sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité).
3. Homothéties (on remarquera que la construction des homothéties utilise la commutativité du corps  $\mathbb{K}$ ).
4. Symétries orthogonales par rapport à des droites affines du plan (exercice).
5. Rotations autour de points du plan (exercice).

#### 1.3.1 Homothéties et théorème de Thalès

Soit  $D$  une droite affine et trois points  $O, A$  et  $B$  de  $D$ , le rapport  $\frac{OA}{OB}$  est le scalaire  $\lambda$  tel que

$$O - A = \lambda(O - B).$$

**Théorème 1** [THALÈS (SIXIÈME SIÈCLE AVANT NOTRE ÈRE)] Soit  $D$  et  $D'$  deux droites distinctes d'un espace affine concourantes en  $O$ . Soit  $A$  et  $B$ , respectivement  $A'$  et  $B'$ , deux points de  $D$ , respectivement de  $D'$ . Alors  $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$  si et seulement si les droites  $AA'$  et  $BB'$  sont parallèles.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'utiliser l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{OA}{OB}$ .  $\square$

EXERCICE : Montrez la version dégénérée de Thalès suivante. Soit  $D$  et  $D'$  deux droites distinctes parallèles. Soit  $A, B, C$ , respectivement  $A', B'$  et  $C'$ , trois points de  $D$ , respectivement de  $D'$ . On suppose que  $AB'$  est parallèle à  $A'B$  et que  $B'C$  est parallèle à  $BC'$ . Montrez que  $AC'$  est parallèle à  $A'C$ .

Après choix de repères, toute application affine  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  possède une unique écriture matricielle, compatible avec la composition :

**Proposition 1.3.4** Soit  $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  un repère de  $\mathcal{E}$  et  $(p, f_1, \dots, f_n)$  un repère de  $\mathcal{F}$ . La matrice de  $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  dans ces repères est

$$M_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} M_L & pf(\vec{o}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $M_L$  désigne la matrice de  $L$  dans la base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ .

REMARQUES :

1. Une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est, son inverse est alors affine
2. Le groupe affine est un produit semi-direct.
3. Le lieu des points fixes d'une application affine est un sous-espace affine, cas où il est non vide, dimension, lien avec la multiplicité de 1 comme valeur propre de la partie linéaire.

**Proposition 1.3.5** Soit  $(e, e_1, \dots, e_n)$  et  $(o', e'_1, \dots, e'_n)$  deux repères affines de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f$  une transformation affine de matrices  $M$  et  $M'$  dans ces repères. Notons  $E$  la colonne des coordonnées du point  $o'$  dans le repère  $(o, e_1, \dots, e_n)$ . Posons

$$P_a = \begin{pmatrix} P & E \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  dans la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , i.e. les colonnes de  $P$  sont les composantes des vecteurs  $e'_j$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors

$$M' = P_a^{-1} M P_a.$$

## 1.4 Complément : le complété vectoriel d'un espace affine

Tout espace affine est l'hyperplan affine d'un espace vectoriel unique.

**Proposition 1.4.1** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine modelé sur  $E$ , il existe un espace vectoriel  $\hat{\mathcal{E}}$  et une injection  $i$  affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\hat{\mathcal{E}}$  tels que pour toute application affine  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{E}$  dans un espace vectoriel  $V$ , il existe une application linéaire unique  $\hat{\mathcal{L}}$  de  $\hat{\mathcal{E}}$  dans  $V$ , telle que

$$\hat{\mathcal{L}} \circ i = \mathcal{L}.$$

DÉMONSTRATION : Soit  $p$  un point d'un espace affine  $\mathcal{E}$  modelé sur  $E$ . On pose  $\hat{\mathcal{E}} = E \oplus \mathbb{K}$ . L'espace affine  $\mathcal{E}$  se plonge de manière affine dans  $\hat{\mathcal{E}}$  par  $x \rightarrow (x - p, 1)$ . On prend ensuite  $\hat{\mathcal{L}}(u, \lambda) = L(u) + \lambda \cdot \mathcal{L}(p)$ .  $\square$

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. L'espace  $\hat{\mathcal{E}}$  est dit solution d'un *problème universel*. On montre en utilisant la proposition que  $(\hat{\mathcal{E}}, i)$  est unique à isomorphisme linéaire près.
2. L'espace vectoriel tangent  $E$  s'injecte dans  $\hat{\mathcal{E}}$  en prenant l'application linéaire tangent à  $i$ .
3.  $\dim(\hat{\mathcal{E}}) = \dim(\mathcal{E}) + 1$ .

**Définition 1.4.2** L'espace vectoriel  $\hat{\mathcal{E}}$  construit dans la proposition précédente est le complété vectoriel de  $\mathcal{E}$ .

**Corollaire 1.4.3** Le complété vectoriel d'un espace affine est unique à isomorphisme près. De plus, toute application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  s'étend en une application linéaire de  $\hat{\mathcal{E}}$  dans  $\hat{\mathcal{F}}$  appelé extension linéaire de  $\mathcal{L}$ . La composée des extensions linéaires est l'extension linéaire de la composée.

**Proposition 1.4.4** Tout repère  $(p, e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathcal{E}$  donne une base de son complété vectoriel. De plus, la matrice de l'extension linéaire d'une application affine est la matrice de l'application affine.

# Chapitre 2

## Perspective

### 2.0.1 Vues

Une *vue* d'une scène 3D est déterminée par les données suivantes.

– La position de la caméra : un point  $c$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ .

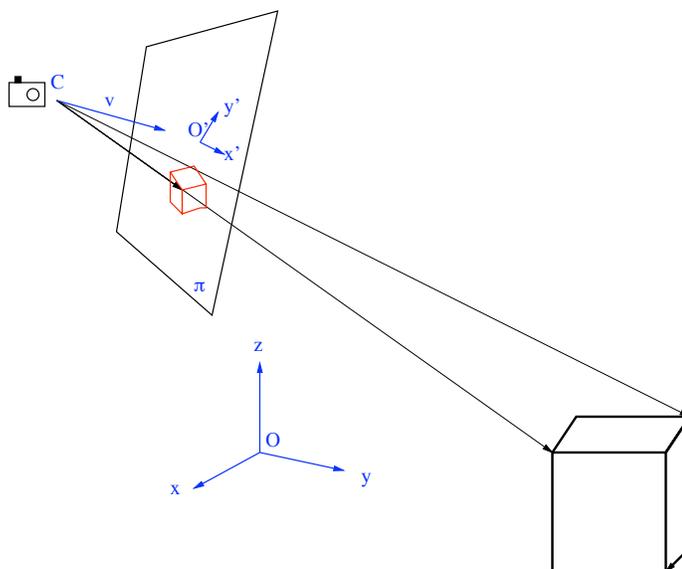
– Une direction de visée : un vecteur unitaire  $\vec{v}$  de composantes  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

– Un *écran*, i.e. un plan  $\Pi$  perpendiculaire à la direction de visée : il est déterminé par sa distance à  $C$ , un réel positif  $d$ .

– Un repère orthonormé  $(o', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$  du plan  $\Pi$ .

Une *vue* de la scène est une application  $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , qui aux coordonnées d'un point dans le *repère du monde*  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  associe les coordonnées de sa projection sur l'écran  $\Pi$ , dans le *repère de l'image*  $(o', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ .

**Définition 2.0.5** La vue en perspective depuis  $c$  sur l'écran  $\Pi$  consiste à projeter un point  $p$  sur  $p'$ , point d'intersection de la droite  $cp$  avec  $\Pi$ .



REMARQUES : La projection n'est pas définie si  $p$  est dans le plan passant par  $C$  et parallèle à  $\Pi$ . C'est normal : on n'arrive pas à voir dans les directions situées à  $90^\circ$  de sa direction de vision.

**Définition 2.0.6** *Prise de vue à distance infinie. Soit  $D$  une droite, appelée axe de visée, et  $\Pi$  un plan orthogonal à  $D$ . La prise de vue à distance infinie dans la direction  $D$  consiste à projeter orthogonalement sur  $\Pi$ .*

C'est ce qu'on obtient à la limite, lorsque,  $\Pi$  et  $o'$  étant fixés,  $C$  tend vers l'infini le long de la droite  $D = (o', \vec{v})$ .

### 2.0.2 Calcul de la vue en perspective

Voici un moyen systématique de construire le repère  $(o', e'_1, e'_2)$ . Il suffit de choisir une fois pour toute un vecteur unitaire  $\vec{v}$  non colinéaire à  $\vec{v}$ . On prend pour  $o'$  la projection orthogonale de  $C$  sur  $\Pi$ , soit  $o' = C + d\vec{v}$ . On prend

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{v} \wedge \vec{v}}{|\vec{v} \wedge \vec{v}|} \quad \text{et} \quad \vec{e}'_2 = \vec{v} \wedge \vec{e}'_1.$$

**Proposition 2.0.7** *On choisit  $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Les coordonnées de  $p'$  sont données, en fonction des*

*coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $p$ , par les formules*

$$x' = \frac{-cd(x - x_0) + ad(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))}.$$

On constate que la vue en perspective s'exprime par des fractions rationnelles. Complétons le repère de l'image en un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^3$  en posant  $\vec{e}'_3 = \vec{v}$ . La troisième coordonnée de  $p'$  est évidemment  $z' = 0$ .

On ramène ces expressions rationnelles à des expressions linéaires en adoptant la convention

suivante : Un point  $p$  de  $\mathbb{R}^3$  peut être représenté, non seulement par  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , mais par n'importe quel vecteur de  $\mathbb{R}^4$  qui lui est proportionnel. En particulier, un point  $p'$  du plan  $\Pi$  peut être représenté par n'importe quel vecteur de  $\mathbb{R}^3$  proportionnel à  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Avec cette convention, on peut choisir pour représentant de la vue en perspective  $p'$  d'un point  $p$  le vecteur

$$\begin{pmatrix} -cd(x - x_0) + ad(z - z_0) \\ abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0) \\ 0 \\ \sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)) \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est l'image du vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  par l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  de matrice

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & ad & cdx_0 - adz_0 \\ abd & -d(a^2 + c^2) & bcd & -abdx_0 + d(a^2 + c^2)y_0 - bcdz_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\sqrt{a^2 + c^2} & b\sqrt{a^2 + c^2} & c\sqrt{a^2 + c^2} & \sqrt{a^2 + c^2}(-ax_0 - by_0 - cz_0) \end{pmatrix}$$

C'est quand même plus sympathique (et commode à implémenter informatiquement) de passer par une matrice pour représenter la vue en perspective.

**Définition 2.0.8** Soit  $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . On appelle coordonnées homogènes de  $p$  tout quadruplet  $(u, v, w, t)$  proportionnel à  $(x, y, z, 1)$ . On note  $p = [x; y; z; t]$ .

### 2.0.3 Applications projectives

**Définition 2.0.9** Application projective  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m =$  donnée “en coordonnées homogènes” par une matrice  $(m + 1) \times (n + 1)$  non nulle.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Applications affines.
2. Vue en perspective d'une droite.
3. Vue en perspective d'un plan.

### 2.0.4 Vues en perspective d'objets

EXEMPLE : La vue d'un plan est affine si et seulement si le plan est orthogonal à la droite de visée. Dans ce cas, la vue est homothétique.

EXERCICE : Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite  $D$  sont en général concourantes en un point appelé *point de fuite* de  $D$ . Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?

REMARQUES : Dans une ville, les immeubles sont souvent des parallélépipèdes aux arêtes parallèles à trois directions fixées. Vues en perspective, ces trois familles d'arêtes sont portées par des droites concourantes en trois points. Si la direction de visée est horizontale, les arêtes verticales restent parallèles, et il ne reste plus que deux points de concours nettement visibles sur l'image : on parle de *perspective à deux points de fuite*.

EXERCICE : Soit  $D_+$  une demi-droite,  $S$  un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.

REMARQUES : On a décrit une vue comme la projection sur l'écran de tout l'espace. En réalité, une vue ne montre que ce qui se trouve devant l'écran. La vue en perspective réelle d'une droite est donc la projection d'une demi-droite ne coupant pas le plan parallèle à l'écran passant par la caméra : on voit un segment dont les extrémités sont le point de fuite et l'intersection de la droite avec l'écran.

EXERCICE : A quoi ressemble un cercle vu en perspective ? Tenir compte de la remarque précédente.

EXERCICE : A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?

# Chapitre 3

## La droite projective

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif (le plus souvent,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , parfois  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Soit  $P$  un plan vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Définition 3.0.10** La droite projective de  $P$ , notée  $\mathbb{P}(P)$ , est l'ensemble des droites vectorielles de  $P$ .

**Définition 3.0.11** Si  $(e_1, e_2)$  est une base vectorielle de  $P$ , nous dirons que le point  $d$  de  $P$  – qui est une droite vectorielle – est de coordonnées homogènes  $[x : y]$  avec  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$  si la droite vectorielle  $d$  est engendrée par le vecteur  $xe_1 + ye_2$ .

### 3.1 La droite projective et le birapport

Soit  $P$  un plan vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Traitons d'abord le cas où  $P$  est muni d'une base de telle sorte qu'on l'identifie avec  $\mathbb{K}^2$ .

Nous identifions alors  $\mathbb{P}(P)$  avec  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$  en utilisant les coordonnées homogènes de la manière suivante

$$\begin{aligned} [x : y] &\mapsto \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0, \\ [x : 0] &\mapsto \infty \end{aligned} \tag{3.1}$$

Par abus de langage, on appelle également cette identification coordonnées homogènes.

#### 3.1.1 Homographies

Soit  $A$  une transformation linéaire inversible de  $P$  donnée dans la base  $(e_1, e_2)$  par une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Comme  $A$  est inversible, l'image de toute droite est une droite et  $A$  définit ainsi une bijection de  $\mathbb{P}(P)$  dans  $\mathbb{P}(P)$  notée aussi  $A$ .

**Définition 3.1.1** Si  $A$  est une application inversible, l'application  $A$  de  $\mathbb{P}(P)$  dans  $\mathbb{P}(P)$  qui à une droite associe l'image de cette droite est appelée homographie.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. deux applications inversibles  $A$  et  $B$  donnent naissance à la même homographie si et seulement si  $A = k.B$  où  $k$  est une homothétie.

**Proposition 3.1.2** En identifiant  $\mathbb{P}(P)$  avec  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ , on a  $A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

### 3.1.2 Configurations de trois droites

**Proposition 3.1.3** *Soit  $(D_1, D_2, D_3)$  trois droites distinctes. Il existe alors une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$  telle que  $e_1$  engendre  $D_1$ ,  $e_2$  engendre  $D_2$  et  $(e_1 + e_2)$  engendre  $D_3$ . De plus  $(e_1, e_2)$  est unique à une homothétie près.*

**Corollaire 3.1.4** *Soit  $(D_1, D_2, D_3)$  et  $(E_1, E_2, E_3)$  deux triplets formés de trois droites distinctes. Il existe alors une transformation linéaire  $A$  telle que  $A(D_i) = E_i$ . L'application  $A$  est unique à multiplication près par une homothétie.*

Nous pouvons interpréter ces résultats dans le monde projectif

**Corollaire 3.1.5** *Soit  $(D_1, D_2, D_3)$  trois points distincts de  $\mathbb{P}(P)$ , il existe alors des unique coordonnées homogènes tels que  $D_1 = \infty$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_3 = 1$ .*

**Corollaire 3.1.6** *Soit  $(D_1, D_2, D_3)$  et  $(E_1, E_2, E_3)$  deux triplets formés de trois points distincts de  $\mathbb{P}(P)$ , il existe alors une unique homographie qui envoie  $D_i$  sur  $E_i$ .*

### 3.1.3 Quadruplets de droites et birapport

**Définition 3.1.7** *Soit  $(D_1, D_2, D_3, D_4)$  quatre droites distinctes. Choisissons les coordonnées homogènes telles que  $D_1 = \infty$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_3 = 1$ , le birapport de  $(D_1, D_2, D_3, D_4)$ , noté  $[D_1, D_2, D_3, D_4]$  est la coordonnée homogène de  $D_4$ .*

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. En coordonnées homogènes, on a donc  $[\infty, 0, 1, x] = x$ .
2. Par définition, il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $P$  telle que  $e_1$  engendre  $D_1$ ,  $e_2$  engendre  $D_2$ ,  $(e_1 + e_2)$  engendre  $D_3$  et  $([D_1, D_2, D_3, D_4]e_1 + e_2)$  engendre  $D_4$ . De plus ceci caractérise le birapport.
3. Si  $A$  est une bijection linéaire alors

$$[A(D_1), A(D_2), A(D_3), A(D_4)] = [D_1, D_2, D_3, D_4].$$

**Proposition 3.1.8** *Si dans des coordonnées homogènes  $D_i = x_i$  alors*

$$[D_1, D_2, D_3, D_4] = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}.$$

DÉMONSTRATION : Notons

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_3 - x_4}{x_3 - x_2}.$$

On remarque tout d'abord que  $Q(\infty, 0, 1, x) = x$ . Pour conclure en utilisant les propositions 3.1.3 et 3.1.2, il suffit de montrer que

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = Q\left(\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}, \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d}, \frac{ax_4 + b}{cx_4 + d}\right),$$

ce qui se fait par un calcul direct.  $\square$

EXERCICE : Soit  $P$  un plan vectoriel muni d'une métrique euclidienne  $g$ . On considère le plan complexifié  $P_{\mathbb{C}}$ . Les *points cycliques* sont les deux droites complexes sur laquelle  $g$  s'annulent. Soit  $D, D'$  deux droites de  $P$ . Montrer que l'angle  $\theta$  entre  $D$  et  $D'$  s'exprime au moyen du birapport des points  $f, f', c, c'$  où  $c$  et  $c'$  sont les points cycliques et  $f$  et  $f'$  sont les droites complexifiées.

**Solution.**  $e^{-2i\theta} = [f, f', c, c']$ .

### 3.1.4 Classification des homographies réelles

Une homographie différente de l'identité fixe au plus deux points et une homographie qui renverse l'orientation fixe exactement deux points.

**Définition 3.1.9** *Soit  $A$  une homographie de la droite projective réelle*

1. *Si  $A$  ne fixe aucun point, alors  $A$  est dite elliptique.*
2. *Si  $A$  fixe exactement un point de la droite projective réelle, alors  $A$  est dite parabolique.*
3. *Si  $A$  fixe exactement deux points et préserve l'orientation alors  $A$  est dite hyperbolique.*

Nous pouvons affiner la description de ces diverses isométries. Cette classification s'exprime en fonction du déterminant et de la trace. Si une homographie  $A$  est représentée par une matrice  $B$  de déterminant positif, nous poserons  $\text{tr}(A) = |\text{tr}(B/\sqrt{\det(B)})|$ .

**Théorème 2** [CLASSIFICATION DES HOMOGRAPHIES RÉELLES] *Nous avons la classification suivante des homographies préservant l'orientation.*

1. *Si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) < 2$  alors  $A$  est elliptique.*
2. *Si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) = 2$ , alors  $A$  est parabolique.*
3. *Si  $\det(A) > 0$  et  $\text{tr}(A) > 2$ , alors  $A$  est hyperbolique.*

Remarquons que suivant les cas l'homographie  $A$  est conjuguée successivement à une homographie de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Symétrie axiale

**Proposition 3.1.10** *Soit  $A$  une homographie renverse l'orientation dont les points fixes sont  $x_0$  et  $x_1$ . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- $A^2 = \text{Id}$ ,
- si et seulement si pour tout point  $y$  de la droite projective, on a  $[x_0, x_1, y, A(y)] = -1$ .
- $A$  est représentée par une application linéaire de trace nulle.

Une telle homographie est appelée homo

# Chapitre 4

## Géométrie projective

Nous allons en particulier généraliser la discussion du dernier paragraphe en dimension supérieure.

### 4.1 Espace projectif

**Définition 4.1.1** L'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  est l'ensemble des droites de l'espace vectoriel  $V$ . Sa dimension est celle de  $V$  diminuée de 1 :  $\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1$ .

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Un espace projectif de dimension 1 est une *droite projective*, un espace projectif de dimension 2 est un *plan projectif*.
2. On note  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  et quelquefois  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . On a
  - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^0) = \emptyset$ . Par convention, sa dimension vaut  $-1$ .
  - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^1) = \{\text{pt}\}$ .
  - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$  s'appelle la *droite projective* sur  $\mathbb{K}$ . Un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , c'est une pente, éventuellement infinie.
  - $\mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$  s'appelle le *plan projectif* sur  $\mathbb{K}$Ainsi  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  est la droite projective réelle,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  est le plan projectif complexe etc.
3. Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , alors  $\mathbb{P}(W)$  est naturellement un sous-ensemble de  $\mathbb{P}(V)$  appelé *sous-espace projectif*.

### 4.2 Lien entre géométrie affine et projective

#### 4.2.1 Carte affine

Soit  $P$  un hyperplan vectoriel de  $V$ .

**Définition 4.2.1** La carte affine  $O_P$  associée à  $P$  est l'ensemble de droites non contenues dans  $P$ .

Nous avons alors

**Proposition 4.2.2** Le complémentaire d'une carte affine est un hyperplan projectif :  $\mathbb{P}(V) \setminus O_P = \mathbb{P}(P)$ . De plus si  $B$  est un hyperplan affine d'espace tangent  $P$  et ne passant pas par  $0$  l'application  $b : D \rightarrow D \cap B$  de  $O_P$  dans  $B$  est une bijection. Si  $B$  et  $B'$  sont deux tels hyperplans  $b \circ b'^{-1}$  est une bijection affine.

**Corollaire 4.2.3** Une carte affine a une structure d'espace affine.

**Définition 4.2.4** On dit que  $\mathbb{P}(P)$  est l'hyperplan à l'infini de la carte affine  $O_P$ .

EXERCICES :

1. Soit  $\mathbb{K}$  un corps fini, montrez que  $\sharp(\mathbb{P}^1(\mathbb{K})) = \sharp(\mathbb{K}) + 1$ .
2. Soit  $\mathbb{K}$  un corps fini, calculez par récurrence  $\sharp(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$ .
3. Montrez que l'espace projectif est une réunion de carte projectives.

### 4.2.2 Complétion projective d'un espace affine

Nous allons démontrer que la géométrie affine d'un espace affine s'étend en la géométrie projective d'un espace projectif.

**Définition 4.2.5** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine et soit  $\hat{\mathcal{E}}$  son complété vectoriel. L'espace  $\bar{E} = \mathbb{P}(\hat{\mathcal{E}})$  est le complété projectif de  $E$ . L'hyperplan  $\mathbb{P}(E)$  est l'hyperplan à l'infini de  $\mathcal{E}$

Résumons les propriétés de ce complété en identifiant à la fois  $\mathbb{P}(E)$  et  $\mathcal{E}$  comme des sous-ensembles de  $\bar{E}$ .

**Proposition 4.2.6** 1. L'espace projectif de  $E$  se plonge comme un hyperplan projectif de  $\bar{E}$ , de telle sorte que la carte affine correspondante s'identifie à  $\mathcal{E}$ . Ainsi  $\bar{E} = \mathcal{E} \cup \mathbb{P}(E)$ .

## 4.3 Sous-espaces projectifs

**Définition 4.3.1** Une sous-variété linéaire – ou sous-espace projectif – de dimension  $m$  de  $\mathbb{P}(V)$ , c'est l'image d'un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  de dimension  $m + 1$ . D'où des points, droites, des plans, des hyperplans. La codimension de  $Q \subset \mathbb{P}^d$ , c'est  $d - \dim(Q)$ .

### 4.3.1 Intersection de sous espaces projectifs

**Théorème 3** Dans  $\mathbb{P}^2$ , deux droites distinctes se coupent en un point exactement. Plus généralement, dans  $\mathbb{P}^d$ , l'intersection de deux sous-variétés linéaires de codimensions  $c$  et  $c'$  est une sous-variété linéaire de codimension  $\leq c + c'$  si elle est non vide. Cette intersection est non vide si  $c + c' \leq d$ .

### 4.3.2 Sous-espaces projectifs et cartes affines

Nous avons les deux résultats suivants.

**Théorème 4** Soit  $\mathbb{P}(W)$  un sous-espace projectif de  $\mathbb{P}(V)$ . Soit  $P$  un hyperplan vectoriel de  $V$  et  $O_P$  la carte affine affine associée. Alors

- soit  $\mathbb{P}(W)$  est inclus dans l'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}(P)$  de  $O_P$ ,
- soit  $\mathbb{P}(W) \cap O_P$  est un sous-espace affine de même dimension que  $\mathbb{P}(W)$  dont l'espace tangent est  $P \cap W$ . Dans ce cas,  $\mathbb{P}(P) \cap \mathbb{P}(W) = (P \cap W)$

Dans le premier cas on dit que  $\mathbb{P}(W)$  est à l'infini de la carte. Dans le deuxième cas, on dit que  $\mathbb{P}(P) \cap \mathbb{P}(W)$  est l'ensemble des points à l'infini du sous-espace affine  $\mathbb{P}(W) \cap O_P$ . Si  $\mathbb{P}(W)$  est une droite projective on dit que le point d'intersection de  $\mathbb{P}(W)$  avec  $\mathbb{P}(P)$  est le *point de fuite* de cette droite.

Les point de fuite nous permettent de comprendre le parallélisme des droites affines dans le monde projectif.

**Théorème 5** Deux droite projectives distinctes sont parallèles dans des cartes affines, si et seulement si elles ont le même point de fuite.

Deux hyperplan projectifs distincts sont parallèles dans une carte affine si et seulement si leur intersection est à l'infini.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si  $\mathcal{A}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . alors  $\bar{A}$  s'injecte comme un sous-espace projectif de  $\mathcal{E}$  de telle sorte que  $\bar{A} \cap \mathcal{E} = \mathcal{A}$  et  $\bar{A} \cap \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A)$ .
2. Si  $D$  est une droite affine, son hyperplan à l'infini est réduit à un point, le point à l'infini de  $D$ .
3. Si  $E$  est un espace affine d'hyperplan à l'infini  $H$ , à chaque droite affine  $D \subset E$  est associé un point  $F_D \subset H$ , son *point de fuite*. Deux droites ont même point de fuite si et seulement si elles sont parallèles.
4. Plus généralement, si  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$  est un sous-espace affine, son hyperplan à l'infini s'envoie dans l'hyperplan à l'infini  $H$  de  $\mathcal{E}$ , deux sous-espaces donnent la même sous-variété linéaire de  $H$  si et seulement ils sont parallèles – c'est à dire si ils ont le même sous espace tangent.
5. Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites affines. Soit  $\bar{A}, \bar{A}'$  les droites projectives correspondantes dans la complétion projective de  $\mathcal{E}$ . Alors  $\bar{A} \cap \bar{A}'$  est
  - ou bien un point de  $\mathcal{P}$ , si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes,
  - ou bien le point de fuite commun de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  si elles sont parallèles.

Pour démontrer ces deux théorèmes on a besoin d'un lemme de géométrie affine.

**Lemme 4.3.2** *Soit  $P$  un hyperplan vectoriel de  $V$ . Soit  $\mathcal{P}$  un hyperplan affine parallèle à  $P$ . Soit  $W$  un sous-espace vectoriel qui n'est pas inclus dans  $P$ , alors  $W \cap \mathcal{P}$  est un sous-espace affine d'espace tangent  $W \cap P$ .*

## 4.4 Coordonnées homogènes

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$

**Définition 4.4.1** *Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  des scalaires non tous nuls. On dit que la droite  $D$  a pour coordonnées homogènes  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et on note*

$$D = [\lambda_1 : \dots : \lambda_n],$$

si  $\sum_i \lambda_i e_i \in D$ .

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. On a l'égalité  $[\lambda_1 : \dots : \lambda_n] = [\mu_1 : \dots : \mu_n]$  si et seulement si il existe un  $t$  non nul tel que pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = t\mu_i$ .
2. Si  $P$  est l'hyperplan engendré par  $e_2, \dots, e_n$ , la carte affine associée à  $P$  comme l'ensemble des points  $[\lambda_1 : \dots : \lambda_n]$  tels que  $\lambda_1 \neq 0$ . On obtient une bijection de  $O_P$  avec  $\mathbb{K}^{n-1}$  donnée par

$$[\lambda_1 : \dots : \lambda_n] \rightarrow \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right),$$

dont l'inverse est

$$(x_2, \dots, x_n) \rightarrow [1 : x_2 : \dots : x_n].$$

3. Montrez que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  est la réunion de  $n + 1$ -cartes affines.

## 4.5 Repères projectifs

Choisir une base de  $V$  donne dans  $\mathbb{P}(V)$  des coordonnées homogènes. Une autre base, même si elle se projette sur les mêmes points de  $\mathbb{P}(V)$ , ne donne pas les mêmes coordonnées homogènes. Il faut donc se donner un point de plus pour fabriquer des coordonnées homogènes uniques.

**Position générale**

REMARQUES :  $r$  points d'un espace projectif sont toujours contenus dans une plus petite sous-variété linéaire. On dit qu'ils l'*engendrent*. Sa dimension est  $\leq r - 1$ .

**Définition 4.5.1**  $r$  points d'un espace projectif sont projectivement indépendants (ou forment un système projectivement libre) s'ils ne sont contenus dans aucune sous-variété linéaire de dimension  $< r - 1$ .

EXEMPLE : Deux points sont projectivement indépendants si et seulement si ils sont distincts. Trois points sont projectivement indépendants si et seulement si ils ne sont pas alignés.

Plus généralement, des points *en position générale* sont projectivement indépendants, au sens suivant : être en position non générale signifie satisfaire une relation linéaire.

**Repères**

**Définition 4.5.2** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .  $n + 2$  points de  $\mathbb{P}(V)$  forment un repère projectif si tout sous-ensemble de  $n + 1$  points est projectivement libre.

EXEMPLE : Dans une droite projective, trois points forment un repère projectif si et seulement si ils sont deux à deux distincts.

**Théorème 6** Soit  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  un repère projectif de  $\mathbb{P}(V)$ . Il existe des vecteurs  $e_0 \in p_0, \dots, e_{n+1} \in p_{n+1}$  tels que  $e_{n+1} = e_0 + \dots + e_n$ . Ils sont uniques à un scalaire commun près.

**Corollaire 4.5.3** Soit  $(P_0, \dots, P_{n+1})$  un repère projectif de  $\mathbb{P}(V)$ . Il existe des coordonnées homogènes uniques telles que

$$\begin{aligned} P_0 &= [1 : 0 : \dots : 0] \\ &\dots \\ P_n &= [0 : 0 : \dots : 1] \\ P_{n+1} &= [1 : 1 : \dots : 1] \end{aligned}$$

EXERCICE : Comment les coordonnées homogènes changent-elles quand on permute les points  $p_i$  ?

REMARQUES :

1. On se donne des coordonnées homogènes. Alors tout sous-espace projectif est donné par des équations linéaires dans ces coordonnées. Par exemple un hyperplan peut toujours s'écrire sous la forme

$$P = \{[x_1 : \dots : x_n] \mid \sum_i a_i x_i = 0\}.$$

2. Dans la carte affine

$$O = \{[x_1 : \dots : x_n] \mid x_1 \neq 0\},$$

l'hyperplan affine  $P \cap O$  est donné par l'équation affine

$$a_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0.$$

3. Si enfin un hyperplan affine est donné par l'équation

$$a_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0,$$

Alors l'équation du sous-espace projectif correspondant dans le complété projectif est

$$a_1 x_1 + \sum_{i>1} a_i x_i = 0,$$

---

Fin du cours  $n^{\circ}3$

## 4.6 Applications projectives

**Définition 4.6.1** Soit  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels. Toute application linéaire non nulle  $M : V \rightarrow V'$  définit une application  $f_M : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  définie sur le complémentaire de la sous-variété linéaire  $\mathbb{P}(\text{Ker}M)$ , appelée application projective associée.

EXEMPLE : Toute application affine  $E \rightarrow E'$  se prolonge en une application projective entre complétions projectives, unique à translation près. L'action sur les hyperplans à l'infini  $\mathbb{P}(T) \rightarrow \mathbb{P}(T')$  est induite par la partie linéaire, qui envoie  $T$  dans  $T'$ .

EXEMPLE : Soit  $A, B \subset \mathbb{P}(V)$  des sous-variétés linéaires disjointes, telles que  $\dim A = \text{codim} B - 1$ . Si  $p \in \mathbb{P}(V) \setminus A$ , il existe une unique droite projective passant par  $p$  et coupant à la fois  $A$  et  $B$ , en des points  $f(p)$  et  $g(p)$ . On appelle  $f$  la projection sur  $A$  de centre  $B$  et  $g$  la projection sur  $B$  de centre  $A$ .

Si  $A$  est de dimension 0, on retrouve la prise de vue du cours sur la perspective. Si  $A$  est contenu dans l'hyperplan à l'infini, la projection sur  $B$  de centre  $A$  est affine, c'est la projection sur la partie à distance finie de  $B$ , parallèlement au sous-espace vectoriel dont la direction est  $A$ .

**Proposition 4.6.2** Deux applications linéaires définissent la même application projective si et seulement si elles sont proportionnelles.

**Corollaire 4.6.3** Le groupe  $\text{PGL}(V)$  des bijections projectives de  $\mathbb{P}(V)$  est isomorphe au quotient du groupe linéaire  $\text{GL}(V)$  par le sous-groupe  $\mathbb{K}^*$  des multiples de l'identité,  $\text{PGL}(V) \simeq \text{GL}(V)/\mathbb{K}^*$ .

Les bijections projectives sont caractérisées par l'image d'un repère.

**Proposition 4.6.4** Soit  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  un repère projectif de  $\mathbb{P}(V)$ . Soit  $q_0, \dots, q_{n+1}$   $n+2$  points de  $\mathbb{P}(V')$  qui forment un repère. Alors il existe une unique application projective  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$  envoyant les  $p_j$  sur les  $q_j$ .

DÉMONSTRATION : On considère les coordonnées homogènes associées à ces deux repères. Alors la bijection correspondante est donnée par l'application identité dans ces coordonnées : celle qui associe à un point, le point qui a les mêmes coordonnées homogènes.  $\square$

EXERCICE : Cas où  $n = 1$ . Une application projective non constante d'une droite projective est automatiquement définie partout, et c'est une bijection sur une droite de l'espace d'arrivée. Ce n'est pas le cas pour la vue en perspective d'une droite. Expliquer ce qui se passe.

**Définition 4.6.5** Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $E$  est transitive s'il n'y a qu'une orbite, i.e. pour tous  $x, x' \in E$ , il existe  $g \in G$  tel que  $gx = x'$ . Si, de plus, ce  $g$  est unique, on dit que l'action est simplement transitive.

**Corollaire 4.6.6** Le groupe projectif  $\text{PGL}(V)$  agit simplement transitivement sur les repères projectifs de  $\mathbb{P}(V)$ .

### 4.6.1 Le groupe des homographies

**Définition 4.6.7** On note  $\text{PGL}(n, \mathbb{K}) = \text{PGL}(\mathbb{K}^n)$ .

Lorsque  $n = 2$ ,  $\text{PGL}(2, \mathbb{K})$  agit sur la droite projective. Sur la droite affine  $p(\mathbb{K} \times \{1\}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , l'action est par homographies

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x \right) \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Le point  $x = -\frac{d}{c}$  est envoyé sur le point  $\infty = [1 : 0]$ . Celui-ci est envoyé sur  $\frac{a}{c}$  si  $c \neq 0$ , sur lui-même sinon.

Au paragraphe précédent, on a démontré le résultat suivant.

**Corollaire 4.6.8** Le groupe  $\text{PGL}(2, \mathbb{K}) = \text{PGL}(\mathbb{K}^2)$  agit simplement transitivement sur les triplets de points distincts de la droite projective  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ .

**Définition 4.6.9** Soit  $D$  une droite projective. Soit  $a, b, c, d$  quatre points de  $D$ , avec  $a, b, c$  distincts. On note  $[a, b, c, d]$  le point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ , image de  $d$  par l'unique bijection projective  $h : D \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  telle que

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Par définition, le birapport est invariant par bijection projective.

---

Fin du cours n<sup>o</sup>4

### 4.6.2 Sous-groupes du groupe projectif : les transformations affines

**Proposition 4.6.10** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine modelé sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Soit  $\hat{\mathcal{E}} = E \oplus \mathbb{K}$ , son complété vectoriel.

1. Soit  $A$  le sous-groupe de  $\text{PGL}(\hat{\mathcal{E}})$  qui laisse stable l'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}(E)$ . Alors  $A$  est isomorphe au groupe affine de  $E$ .
2. Soit  $H$  le sous-groupe qui fixe l'hyperplan à l'infini point par point. Alors  $H$  est isomorphe au groupe des homothéties-translations de  $E$ .

## 4.7 Dualité

**Proposition 4.7.1** L'ensemble des hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}(V)$  s'identifie à  $\mathbb{P}(V^*)$ . Une fois fixé un repère projectif de  $\mathbb{P}(V)$ , un hyperplan est donné par une équation linéaire en coordonnées homogènes. Les coefficients de cette équation constituent des coordonnées homogènes sur  $\mathbb{P}(V^*)$ .

EXERCICE : Soit  $\Delta$  une droite d'un plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ . Montrer que l'application  $\mathbb{P}(V^*) \rightarrow \Delta$ ,  $D \mapsto D \cap \Delta$  est projective.

**Définition 4.7.2** A une droite de  $\mathbb{P}(V^*)$  correspond une famille à un paramètre d'hyperplans de  $\mathbb{P}(V)$  appelée faisceau d'hyperplans.

**Proposition 4.7.3** Un faisceau, c'est l'ensemble des hyperplans qui contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 2.

### 4.7.1 Dualité dans le plan projectif

EXEMPLE : Un faisceau de droites dans le plan, c'est l'ensemble des droites passant par un point.

Moralité : en géométrie projective plane, points et droites s'échangent. Cet échange est donné par la correspondance suivante

*Un point  $P$  de  $\mathbb{P}(E) \rightarrow$  une droite vectorielle  $P$  de  $E \rightarrow$  un plan vectoriel  $P^\perp$  de  $E^* \rightarrow$  la droite  $\mathbb{P}(P^\perp)$  de  $\mathbb{P}(E^*)$ .*

*Une droite  $D$  de  $\mathbb{P}(E) \rightarrow$  un plan vectoriel  $Q$  de  $E$  tel que  $\mathbb{P}(Q) = D \rightarrow$  une droite vectorielle de  $Q^\perp$  de  $E^* \rightarrow$  un point  $Q^\perp$  de  $\mathbb{P}(E^*)$ .*

Dans cet échange, à l'intersection de deux droites projectives correspond la droite projective passant par les deux points duaux. Ainsi, dire que des droites sont concourantes revient à dire que leur duaux sont alignés.

A chaque énoncé concernant des droites correspond un énoncé dual concernant des droites.

**Définition 4.7.4** *Le birapport de quatre droites concourantes du plan est le birapport des quatres points duaux (qui sont alignés).*

**Proposition 4.7.5** *Le birapport de quatres droites concourantes est égal au birapport de leurs points d'intersection avec une cinquième droite  $D$  qui ne leur est pas concourante.*

DÉMONSTRATION : On note  $O_0$  le point de concourance des droites  $D_1, \dots, D_4$ ,  $D$  la cinquième droite et  $O_i$  l'intersection de  $D_i$  avec  $D$ . On choisit un point  $B$  tel que  $O_0, O_1, O_2, B$  soit un repère. Dans les coordonnées homogènes correspondantes on a  $O_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$ ,  $O_1 = [0 : 1 : 0 : 0]$ ,  $O_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$ ,  $O_3 = [0 : \alpha : 0 : 1]$  et  $O_4 = [0 : \beta : 0 : 1]$  d'où  $\beta/\alpha = [O_1, O_2, O_3, O_4]$ .

Soit  $(f_0, f_1, f_2)$  la base duale de  $(e_0, e_1, e_2)$ . Alors, le point dual de  $D_1$  est engendré par  $f_2$ , il est donc de coordonnées  $[0 : 0 : 1 : 0]$ . De même, les coordonnées des duaux de  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  sont  $[0 : 1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : -\alpha : 1 : 0]$  et  $[0 : -\beta : 1 : 0]$ . L'identification de  $\mathbb{P}^1(K)$  avec la droite duale de  $O$  donné par  $t \rightarrow [0 : t : 1 : 0]$  envoie  $D_1$  sur  $0$ ,  $D_2$  sur  $\infty$ ,  $D_3$  sur  $-\alpha$  et  $D_4$  sur  $-\beta$ . Le résultat suit  $\square$

Voici un point de vue plus abstrait sur ce résultat. On choisit une forme  $\Omega$  alternée de degré 3 non nulle sur  $V^*$ . Le produit extérieur  $w \wedge v$  de deux vecteurs de  $V^*$  est le vecteur de  $V$  défini par

$$\Omega(w, v, u) := \langle u, w \wedge v \rangle.$$

On vérifie alors que l'application  $(w, v) \rightarrow w \wedge v$  est bilinéaire et le vecteur  $w \wedge v$  engendre l'intersection des noyaux de  $w$  et  $v$  si ces deux formes ne sont pas colinéaires.

Nous avons alors

**Proposition 4.7.6** *Soit  $A$  un point de  $\mathbb{P}(V)$  et  $\Delta$  une droite ne passant pas par  $A$ . L'application de  $A^*$  – la droite duale du point  $A$  vue comme un droite de  $\mathbb{P}(V^*)$  – dans  $\Delta$  qui a la droite  $D$  associe l'intersection de  $D$  et  $\Delta$  est une application projective.*

DÉMONSTRATION : Soit en effet  $v$  un vecteur non nul de  $\Delta$  – vu comme une droite de l'espace vectoriel dual. L'application linéaire  $w \rightarrow w \wedge v$  définie de  $A^*$  – vu comme un plan de l'espace vectoriel dual dans  $\Delta$  – vu comme un plan de l'espace vectoriel, a comme application projective associée  $D \rightarrow D \cap \Delta$ . En particulier l'application  $D \mapsto D \cap \Delta$  provient d'une application linéaire, elle est donc projective.

Nous donnons maintenant une preuve plus calculatoire de ce résultat. On peut choisir des coordonnées homogènes sur le plan projectif tel que le point  $A$  soit de coordonnées  $[1 : 0 : 0]$  et la droite  $\Delta$  soit de coordonnées duale  $[1 : 0 : 0]$ . La droite duale  $A^*$  de  $A$  est donc l'ensemble des points dont les coordonnées duales sont

$$[0 : s : t].$$

Un point  $M$  de  $\Delta$  est de coordonnées homogènes  $[0 : s : t]$ . La droite passant par  $A$  et  $M$  est

$$\{[u : vs : vt] \mid (u, v) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0, 0\}\}.$$

Cette droite a donc pour coordonnées duales  $[0 : -t : s]$ . Autrement dit, en coordonnées, l'application de  $\Delta$  dans  $A^*$  est donnée par  $[s : t] \mapsto [-t : s]$ , c'est en particulier une homographie.  $\square$

Une bijection projective préservant le birapport, nous retrouvons comme corollaire la proposition précédente.

EXERCICE : Montrez que l'énoncé précédent entraîne la généralisation suivante du théorème de Thalès. Si  $A, B$  et  $C$ , respectivement  $A', B'$  et  $C'$  sont trois points d'une droite  $D$ , respectivement  $D'$ , alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

si et seulement si les droites  $AA', BB'$  et  $CC'$  sont concourantes ou alignées.

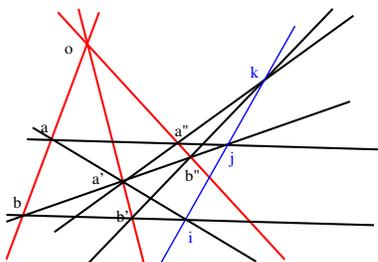
On utilisera le fait que si on a trois points  $a, b$  et  $c$  d'une droite affine le nombre  $\lambda$  tel que  $a - b = \lambda(a - c)$  s'interprète comme le birapport des quatre points  $a, b, c$  et  $\infty$  dans le complété projectif de cette droite affine.

# Chapitre 5

## Les grands théorèmes

### 5.1 Le théorème de Desargues

**Théorème 7** [G. DESARGUES (1639)]. *Dans un espace projectif, soit  $D, D', D''$  trois droites distinctes et concourantes en  $o$ . On choisit sur chacune deux points distincts  $a$  et  $b$  (resp.  $a'$  et  $b'$ , resp.  $a''$  et  $b''$ ) et distincts de  $o$ . Alors les points  $i = aa' \cap bb'$ ,  $j = aa'' \cap bb''$  et  $k = a'a'' \cap b'b''$  sont alignés.*



REMARQUES :

1. Les hypothèses garantissent que les droites  $aa'$  et  $bb'$  sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.
2. Tout se passe dans la sous-variété linéaire engendrée par les droites  $D, D'$  et  $D''$ , qui est de dimension au plus égale à 3. Il s'agit donc d'un résultat de géométrie dans l'espace (de dimension 3) ou dans le plan. Paradoxalement, la preuve est plus facile dans l'espace que dans le plan.

DÉMONSTRATION : Voici une première démonstration utilisant le fait que  $\mathbb{K}$  est commutatif. On suppose que  $i, j, k$  ne sont pas alignés. On considère un hyperplan contenant  $i$  et  $j$  mais pas  $k$  que l'on envoie à l'infini. Une double application du Théorème de Thalès montre alors que  $bb''$  et  $aa''$  sont parallèles et la contradiction.

Voici une autre preuve

#### 1. Cas où les droites $D, D'$ et $D''$ engendrent une sous-variété linéaire de dimension 3.

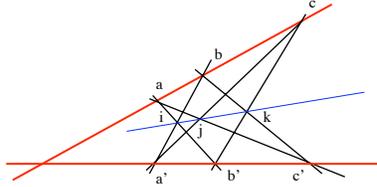
Dans ce cas, les points  $a, a'$  et  $a''$  sont projectivement indépendants et engendrent un plan  $\Pi$ . De même,  $b, b'$  et  $b''$  engendrent un plan  $\Pi'$ . Ces plans sont distincts. Leur intersection est une droite, qui contient nécessairement les trois points  $i, j$  et  $k$ .

#### 2. Cas où les droites $D, D'$ et $D''$ engendrent une sous-variété linéaire de dimension 2.

On plonge cette sous-variété  $P$  dans un espace projectif de dimension 3. On remplace  $D''$  par une droite  $\Delta''$  passant par  $o$  mais non contenue dans  $P$ . On applique le théorème de Desargues à  $D$ ,  $D'$  et  $\Delta''$ , cela donne trois points  $i$ ,  $j''$  et  $k''$  alignés sur une droite  $\Delta'$ . On choisit un centre de projection  $c$  dans le plan engendré par  $D''$  et  $\Delta''$ , mais hors des droites  $\Delta'$ ,  $D''$  et  $\Delta''$ . La projection de centre  $c$  sur le plan  $P$  envoie  $j''$  et  $k''$  sur  $j$  et  $k$ , donc les points  $i$ ,  $j$  et  $k$  sont alignés le long de la projection de  $\Delta'$ .  $\square$

## 5.2 Le théorème de Pappus

**Théorème 8** [PAPPUS (4E SIÈCLE DE NOTRE ÈRE)]. *Dans un plan projectif, soit  $D$  et  $D'$  deux droites distinctes et concourantes en  $o$ . On choisit sur chacune trois points distincts  $a$ ,  $b$  et  $c$  (resp.  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$ ) et distincts de  $o$ . Alors les points  $i = ab' \cap ba'$ ,  $j = ac' \cap ca'$  et  $k = bc' \cap cb'$  sont alignés.*



REMARQUES : Les hypothèses garantissent que les droites  $ab'$  et  $ba'$  sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.

DÉMONSTRATION :

Une première preuve consiste à envoyer la droite passant par  $i$  et  $j$  à l'infini et se ramener ainsi au Théorème de Thalès. La preuve qui suit utilise des coordonnées homogènes.

**1. Cas où les points  $i$ ,  $c$  et  $c'$  ne sont pas alignés.**

Dans ce cas,  $c$ ,  $c'$ ,  $i$  et  $o$  forment un repère projectif. Soit  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) la pente de la droite  $ab'$  (resp.  $ba'$ ). Alors

$$c = [1 : 0 : 0], \quad c' = [0 : 1 : 0], \quad i = [0 : 0 : 1], \quad o = [1 : 1 : 1].$$

En coordonnées affines,

$$a = (\alpha^{-1}, 1), \quad b = (\beta^{-1}, 1), \quad a' = (1, \beta), \quad b' = (1, \alpha).$$

Enfin

$$j = ac' \cap ca' = (\alpha, \beta^{-1}), \quad k = bc' \cap cb' = (\beta, \alpha^{-1}).$$

Si le corps de base est commutatif,

$$\beta\alpha^{-1}j = (\beta, \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = (\beta, \alpha^{-1}) = k,$$

donc les points  $i$ ,  $j$  et  $k$  sont sur la droite d'équation  $x_0 - \alpha\beta x_1 = 0$ .

**2. Cas où les points  $i$ ,  $c$  et  $c'$  sont alignés.**

Choisissons un repère projectif commençant par  $c = [1 : 0 : 0]$ ,  $c' = [0 : 1 : 0]$  et  $o = [0 : 0 : 1]$ . La droite  $oc$  (resp.  $oc'$ ) a pour équation  $y = 0$  (resp.  $x = 0$ ), donc  $a = [\alpha : 0 : 1]$ ,  $b = [\beta : 0 : 1]$ ,  $a' = [0 : \alpha' : 1]$ ,  $b' = [0 : \beta' : 1]$ .  $i \in cc'$  est sur la droite à l'infini, donc, comme droites affines,  $ab'$  et  $ba'$  sont parallèles. Par conséquent,  $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ . Alors

$$i = [\alpha : -\beta' : 0], \quad j = [\alpha : \alpha' : 1], \quad k = [\beta : \beta' : 1]$$

sont sur la droite d'équation  $\beta'x + \alpha y - \beta'(\alpha + \beta)z = 0$ .  $\square$

REMARQUES : Le deuxième cas ne se produit pas lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , mais se produit lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### 5.3 Le théorème fondamental de la géométrie projective

**Question.** Les bijections projectives sont-elles les seules bijections entre espaces projectifs qui préservent l'alignement des points? Pas exactement.

EXEMPLE : La conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$  induit une bijection de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  qui préserve l'alignement.

En effet, elle se relève en une bijection antilinéaire de  $\mathbb{C}^{n+1}$  qui préserve les sous-espaces vectoriels complexes.

**Théorème 9** Soit  $\mathbb{K}$  un corps, soit  $n \geq 2$ . Soit  $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  une bijection qui envoie les triplets de points alignés sur des triplets de points alignés. Alors il existe un unique automorphisme  $\sigma$  du corps  $\mathbb{K}$  tel que  $f$  se relève en une bijection  $\sigma$ -antilinéaire de  $\mathbb{K}^{n+1}$ , i.e. un automorphisme  $F$  du groupe additif tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$F(\lambda v) = \sigma(\lambda)F(v).$$

#### 5.3.1 Géométrie d'incidence

**Définition 5.3.1** Une géométrie d'incidence, c'est la donnée d'un ensemble  $\mathbb{P}$  muni d'une famille non vide de parties non vides appelées droites, sujette aux axiomes suivants.

1. Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
2. Deux droites distinctes ont un point commun et un seul.
3.  $\mathbb{P}$  n'est pas la réunion de deux droites.

**Question.** Les plans projectifs sont-ils les seules géométries d'incidence? Pas exactement.

**Théorème 10** Soit  $\mathbb{P}$  une géométrie d'incidence satisfaisant au théorème de Desargues. Alors il existe un corps  $\mathbb{K}$  tel que  $\mathbb{P}$  soit isomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ .

REMARQUES :

1. Le corps  $\mathbb{K}$  n'est pas nécessairement commutatif. Il l'est si et seulement si le théorème de Pappus est vrai dans  $\mathbb{P}$ .
2. Il existe des géométries d'incidences non *arguésiennes*, i.e. qui ne satisfont pas au théorème de Desargues. Par exemple, le plan projectif associé à l'algèbre (non associative) des octonions ou octaves de Cayley.

# Chapitre 6

## Coniques et quadriques

Dans toute cette section, le corps de base est  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nous donnerons en exercice les résultats correspondants pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 6.1 Coniques et quadriques

**Définition 6.1.1** Une quadrique de  $\mathbb{P}(V)$ , c'est la projection du lieu des zéros d'une forme quadratique de  $V$ . En dimension 2, on parle de conique.

Cette définition peut-être donnée sur tous les corps. Dans le cas du corps des complexes qui est celui de ce chapitre, nous avons

**Proposition 6.1.2** Deux formes quadratiques définissent la même quadrique si et seulement si elles sont proportionnelles.

DÉMONSTRATION : On se donne une première forme quadratique  $q$ . Il existe une base de  $V$  telle que cette forme quadratique s'exprime dans cette base sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i^2.$$

On se donne une deuxième forme quadratique

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=p} b_{i,j} x_i x_j.$$

On suppose que les deux quadriques associées sont identiques. On obtient le résultat en raisonnant pour  $n = 2$ , puis en raisonnant sur les plans de coordonnées.  $\square$

**Définition 6.1.3** Le rang d'une quadrique est celui d'une forme quadratique qui la définit. Une quadrique de rang maximal est non dégénérée.

EXERCICE :

1. En dimension 1, une quadrique dégénérée, c'est un point, une quadrique non dégénérée deux points.
2. En dimension 2, une conique dégénérée est
  - ou bien la réunion de deux droites (rang 2),
  - ou bien une droite de multiplicité 2 (rang 1).

3. La proposition précédente est-elle vraie si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ? Montrez cependant que si une quadrique est non vide et associée à une forme quadratique non dégénérée  $q$  alors toute autre forme quadratique qui définit cette quadrique est proportionnelle à  $q$ . On peut donc aussi parler de quadrique non dégénérée si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Proposition 6.1.4** *Le groupe  $\text{PGL}(V)$  agit transitivement sur l'ensemble des quadriques non dégénérées de  $\mathbb{P}(V)$ .*

## 6.2 Plan tangent

**Définition 6.2.1** *Soit  $\mathcal{Q}$  une quadrique non dégénérée. L'hyperplan projectif tangent en  $p$  à  $\mathcal{Q}$  est  $T_p\mathcal{Q} = \mathbb{P}(p^\perp)$ , où  $p^\perp$  est l'orthogonal de  $p$  pour la forme quadratique définissant  $\mathcal{Q}$ .*

Cette définition s'étend aussi naturellement pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Proposition 6.2.2** *Soit  $\mathcal{Q}$  une quadrique non dégénérée définie par  $q$ . L'équation homogène de son hyperplan tangent en  $p$  s'écrit*

$$\frac{\partial q}{\partial x_0}(p_0, \dots, p_n)X_0 + \dots + \frac{\partial q}{\partial x_n}(p_0, \dots, p_n)X_n = 0.$$

Autrement dit, les coordonnées homogènes du plan tangent  $T_p\mathcal{Q} \in \mathbb{P}(V^*)$  sont les dérivées partielles de  $q$  en un  $v \in p \subset V$ .

DÉMONSTRATION : Fixons une base de  $V$ . Soit  $Q$  la matrice de  $q$ , soit  $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$  la colonne des

composantes d'un vecteur directeur  $p$  de la droite  $p$ . Soit  $v \in V$ , de composantes  $X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ . Alors

$q(v) = X^\top QX$ ,  $q(p, v) = p^\top QX$ . L'hyperplan tangent est le projectivisé de  $p^\perp$ , dont l'équation est  $p^\top QX = 0$ . Or  $d_p q = 2p^\top QdX$ .  $\square$

On verra plus tard que cette notion coïncide avec la notion usuelle de tangence.

**Proposition 6.2.3** *Soit  $\mathcal{Q}$  une quadrique non dégénérée, alors*

$$\text{rang}(\mathcal{Q} \cap T_p\mathcal{Q}) = \text{rang}\mathcal{Q} - 2.$$

*Réciproquement, un hyperplan  $D$  est tangent à  $\mathcal{C}$  si et seulement si la quadrique  $\mathcal{C} \cap D$  de  $D$  est dégénérée.*

DÉMONSTRATION : Comme  $q$  est non dégénérée si  $H$  est un hyperplan,  $\ker(q|_H) = (H^\perp) \cap H$ . Le résultat suit aisément de la manière suivante

Si  $H = p^\perp$  avec  $p \in \mathcal{Q}$ , alors  $p \subset H$  et donc  $\ker(q|_H) = p$ . Ainsi  $\dim \ker(q|_H) = 1$ .

Enfin si  $\ker(q|_H)$  est non trivial on a donc  $\ker(q|_H) = H^\perp$  et donc  $p = H^\perp \cap H \in \mathcal{C}$  et  $H = T_p\mathcal{C}$ .

$\square$

**Corollaire 6.2.4** *1. En dimension 2, une droite coupe une conique  $\mathcal{C}$  non dégénérée en 2 points, sauf si elle lui est tangente.*

*2. En dimension 3, par tout point d'une quadrique non dégénérée  $\mathcal{Q}$  passent 2 droites contenues dans  $\mathcal{Q}$ .*

EXEMPLE : Considérons la conique affine  $C$  d'équation  $2x^2 + xy - y^2 + 2x + y - 1$ . Ce sont les points à distance finie – c'est à dire dans une carte affine – de la conique projective  $\mathcal{C}$  d'équation homogène  $2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_0x_1 + x_1x_2 + 2x_2x_0 = 0$ . Sa tangente en  $p = [x_0 : x_1 : x_2]$  est la droite d'équation homogène  $(4x_0 + x_1 + 2x_2)X_0 + (x_0 - 2x_1 + x_2)X_1 + (2x_0 + x_1 - 2x_2)X_2 = 0$ . Si  $p = [1 : -1 : 1]$ , cela donne  $5X_0 + 4X_1 - X_2 = 0$ . Ses points à distance finie forment la droite affine d'équation  $5x + 4y = 1$ , qui est bien la tangente à  $C$  en  $p = (1, -1)$ .

### 6.3 Polarité

**Définition 6.3.1** Fixons une quadrique non dégénérée  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$ . A tout point  $p \in \mathbb{P}(V)$  correspond son hyperplan polaire  $p^0$ , projectivisé de l'hyperplan vectoriel  $p^\perp \subset V$  orthogonal de  $p$  pour  $q$ . De même, à tout hyperplan correspond un point polaire.

**Proposition 6.3.2** L'application qui à un point associe son hyperplan polaire est une application projective.

DÉMONSTRATION : En effet, c'est l'image de  $\mathcal{Q}$  par la bijection projective  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$  induite par la différentielle de  $q$ , qui est un isomorphisme  $V \rightarrow V^*$ .  $\square$

**Proposition 6.3.3** Fixons une conique non dégénérée  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$ . Soit  $p$  un point de  $\mathbb{P}(V)$ .

- Si  $p \in \mathcal{Q}$ ,  $p^0$  est la tangente à  $\mathcal{Q}$  en  $p$ .
- Si  $p \notin \mathcal{Q}$ ,  $p^0$  coupe  $\mathcal{Q}$  en deux points  $q_1$  et  $q_2$  tels que les droites passant par  $q_i$  sont les deux tangentes à  $\mathcal{Q}$  passant par  $p$ .

DÉMONSTRATION : Le cas où  $p \in \mathcal{Q}$  résulte de la définition de la droite tangente.

Si  $p \notin \mathcal{Q}$ ,  $V = \mathbb{C}p \oplus p^\perp$  est une somme orthogonale, la restriction de  $q$  à  $p^\perp$  est non dégénérée, donc la polaire  $p^0 = \mathbb{P}(p^\perp)$  coupe  $\mathcal{Q}$  en deux points distincts  $u$  et  $v$ . Comme  $u \subset p^\perp$  et  $u$  est isotrope,  $u$  est dans le noyau de la restriction de  $q$  au plan  $P$  engendré par  $p$  et  $u$ . Celle-ci est dégénérée, donc  $pu$  est tangente à  $\mathcal{Q}$ .

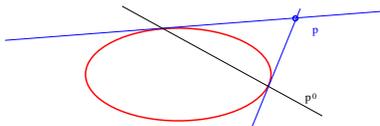
Réciproquement, si  $w \in \mathcal{Q}$  et si la droite projective  $pw$  est tangente à  $\mathcal{Q}$  alors les droites vectorielles  $p$  et  $w$  sont orthogonales et donc  $w$  appartient à la polaire de  $p$ .

$\square$

**Corollaire 6.3.4** L'ensemble des hyperplans tangents à une quadrique est une quadrique appelée quadrique duale.

EXERCICE : Donnez l'équation en coordonnées homogènes de la conique duale à la conique

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$



### 6.4 Groupes et coniques

**Lemme 6.4.1** Soit  $p, q$  et  $v$  trois points d'une conique non dégénérée  $\mathcal{Q}$ . Soit  $m = T_p\mathcal{Q} \cap T_q\mathcal{Q}$ . Soit  $v$  un autre point de  $\mathcal{Q}$ . On considère le repère projectif  $(p, q, m, v)$  alors dans les coordonnées homogènes correspondantes, l'équation de la quadrique est

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}$$

DÉMONSTRATION : Par définition,  $p = [1 : 0 : 0]$ ,  $q = [0 : 1 : 0]$ ,  $m = [0 : 0 : 1]$  et  $v = [1 : 1 : 1]$ . De même,  $T_p\mathcal{Q} = [0 : 1 : 0]$  et  $T_q\mathcal{Q} = [1 : 0 : 0]$ . La quadrique est d'équation

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid ax^2 + by^2 + cz^2 + uxy + vxz + wzy = 0\}.$$

Donc  $T_{[x:y:z]}\mathcal{Q} = [2ax + uy + vz : 2by + ux + wz : 2cz + vx + wy]$ . Nous obtenons donc les équations

$$\begin{aligned} a = v &= 0, \\ b = w &= 0, \\ c + w &= 0. \end{aligned}$$

□

Si  $\mathcal{Q}$  est une quadrique non dégénérée notons  $\text{PO}(\mathcal{Q})$  le sous-groupe de  $\text{PGL}(V)$  qui laisse stable la quadrique  $\mathcal{Q}$ .  $\text{PO}(\mathcal{Q}) = \{f \in \text{PGL}(V) \mid f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}\}$ .

**Corollaire 6.4.2** *Le groupe  $\text{PO}(\mathcal{Q})$  agit transitivement sur les triplets de points distincts d'une conique.*

## 6.5 Paramétrisation unicusale des coniques

Rappelons que l'ensemble des hyperplans projectifs passant par un point  $p$  s'appelle un *faisceau d'hyperplans* et s'identifie par dualité au dual du point  $p$ .

**Définition 6.5.1** *Soit  $\mathcal{Q}$  une conique non dégénérée. Soit  $p \in \mathcal{Q}$ . Soit  $\mathcal{F}$  le faisceau des droites passant par  $p$ . On appelle paramétrisation unicusale de  $\mathcal{C}$ , l'application  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ ,*

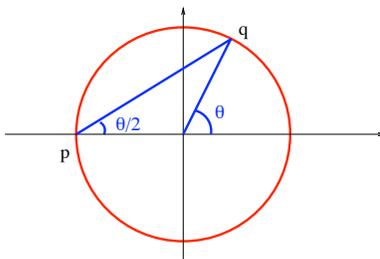
$$\begin{cases} D & \mapsto q, \text{ où } D \cap \mathcal{C} = \{p, q\} \text{ si } D \neq T_p\mathcal{Q}, \\ T_p\mathcal{Q} & \mapsto p. \end{cases} \quad (6.1)$$

**Proposition 6.5.2** *Toute paramétrisation unicusale est une bijection rationnelle, c'est-à-dire donnée en coordonnées homogènes par des fractions rationnelles qui ne s'annulent pas simultanément.*

EXEMPLE : Soit  $C$  le cercle unité d'équation affine  $x^2 + y^2 = 1$  et  $p = (-1, 0)$ . Une droite passant par  $p$  est représentée par la pente  $t$ . La paramétrisation obtenue est donnée en coordonnées affines par  $t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ , ou bien, en coordonnées homogènes, par

$$[t_0 : t_1] \mapsto [2t_0t_1 : t_1^2 - t_0^2 : t_1^2 + t_0^2].$$

Dans la formule affine, on reconnaît l'expression de  $\sin(\theta)$  et  $\cos(\theta)$  en fonction de  $\tan(\theta/2)$ .



DÉMONSTRATION : Nous choisissons des coordonnées homogènes telles que  $p = [1 : 0 : 0]$  et

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$

Alors,  $T_p\mathcal{Q}$  est en coordonnées homogènes du dual défini par  $[0 : 1 : 0]$ . Le faisceau de droites  $\mathcal{F}$  passant par  $p$  est l'ensemble des droites dont les coordonnées sont  $[0 : a : b]$ . Nous obtenons une paramétrisation de ce faisceau donné par  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $a \mapsto [0 : a : 1]$ . Les points de cette droite différents de  $p$  sont les points de coordonnées  $[x : -1 : a]$ . Si  $a \neq 0$ , nous cherchons un point de cette droite différent de  $p$ , appartenant à  $\mathcal{Q}$ , c'est-à-dire un complexe  $x$  tel que

$$x + a^2 = 0,$$

La paramétrisation unicursale est donc donnée dans ces coordonnées par

$$a \mapsto [-a^2 : -1 : a].$$

Elle s'étend en coordonnées homogènes par

$$[0 : a : b] \mapsto [-a^2 : -b^2 : ab],$$

qui envoie  $T_p\mathcal{Q}$  sur  $p$ .  $\square$

**Proposition 6.5.3** *Deux paramétrisations unicursales d'une même conique non dégénérée diffèrent par une homographie de la droite projective. Par conséquent, on peut parler du birapport de 4 points d'une conique, ainsi que du birapport de 4 tangentes.*

DÉMONSTRATION : On choisit des coordonnées homogènes dans lesquels  $p = [1 : 0 : 0]$ ,  $q = [0 : 1 : 0]$  et

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\}.$$

D'après ce qui précède la première paramétrisation est donné par

$$f : [0 : a : b] \mapsto [-a^2 : -b^2 : ab],$$

la deuxième par

$$f : [c : 0 : d] \mapsto [-d^2 : -c^2 : cd].$$

L'homographie

$$h : [0 : a : b] \mapsto [b : 0 : a],$$

est telle que  $g \circ h = f$ .

On peut aussi montrer qu'une bijection rationnelle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est automatiquement une homographie. On donnera au paragraphe suivant une troisième preuve (encore plus abstraite) de ce fait.  $\square$

**Corollaire 6.5.4** *Soit  $\mathcal{C}$  une conique  $a, b, c, d$ , quatre points de cette conique. Soit  $p$  et  $q$  deux autres points de cette conique distincts des précédents alors*

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

EXERCICE : Soit  $a, b, c$  et  $d$  4 points d'une conique non dégénérée  $\mathcal{C}$ . Montrer que le birapport des tangentes est égal à celui des points,

$$[T_a\mathcal{C}, T_b\mathcal{C}, T_c\mathcal{C}, T_d\mathcal{C}] = [a, b, c, d].$$

*Indication* : Considérez la conique

$$\mathcal{Q} = \{[x : y : z] \mid xy - z^2 = 0\},$$

calculez les coordonnées homogènes du plan tangent en tout point, donnez l'équation de sa conique duale et comparez les paramétrisations unicursales.

REMARQUES : Lien avec les formules trigo. Lien avec les triangles rectangles à côtés entiers.

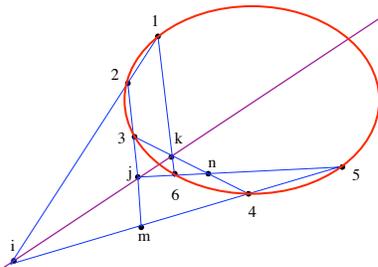
## 6.6 L'hexagramme mystique de Pascal

On rappelle que cinq points du plan projectif sont en position générale si trois d'entre eux ne sont jamais alignés.

**Lemme 6.6.1** *Par 5 points en position générale passe une et une seule conique non dégénérée.*

Pour six points, la réponse est donnée par le théorème de Pascal

**Théorème 11** [B. PASCAL (1640)]. *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique non dégénérée se coupent suivant des points alignés. Autrement dit, si  $1, 2, \dots, 5, 6$  sont des points distincts sur la conique, alors les points  $i = 12 \cap 45$ ,  $j = 23 \cap 56$  et  $k = 34 \cap 61$  sont alignés. Réciproquement, tout hexagone dont les côtés opposés se coupent en des points alignés est inscrit dans une conique non dégénérée.*



Nous verrons comme corollaire un réciproque du corollaire 6.5.4

**Corollaire 6.6.2** *Soit  $a, b, c, d, p$  cinq points distincts en position générale alors la conique passant par ces cinq points est l'ensemble des points  $q$  tels que*

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

On aura besoin du lemme suivant :

**Lemme 6.6.3** *Soient, sur deux droites distinctes  $D$  et  $D'$ , sécantes en  $a$ , des points distincts  $b, c$  et  $d$  (resp.  $b', c'$  et  $d'$ ), supposés tous distincts de  $a$ . Alors les droites  $bb', cc'$  et  $dd'$  sont concourantes si et seulement si  $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$ .*

DÉMONSTRATION : Si les droites  $bb', cc'$  et  $dd'$  sont concourantes en  $z$ , la projection de centre  $z$  de  $D$  sur  $D'$  est une bijection projective, donc elle préserve le birapport. Réciproquement, soit  $z = bb' \cap cc'$ , soit  $d'' = D' \cap dz$ . Alors  $[a, b, c, d] = [a, b', c', d'']$ . Si on suppose que  $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$ , alors  $[a', b', c', d''] = [a, b', c', d']$ , ce qui entraîne que  $d'' = d'$ . Autrement dit,  $bb', cc'$  et  $dd'$  sont concourantes.  $\square$

DÉMONSTRATION :

Nous allons maintenant démontrer le lemme suivant

**Lemme 6.6.4** *Reprenons les notations du théorème,*

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

*si et seulement si  $I, J, K$  sont alignés.*

DÉMONSTRATION : Soit  $m = 23 \cap 45$  et  $n = 34 \cap 56$ . Alors

$$\begin{aligned} [i, m, 4, 5] &= [21, 23, 24, 25] \\ [61, 63, 64, 65] &= [k, 3, 4, n]. \end{aligned}$$

Dès lors

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

si et seulement si

$$[i, m, 4, 5] = [k, 3, 4, n].$$

D'après le lemme cette dernière égalité est vraie si et seulement si les droites  $ik$ ,  $m3 = 23$  et  $5n = 56$  sont concourantes. Autrement dit, si et seulement si le point  $j = 23 \cap 56$  appartient à la droite  $ik$ .  $\square$

### Démonstration du théorème de Pascal

Si les points sont sur une conique, d'après le corollaire 6.5.4, nous avons l'égalité

$$[21, 23, 24, 25] = [61, 63, 64, 65],$$

et donc d'après le lemme précédent les points  $I, J, K$  sont alignés.

Réciproquement, soit  $1, 2, \dots, 5, 6$  des points du plan projectif en position générale, tels que les points  $i = 12 \cap 45$ ,  $j = 23 \cap 56$  et  $k = 34 \cap 61$  sont sur une même droite  $D$ . Soit  $\mathcal{C}$  l'unique conique non dégénérée passant par  $1, 2, \dots, 5$ . La droite  $56$  coupe  $\mathcal{C}$  en un second point noté  $7$ . Comme l'hexagone  $1, 2, \dots, 5, 7$  est inscrit dans  $\mathcal{C}$ , les points  $i, j$  et  $k' = 34 \cap 71$  sont alignés, donc  $k' \in D$ ,  $k' = D \cap 56 = k$ , et enfin  $6 = 1k \cap 56 = 1k' \cap 56 = 7$  est sur  $\mathcal{C}$ .  $\square$

### Démonstration du corollaire

Si

$$[pa, pb, pc, pd] := [qa, qb, qc, qd].$$

alors, d'après le lemme, les côtés opposés s'intersectent en des points alignés. Le théorème de Pascal nous assure alors que les six points sont sur une conique.  $\square$

EXERCICES :

1. Quel est l'énoncé dual du théorème de Pascal ?
2. Que devient le théorème de Pascal quand la conique dégénère vers une paire de droites distinctes ?

## 6.7 Le groupe projectif orthogonal

**Définition 6.7.1** *On note  $\text{PO}(3, \mathbb{C})$  le sous-groupe de  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$  qui laisse stable la conique non dégénérée d'équation homogène  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ .*

Pour en savoir plus sur ce groupe, on va étudier une conique naturelle, c'est l'ensemble des quadriques dégénérées de la droite projective.

REMARQUES : Soit  $\mathbb{P}(V)$  une droite projective. L'espace des quadriques de  $\mathbb{P}(V)$  est un plan projectif  $\mathbb{P}(S^2V^*)$ , et les quadriques dégénérées forment une conique non dégénérée  $\mathcal{QD} \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ .

En effet, l'espace  $S^2V^*$  des formes bilinéaires symétriques sur  $V$  est de dimension 2, le déterminant d'une matrice symétrique  $2 \times 2$  est une forme quadratique non dégénérée. A une constante près, elle est invariante par chaque élément du groupe linéaire de  $V$ .

**Corollaire 6.7.2** *Le stabilisateur d'une conique non dégénérée  $\mathcal{C}$  agit transitivement sur le complémentaire de  $\mathcal{C}$  ainsi que sur l'ensemble des droites non tangentes à  $\mathcal{C}$ .*

DÉMONSTRATION : Pour la conique naturelle  $\mathcal{QD}$ , le complémentaire est l'ensemble des quadriques non dégénérées, sur lequel l'image du groupe  $\text{PGL}(V)$  dans  $\text{PGL}(S^2V^*)$  agit déjà transitivement.  $\square$

REMARQUES : Dans une droite projective  $\mathbb{P}(V)$ , une quadrique dégénérée, c'est un point de  $\mathbb{P}(V)$ . La bijection obtenue  $b : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathcal{QD}$  préserve le birapport.

En fait,  $b$  est une paramétrisation unicursale de  $\mathcal{QD}$ . Fixons un point  $o \in \mathbb{P}(V)$ , ainsi qu'un vecteur directeur  $z \in o$ . Etant donné  $v \in V$ , la forme linéaire sur  $S^2V^*$  définie par  $q \mapsto q(z, v)$  dépend linéairement de  $q$ . Cela donne une application linéaire injective  $V \rightarrow (S^2V^*)^*$ , donc une application projective  $\iota : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}((S^2V^*)^*)$ . Cette application est une paramétrisation projective du faisceau  $\mathcal{F}$  des droites de l'espace des quadriques qui passent par le point  $b(o)$ . En effet,  $b(o)$  est représenté par les formes quadratiques  $q$  dont le noyau est  $o$ , ces formes satisfont  $q(z, v) = 0$  pour tout  $v$ . Pour la même raison, la droite  $\iota(p)$  coupe  $\mathcal{QD}$  en  $b(p)$ .

Calculatoirement, une quadrique affine de la droite, c'est le lieu des zéros d'un trinôme  $x \mapsto x^2 + 2bx + c$ . A chaque point  $a$  de la droite affine correspond la quadrique dégénérée  $b(a) : x \mapsto (x - a)^2$ . La droite  $b(0)b(a)$  (dans l'espace affine des quadriques affines), est paramétrée par  $t \mapsto (1 - t)b(0) + tb(a) = x \mapsto x^2 - 2tax + ta^2$ , autrement dit,  $b = -ta$ ,  $c = ta^2$ . Elle est donnée par l'équation affine  $c = -ab$ , autrement dit, sa pente est  $-a$ , c'est bien une fonction homographique de  $a$ .

**Corollaire 6.7.3** *Toute bijection d'une conique non dégénérée qui préserve le birapport s'étend de façon unique en une bijection projective du plan projectif.*

DÉMONSTRATION : Pour la conique naturelle  $\mathcal{QD}$ , une bijection projective est réalisée par un élément de  $\text{PGL}(V)$ , qui agit déjà sur  $\mathbb{P}(S^2V^*)$ . L'unicité vient du fait que 4 points distincts d'une conique forment un repère projectif.  $\square$

REMARQUES : Soit  $\text{PO}(\mathcal{QD})$  le sous-groupe du groupe projectif  $\text{PGL}(S^2V^*)$  qui laisse stable la quadrique  $\mathcal{QD}$ . Alors  $\text{PO}(\mathcal{QD})$  est isomorphe à  $\text{PGL}(V)$ .

**Corollaire 6.7.4** *Les groupes  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  et  $\text{PO}(3, \mathbb{C})$  sont isomorphes.*

REMARQUES : Que se passe-t'il si on remplace  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$  ?

## 6.8 Division harmonique

**Définition 6.8.1** On appelle involution une homographie  $h$  d'une droite projective telle que  $h \circ h = id$  mais  $h \neq id$ .

EXEMPLE : Une quadrique non dégénérée d'une droite projective, c'est une paire de points distincts  $\mathcal{Q} = \{a, b\}$ . La polarité  $p \mapsto p^0$  par rapport à  $\mathcal{Q}$  est une involution. Elle fixe  $a$  et  $b$ .

**Proposition 6.8.2** Toute involution de la droite projective fixe deux points distincts  $a$  et  $b$ , et coïncide avec la polarité par rapport à la quadrique  $\mathcal{Q} = \{a, b\}$ .

DÉMONSTRATION : Soit  $i$  une involution de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Alors  $i$  se relève en un endomorphisme  $I$  de  $\mathbb{C}^2$  tel que  $I^2$  est un multiple de l'identité. Par conséquent,  $I$  est diagonalisable. Comme  $I$  n'est pas un multiple de l'identité, ses valeurs propres sont distinctes, donc  $i$  fixe deux points distincts  $a$  et  $b$ . Comme  $i(i(p)) = p$ ,  $[a, b, p, i(p)] = [a, b, i(p), p]$ , donc  $[a, b, p, i(p)]^2 = 1$ .

1. Ou bien  $[u, v, p, i(p)] = 1$ , i.e.  $i(p) = p$ . Alors  $i$  est l'identité, contradiction.
2. Ou bien  $[a, b, p, i(p)] = -1$ , ce qui détermine  $i$  uniquement.  $\square$

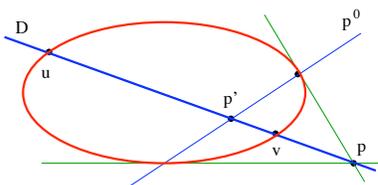
Cette preuve suggère la définition suivante.

**Définition 6.8.3** On dit que 4 points  $a, b, c$  et  $d$  d'une droite projective forment une division harmonique si  $[a, b, c, d] = -1$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $c$  et  $d$  sont conjugués harmoniques par rapport à la paire  $\{a, b\}$ .

REMARQUES :

1. Si  $(a, b, c, d)$  forment une division harmonique d'une droite projective, il en est de même de  $(a, b, d, c)$ ,  $(b, a, c, d)$  et  $(c, d, a, b)$ .
2. 4 points  $(a, b, c, d)$  d'une droite projective forment une division harmonique si et seulement si  $d$  est le polaire de  $c$  par rapport à la quadrique  $\mathcal{Q} = \{a, b\}$ .
3. Dans la projectivisée d'une droite affine, le conjugué harmonique du point à l'infini par rapport à la paire  $\{a, b\}$  est le milieu de  $\{a, b\}$ .

EXEMPLE : Soit  $\mathcal{C}$  une conique non dégénérée du plan. Soit  $D$  une droite qui coupe  $\mathcal{C}$  en deux points distincts  $u$  et  $v$ . Pour tout  $p \in D$ , le conjugué harmonique  $p'$  de  $p$  par rapport à  $\{u, v\}$  le long de  $D$  est  $D \cap p^0$ .



EXERCICE : Soit  $\mathcal{C}$  une conique non dégénérée du plan. Soit  $u$  et  $v$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$ , soit  $w$  le point polaire de la droite  $uv$ .

1. Pour tout  $p \in \mathcal{C}$ ,  $t = pw \cap \mathcal{C}$  est conjugué harmonique de  $p$  par rapport à  $\{u, v\}$  le long de  $\mathcal{C}$ .
2. Soit  $p, p' \in \mathcal{C}$ ,  $t, t'$  leurs conjugués harmoniques par rapport à  $\{u, v\}$  le long de  $\mathcal{C}$ . Alors les droites  $tp'$  et  $t'p$  se coupent en un point de la droite  $uw$ .



# Chapitre 7

## Topologie de l'espace projectif

Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on souhaite raisonner par continuité, comme le faisait déjà Euclide. Même lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la topologie de l'espace projectif est utile. Comme il s'agit d'espaces quotients, la notion de topologie abstraite, en l'absence de toute métrique, est commode.

### 7.1 Rappels de topologie

**Définition 7.1.1** Une topologie sur un ensemble  $X$ , c'est la donnée d'une collection  $\mathcal{O}$  de parties de  $X$  appelées ouverts, qui est stable par réunion quelconque et intersection finie. On appelle fermé une partie dont le complémentaire est ouvert. Une application  $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X', \mathcal{O}')$  entre espaces topologiques est continue si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On rappelle qu'une partie  $Y \subset X$  est ouverte si pour tout  $x \in Y$ , il existe  $r > 0$  tel que la boule  $B(x, r) \subset Y$ . On obtient ainsi une topologie sur  $X$ . La notion de continuité généralise bien celle du cas métrique.
2. Soit  $X = \{0, 1\}$  l'ensemble à 2 éléments. On décide que le seul ouvert de  $X$  est  $X$  (topologie grossière). C'est bien une topologie sur  $X$ .

**Définition 7.1.2** Soit  $X$  un espace topologique,  $Y$  un ensemble,  $f : X \rightarrow Y$  une application. La topologie induite sur  $Y$  est celle dont les ouverts sont les parties  $Z \subset Y$  telles que  $f^{-1}(Z)$  est un ouvert de  $X$ .

### 7.2 Un premier point de vue sur la topologie de l'espace projectif

Nous allons tout d'abord donner à l'espace projectif (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) une topologie quotient.

**Définition 7.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , munie de sa topologie naturelle. La topologie de l'espace projectif  $\mathbb{P}(E)$  est la topologie induite par l'application  $E \setminus \{0\}$  qui a un vecteur  $u$  associe la droite passant par  $u$ .

Il est plus facile de comprendre la topologie de l'espace projectif à l'aide des projecteurs orthogonaux. Soit  $g$  une métrique euclidienne ou hermitienne sur  $E$ . Nous rappelons qu'un projecteur orthogonal de  $E$  sur une droite est la donnée d'un endomorphisme  $p$  de  $E$  tel que

1.  $p \circ p = p$ ,
2.  $\text{trace}(p) = 1$ ,

3.  $\ker(p)^\perp = (p(E))^\perp$  ce qui équivaut à  $p = p^*$ .

Il est clair que  $\mathbb{P}(E)$  est en bijection avec l'espace  $\mathcal{P}$  des projecteurs orthogonaux sur les droites. Remarquons

**Proposition 7.2.2** *L'ensemble  $\mathcal{P}$  est un sous-ensemble compact de  $\text{End}(E)$*

DÉMONSTRATION : En effet,  $\mathcal{P}$  est définie par des équations et est donc fermé. Par ailleurs

$$a \rightarrow \|a\| := \text{trace}(aa^*)$$

est une norme sur  $\text{End}(E)$  et  $\mathcal{P}$  est inclus dans la boule de rayon 1 pour cette norme.  $\square$

Nous allons montrer

**Proposition 7.2.3** *L'application qui à une droite associe la projection orthogonale est un homéomorphisme. En particulier, l'espace projectif est compact.*

### 7.3 Cartes affines, droites projectives, application

**Proposition 7.3.1** *Une carte affine  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{A}$ . De plus, la paramétrisation de cette carte affine par un hyperplan affine est un homéomorphisme.*

**Proposition 7.3.2** *La droite projective sur  $\mathbb{R}$  est homéomorphe au cercle. La droite projective sur  $\mathbb{C}$  est homéomorphe à la sphère de dimension 2.*

Voici une information importante

**Proposition 7.3.3** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. L'application de*

$$\{(x, y) \in \mathbb{P}(E)^2 \mid x \neq y\}$$

*dans  $\mathbb{P}(E^*)$  qui à deux points distincts associe la droite passant par ces deux points est continue. Plus généralement, si  $E$  est de dimension  $n + 1$ , l'application qui à  $n$  points en position générale associe l'hyperplan passant par ces  $n$ -points est continue.*

### 7.4 Deux lemmes utiles de topologie générale

**Lemme 7.4.1** *Soit  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques, soit  $A$  et  $B$  des fermés de  $X$  tels que  $X = A \cup B$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application telle que  $f|_A$  et  $f|_B$  sont continues. Alors  $f$  est continue.*

DÉMONSTRATION : Soit  $F \subset Y$  un fermé.  $f|_A^{-1}(F)$  est un fermé de  $A$ , donc un fermé de  $X$ . Alors  $f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f|_A^{-1}(F) \cup f|_B^{-1}(F)$  est fermé.  $\square$

D'autre part

**Lemme 7.4.2** *Soit  $X$  un espace métrique compact. Soit  $U_i, i \in I$  des ouverts qui recouvrent  $X$ . Alors il existe un rayon  $r > 0$  (appelé nombre de Lebesgue du recouvrement) tel que toute boule de rayon  $r$  dans  $X$  soit entièrement contenue dans l'un des  $U_i$ .*

DÉMONSTRATION : Par compacité, on peut supposer l'ensemble  $I$  fini. Soit, pour  $x \in X$ ,  $d(x) = \max\{d(x, X \setminus U_i) \mid i \in I\}$ . Alors  $d$  est continue, strictement positive, donc elle est bornée inférieurement par un  $r > 0$ . Si  $x \in X$ , comme  $r \leq d(x)$ , il existe  $i \in I$  tel que  $d(x, X \setminus U_i) \geq r$ , ce qui signifie que  $B(x, r) \subset U_i$ .  $\square$

# Bibliographie

- [B1] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs*. CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques*. CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, *Topologie des surfaces*. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, (1965).

# Table des matières