

# GROUPE FONDAMENTAL ET REVÊTEMENTS

François Labourie,  
suivant les notes de Pierre Pansu et Laurent Clozel

11 avril 2008

# Table des matières

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Les applications à valeurs dans le cercle</b> | <b>4</b>  |
| 1.1      | Motivation                                       | 4         |
| 1.2      | Le théorème de relèvement                        | 4         |
| 1.3      | Degré                                            | 5         |
| 1.3.1    | Degré des applications différentiables           | 5         |
| 1.3.2    | Indice                                           | 6         |
| <b>2</b> | <b>Groupe fondamental</b>                        | <b>8</b>  |
| 2.1      | Chemins et lacets                                | 8         |
| 2.1.1    | Définitions                                      | 8         |
| 2.1.2    | Composition et inverse                           | 8         |
| 2.2      | Homotopie                                        | 9         |
| 2.2.1    | Exemples d'homotopie                             | 9         |
| 2.3      | Simple connexité                                 | 9         |
| 2.3.1    | Premiers exemples                                | 9         |
| 2.4      | Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental  | 10        |
| 2.4.1    | Propriétés fondamentales                         | 10        |
| 2.4.2    | Le groupe fondamental                            | 10        |
| 2.4.3    | Exemples                                         | 10        |
| <b>3</b> | <b>Type d'homotopie</b>                          | <b>12</b> |
| 3.1      | Homotopie entre applications                     | 12        |
| 3.1.1    | Le cas du cercle                                 | 12        |
| 3.1.2    | Applications                                     | 13        |
| 3.1.3    | Equivalences d'homotopie                         | 14        |
| 3.1.4    | Homotopie et groupes fondamentaux                | 15        |
| 3.1.5    | Rétraction par déformation                       | 16        |
| <b>4</b> | <b>Le théorème de Van Kampen</b>                 | <b>18</b> |
| 4.1      | Motivation                                       | 18        |
| 4.1.1    | Un résultat partiel                              | 18        |
| 4.2      | Constructions de théorie des groupes             | 19        |
| 4.2.1    | Produit libre de deux groupes                    | 19        |
| 4.2.2    | Groupes définis par générateurs et relation      | 20        |
| 4.2.3    | Somme amalgamée de groupes                       | 21        |
| 4.3      | Théorème de Van Kampen                           | 22        |
| 4.3.1    | Exemples                                         | 24        |
| <b>5</b> | <b>Revêtements</b>                               | <b>26</b> |
| 5.1      | Introduction                                     | 26        |
| 5.1.1    | Définition                                       | 26        |
| 5.1.2    | Exemples                                         | 26        |
| 5.1.3    | Sections                                         | 28        |

|          |                                                           |           |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 5.1.4    | Morphismes . . . . .                                      | 28        |
| 5.2      | Relèvement des homotopies . . . . .                       | 29        |
| 5.2.1    | Relèvements . . . . .                                     | 29        |
| 5.2.2    | Relèvement des chemins . . . . .                          | 29        |
| 5.2.3    | Relèvement des homotopies . . . . .                       | 30        |
| 5.3      | Critère de relevabilité . . . . .                         | 31        |
| <b>6</b> | <b>Revêtement universel</b>                               | <b>33</b> |
| 6.1      | Construction d'un revêtement simplement connexe . . . . . | 33        |
| 6.2      | Propriété universelle . . . . .                           | 34        |
| 6.2.1    | Unicité du revêtement simplement connexe . . . . .        | 35        |
| 6.2.2    | Automorphismes du revêtement universel . . . . .          | 35        |
| <b>7</b> | <b>Revêtements et groupe fondamental</b>                  | <b>36</b> |
| 7.1      | Revêtements non connexes . . . . .                        | 36        |
| 7.2      | Action sur la fibre . . . . .                             | 37        |
| 7.3      | Construction de revêtements intermédiaires . . . . .      | 38        |
| 7.4      | Classification des revêtements connexes . . . . .         | 39        |
| 7.4.1    | Revêtements galoisiens . . . . .                          | 40        |
| 7.4.2    | Revêtements du tore . . . . .                             | 42        |
| 7.5      | A retenir . . . . .                                       | 42        |

# Chapitre 1

## Les applications à valeurs dans le cercle

### 1.1 Motivation

**Question 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $t \mapsto c(t)$ ,  $I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  une courbe continue dans le plan qui évite l'origine. On note  $r(t) \in ]0, +\infty[$ ,  $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ses coordonnées polaires. Peut-on choisir une fonction continue  $t \mapsto \theta(t)$ ,  $I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\theta(t) \in \bar{\theta}(t)$  pour tout  $t$  ?

**Question 2.** Supposons que  $I = \mathbb{R}$  et que  $c$  est  $2\pi$ -périodique. Peut-on choisir la fonction continue  $t \mapsto \theta(t)$   $2\pi$ -périodique ?

**Question 3.** La fonction holomorphe  $z \mapsto 1/z$ ,  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  admet-elle une primitive sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ?

#### Rappel : détermination principale du logarithme

**Définition 1.1.1** La détermination principale du logarithme est la fonction holomorphe  $\text{Log}$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est  $z \mapsto 1/z$ .

On la calcule en intégrant  $1/z$  le long d'arcs évitant  $\mathbb{R}_-$ . On trouve que si  $z = re^{i\theta}$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , alors

$$\text{Log}(z) = \log(r) + i\theta.$$

Le fait que les limites par le haut et par le bas de  $\text{Log}$  en un point de  $\mathbb{R}_-$  sont distinctes entraîne que  $z \mapsto 1/z$  n'admet pas de primitive sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Donc la réponse à la question 3 est négative.

Cela entraîne que la réponse à la question 2 est négative elle-aussi.

**EXEMPLE :** Soit  $c(t) = e^{it} \in \mathbb{C}$ , qu'on identifie à  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $r(t) = 1$  pour tout  $t$  et il n'existe pas de fonction continue  $2\pi$ -périodique  $t \mapsto \theta(t)$  telle que  $c(t) = e^{i\theta(t)}$ .

En effet, sinon, la formule  $\text{my} - \log(re^{it}) = \log(r) + i\theta(t)$  définirait une fonction continue sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  telle que  $e^{\text{my} - \log(z)} = z$ . Le théorème d'inversion locale, appliqué à la fonction exponentielle, entraînerait que  $\text{my} - \log$  est holomorphe, de dérivée  $1/z$ , contradiction.

### 1.2 Le théorème de relèvement

**Théorème 1** On note  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $t_0 \in I$ . Soit  $t \mapsto u(t)$ ,  $I \rightarrow U$  une application continue. Soit  $\theta_0$  un réel tel que  $e^{i\theta_0} = u(t_0)$ . Il existe une unique fonction continue  $t \mapsto \theta(t)$ ,  $I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $e^{i\theta(t)} = u(t)$  pour tout  $t \in I$  et  $\theta(t_0) = \theta_0$ .

DÉMONSTRATION : L'unicité est facile : deux solutions diffèrent d'une fonction continue à valeur dans  $2\pi\mathbb{Z}$ , nécessairement constante, en fait nulle puisqu'elle s'annule en  $t_0$ .

Supposons d'abord qu'il existe un point  $v \in U$  qui n'est pas dans l'image de  $u$ . Si  $v = -1$ , posons  $\theta_v(t) = -i\text{Log}(u(t))$ . Si  $v \neq -1$ , posons  $\theta_v(t) = -i\text{Log}(-u(t)/v) - i\text{Log}(v) - i\pi$ . Dans les deux cas,  $e^{i\theta_v(t)} = u(t)$  pour tout  $t \in I$ . En particulier,  $e^{i\theta_v(t_0)} = u(t_0)$ , donc il suffit d'ajouter un multiple entier de  $2\pi$  à  $\theta_v$  pour que  $\theta(t_0) = \theta_0$ .

Passons au cas général. Soit  $T = \sup\{s \in I \mid \text{il existe une solution définie sur } [t_0, s]\}$  (éventuellement,  $T = +\infty$ ). Supposons que  $T \in I$ . Soit  $v \in U$  un point distinct de  $u(T)$ . Par continuité de  $u$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $u$  ne prenne pas la valeur  $v$  sur  $]T - \epsilon, T + \epsilon[ \cap I$ . Par définition de  $T$ , il existe un  $t > T - \epsilon$  et une solution  $\theta_s$  définie sur  $[t_0, s]$ . Alors  $e^{i\theta_s(s)} = u(s) = e^{i\theta_v(s)}$ , donc il existe un entier  $n$  tel que  $\theta_s(s) - \theta_v(s) = 2\pi n$ . On prolonge  $\theta_s$  par continuité en posant  $\theta(t) = \theta_v(s) + 2\pi n$  pour  $t \in [s, T + \epsilon[ \cap I$ . On obtient une solution définie sur  $[t_0, T + \epsilon[ \cap I$ . Ceci contredit le choix de  $T$ . On conclut que  $T \notin I$ , donc la moitié du contrat est remplie. En faisant le même travail à gauche de  $t_0$ , on construit le relèvement souhaité sur  $I$  entier.  $\square$

**Moralité.** On a utilisé la propriété suivante de la paramétrisation exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow U$  du cercle unité : au voisinage de chaque point de  $U$ , on dispose d'une famille d'applications réciproques continues dont les images recouvrent l'image réciproque du voisinage. Cette propriété caractérise les *revêtements*, on y reviendra.

### 1.3 Degré

Retour à la question 2. Soit  $u : \mathbb{R} \rightarrow U$  une application  $2\pi$ -périodique. Soit  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de  $u$ . Alors  $t \mapsto \theta(t + 2\pi)$  est un autre relèvement de  $u$ , donc il existe un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$ . L'exemple de la paramétrisation exponentielle elle-même ( $\theta(t) = t$ ) montre que  $n$  n'est pas toujours nul.

**Définition 1.3.1** Soit  $f : U \rightarrow U$  une application continue, soit  $\theta$  un relèvement de  $t \mapsto f(e^{it})$ . On appelle degré de  $f$  l'entier  $n = \deg(f)$  tel que  $\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2n\pi$ .

EXEMPLE : Le degré de  $z \mapsto z^n$  est  $n$ .

**Proposition 1.3.2** Si deux applications  $f$  et  $g : U \rightarrow U$  sont telles que pour tout  $s$ ,  $|f(s) - g(s)|$  est strictement plus petit que 2, elles ont même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons que  $|f - g| < 2$ . Soit  $\theta_f, \theta_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des relèvements de  $f$  et  $g$ . On peut les choisir de sorte que  $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$ . Supposons que  $s = \inf\{t > 0 \mid |\theta_f(t) - \theta_g(t)| \geq \pi\}$  est fini. Alors  $|\theta_f(s) - \theta_g(s)| = \pi$ , ce qui contredit  $|f(s) - g(s)| < 2$ . Par conséquent, pour tout  $t > 0$ ,  $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| < \pi$ . En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} 2k\pi|\deg(f) - \deg(g)| - |\theta_f(0) - \theta_g(0)| &\leq |\theta_f(0) - \theta_g(0) + 2k\pi(\deg(f) - \deg(g))| \\ &\leq |\theta_f(2k\pi) - \theta_g(2k\pi)| < \pi, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\deg(f) = \deg(g)$ .  $\square$

#### 1.3.1 Degré des applications différentiables

**Rappel 1.3.3** On dit que  $f : U \rightarrow U$  est de classe  $C^k$  si  $g(t) = f(e^{it})$  définit une application de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 1.3.4** Soit  $f : U \rightarrow U$  une application de classe  $C^1$ . Posons  $g(t) = f(e^{it})$ . Alors

$$\deg(f) = \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt.$$

DÉMONSTRATION : Soit  $\theta$  un relèvement de  $g$ , i.e.  $g(t) = e^{i\theta(t)}$ . Alors  $\theta$  est dérivable, et  $\frac{g'(t)}{g(t)} = i\theta'(t)$ , d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{i g(t)} dt = \int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = \theta(2\pi) - \theta(0) = \deg(f).$$

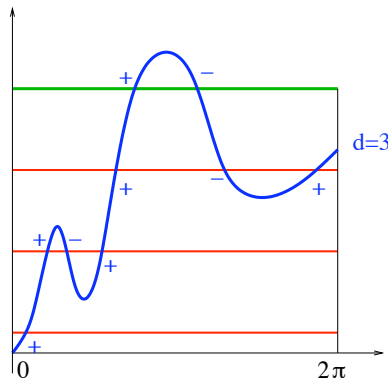
□

**Proposition 1.3.5** Soit  $f : U \rightarrow U$  une application de classe  $C^1$ . Soit  $u \in U$  tel que pour tout  $v \in U$  tel que  $f(v) = u$ , la dérivée de  $f$  en  $v$  est non nulle. Elle possède un signe,  $\epsilon(v) = +1$  si la vitesse va dans le sens trigonométrique,  $\epsilon(v) = -1$  sinon. Alors

$$\deg(f) = \sum_{v \in f^{-1}(u)} \epsilon(v).$$

DÉMONSTRATION : La somme est finie, car l'ensemble  $f^{-1}(u)$  est discret (chacun de ses points est isolé) donc fini. En effet, soit  $\theta$  un relèvement de  $f$ ,  $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$ , et soit  $\theta_0 \in [0, 2\pi[$  tel que  $u = e^{i\theta_0}$ . Par hypothèse, pour tout  $t$  tel que  $\theta(t) = \theta_0 \bmod 2\pi$ ,  $\theta'(t) \neq 0$ , donc  $t$  est isolé.

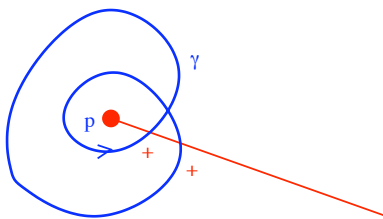
Notons  $d = \deg(f)$ . Quitte à translater le temps, on peut supposer que  $\theta(0) = 0$  et  $\theta_0 \neq 0$ . Lorsque  $t$  varie de 0 à  $2\pi$ , la fonction  $\theta$  croise chacun des niveaux  $\theta_0 + 2k\pi$ ,  $k = 0, \dots, d-1$  un nombre fini de fois, avec une dérivée positive ou négative, mais la somme des signes vaut 1. Pour un niveau  $\theta_0 + 2k\pi$ , où  $k$  n'est pas compris entre 0 et  $d-1$ , la somme des signes vaut 0. Par conséquent, la somme des signes des dérivées à toutes les traversées des niveaux  $\theta_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , vaut  $d$ . Or cette somme coïncide avec celle de l'énoncé. □



### 1.3.2 Indice

**Définition 1.3.6** Soit  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe dans le plan qui évite un point  $p$ . On appelle indice de  $\gamma$  par rapport à  $p$  le degré de l'application  $u \mapsto \frac{\gamma(u) - p}{|\gamma(u) - p|}$ .

Autrement dit, l'indice de  $\gamma$  par rapport à  $p$ , c'est le nombre de tours que  $\gamma$  fait autour de  $p$ . On peut le calculer en coupant  $\gamma$  par une demi-droite bien choisie : on compte le nombre de fois que  $\gamma$  coupe la demi-droite dans le sens trigonométrique, moins le nombre de fois que  $\gamma$  coupe la demi-droite dans l'autre sens.



## Chapitre 2

# Groupe fondamental

### 2.1 Chemins et lacets

#### 2.1.1 Définitions

**Définition 2.1.1** Soit  $X$  un espace topologique. Un chemin dans  $X$  est une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Lorsque  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , on parle de lacet, basé au point  $x = \gamma(0) = \gamma(1)$ .

Dans le cas où  $X$  est le cercle  $U$ , on définit le degré du lacet  $\alpha$  par la formule

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\eta(1) - \eta(0)),$$

où  $\alpha = e^{i\eta}$ . On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de  $\eta$ .

#### 2.1.2 Composition et inverse

**Définition 2.1.2** [COMPOSITION] Si  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  sont des chemins tels que  $\beta(0) = \alpha(1)$ , leur composition est le chemin noté  $\alpha \cdot \beta$  tel que

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha \cdot \beta(t) = \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

**Proposition 2.1.3** Si  $X = U$  alors

$$\deg(\alpha \cdot \beta) = \deg(\alpha) + \deg(\beta).$$

DÉMONSTRATION : En effet supposons  $\alpha = e^{i\theta}$  et  $\beta = e^{i\eta}$  tels que  $\theta(1) = \eta(0)$ . Nous pouvons alors écrire  $\alpha \cdot \beta = e^{i\xi}$  où

$$\begin{cases} \xi(t) = \theta(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \xi(t) = \eta(2t - 1) + \deg(\alpha)2\pi & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que  $\xi$  est continue et que  $\xi(1) - \xi(0) = 2\pi(\deg(\alpha) + \deg(\beta))$ .  $\square$

**Définition 2.1.4** [INVERSE] L'inverse d'un chemin  $\alpha$ , noté  $\alpha^{-1}$ , est défini par

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

EXERCICE : Si  $X = U$  alors

$$\deg(\alpha^{-1}) = -\deg(\alpha).$$

## 2.2 Homotopie

Deux chemins sont homotopes si on peut les déformer continûment l'un en l'autre.

**Définition 2.2.1** Soit  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  des chemins de mêmes extrémités  $x_0$  et  $x_1$ . On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes (à extrémités fixées), et on note  $\alpha \sim \beta$ , s'il existe une application continue  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  – appelée homotopie – telle que

$$\begin{aligned} F(0, t) &= \alpha(t), \\ F(1, t) &= \beta(t), \\ F(s, 0) &= x_0, \quad F(s, 1) = x_1. \end{aligned}$$

Notre premier lemme explique que deux paramétrisations différentes donne deux chemins homotopes.

**Lemme 2.2.2** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux chemins. On suppose qu'il existe une application continue  $h$  de  $[0, 1]$  dans lui-même tel que  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$  et  $\alpha = \beta \circ h$ . Alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes.

### 2.2.1 Exemples d'homotopie

Voici deux exemples concernant des espaces topologiques particuliers.

**Proposition 2.2.3** Si  $X$  est un convexe d'un espace affine, alors deux chemins quelconques ayant les mêmes extrémités sont homotopes.

**Proposition 2.2.4** Soit  $\alpha$  un chemin et  $h$  une application continue de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$  alors  $\alpha \circ h$  est homotope à  $\alpha$ .

**Proposition 2.2.5** Si  $X = U$ , deux lacets sont homotopes si et seulement si ils ont le même degré.

DÉMONSTRATION : Supposons tout d'abord que  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes par une application  $H$ . Par définition pour tout  $s$ , l'application  $H_s : t \rightarrow H(s, t)$  est un lacet. Par uniforme continuité de  $H$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|s - s'| \leq \epsilon$  entraîne  $|H_s(t) - H_{s'}(t)| \leq 1$ . En particulier, d'après la proposition 1.3.2,  $\deg(H_s) = \deg(H_{s'})$ . La fonction  $s \rightarrow \deg(H_s)$  est localement constante donc constante. En particulier  $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ .

Réciproquement, supposons  $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ . Nous pouvons écrire  $\alpha = e^{i\theta}$  et  $\beta = e^{i\eta}$  tels que  $\theta(0) = \eta(0)$ . Puisque  $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ , nous avons également  $\theta(1) = \eta(1)$ . Nous pouvons alors définir une homotopie entre  $\alpha$  et  $\beta$  par

$$H(s, t) = e^{i((1-s)\theta(t) + s\eta(t))}.$$

□

## 2.3 Simple connexité

**Définition 2.3.1** On dit qu'un espace topologique  $X$  est simplement connexe si il est connexe et si tout lacet est homotope à un lacet constant.

### 2.3.1 Premiers exemples

Nous avons déjà montrer les deux propositions suivantes.

**Proposition 2.3.2** Si  $X$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $X$  est simplement connexe.

**Proposition 2.3.3** Le cercle  $U$  n'est pas simplement connexe.

## 2.4 Propriétés de l'homotopie et groupe fondamental

### 2.4.1 Propriétés fondamentales

Par la suite il ne sera pas toujours utile de construire explicitement les homotopies. Les propriétés suivantes nous permettront de montrer l'homotopie de nombreux chemins

**Proposition 2.4.1** *Si  $x_0$  est un point de  $X$ , on note par  $x_0$  le chemin constant égale à  $x_0$*

- (i) *Si  $\alpha$  est homotope à  $\beta$ , alors  $\beta$  est homotope à  $\alpha$ .*
- (ii) *Si  $\alpha$  est homotope à  $\beta$  et  $\beta$  à  $\gamma$ , alors  $\alpha$  est homotope à  $\gamma$ .*
- (iii) *Si  $\alpha$  est homotope à  $\alpha'$  et  $\beta$  à  $\beta'$ , alors  $\alpha.\beta$  est homotope à  $\alpha'.\beta'$ .*
- (iv) *Le chemin  $\alpha$  est homotope à  $\alpha.\alpha(1)$  et à  $\alpha(0).\alpha$ .*
- (v) *Le lacet  $\alpha.\alpha^{-1}$  est homotope à  $\alpha(0)$ .*
- (vi) *Le chemin  $(\alpha.\beta).\gamma$  est homotope à  $\alpha.(\beta.\gamma)$ .*

DÉMONSTRATION : Pour les propriétés (iv,v,vi), on utilisera avec profit la proposition 2.2.4.  $\square$

Nous en déduisons immédiatement

**Corollaire 2.4.2** *Etre homotope est une relation d'équivalence.*

### 2.4.2 Le groupe fondamental

Nous déduisons immédiatement des propriétés prouvées dans la proposition 2.4.1.

**Théorème 2** *Soit  $x \in X$ . Soit  $\pi_1(X, x)$  l'ensemble des classes d'homotopie (à extrémités fixées) de lacets basés en  $x$ . La composition des lacets induit sur  $\pi_1(X, x)$  une structure de groupe.*

**Définition 2.4.3** *On appelle  $\pi_1(X, x)$  le groupe fondamental de  $X$ .*

### 2.4.3 Exemples

Nous pouvons énoncer de manière plus savante nos diverses remarques sur le degré des lacets dans le cercle.

**Proposition 2.4.4** *Le groupe fondamental du cercle unité  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  est isomorphe au groupe  $\mathbb{Z}$ . L'isomorphisme est donné par le degré  $\deg : \pi_1(U, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ .*

**Proposition 2.4.5** *Soit  $S^n$  la sphère de dimension  $n$ . Si  $n \geq 2$ , alors  $S^n$  est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION : Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$  un lacet. Nous appellerons *cercle* l'intersection d'un plan de dimension deux avec la sphère.

PREMIER CAS. Supposons que  $\gamma$  évite au moins un point  $u \in S^n$ . Comme  $S^n \setminus \{u\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma$  est homotope à une constante dans  $S^n \setminus \{u\}$ , et *a fortiori* dans  $S^n$ . Plus généralement, le même raisonnement montre que tout chemin évitant un point est homotope à un chemin tracé sur un cercle.

CAS GÉNÉRAL. Pour se ramener au premier cas, on montre que  $\gamma$  est homotope à un lacet qui évite un point. Par continuité uniforme, il existe un entier  $N$  tel que si  $|t' - t| \leq 1/N$ , alors  $|\gamma(t') - \gamma(t)| < 1$ . En particulier, le chemin  $\gamma_i$  qui est la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[i/N, (i+1)/N]$  évite le point  $-\gamma(t_i)$ . Le chemin  $\gamma_i$  est donc homotope à un chemin tracé sur un cercle. Le chemin  $\gamma$  est alors lui aussi homotope à un chemin tracé sur une réunion finie de cercles. Si  $n \leq 2$  alors. Cette réunion finie de cercles évite un point.  $\square$

**Proposition 2.4.6** *Soit  $X, Y$  des espaces topologiques,  $x \in X, y \in Y$ . Alors*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y).$$

*En particulier, le groupe fondamental du tore  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  est  $\mathbb{Z}^n$ .*

DÉMONSTRATION : Un lacet basé en  $(x, y)$  dans  $X \times Y$ , c'est un couple d'un lacet de  $X$  basé en  $x$  et d'un lacet de  $Y$  basé en  $y$ . Les homotopies aussi sont des couples d'homotopies, donc les classes d'homotopie sont des couples de classes.

Enfin,  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^n$ .  $\square$

# Chapitre 3

## Type d'homotopie

### 3.1 Homotopie entre applications

**Définition 3.1.1** Soit  $X, Y$  des espaces topologiques. Deux applications continues  $f_0$  et  $f_1 : X \rightarrow Y$  sont homotopes s'il existe une homotopie de  $f_0$  à  $f_1$ , i.e. une application continue  $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  telle que  $F(0, \cdot) = f_0$  et  $F(1, \cdot) = f_1$ . On le note  $f_0 \sim f_1$ .

C'est une relation d'équivalence et on note  $[X, Y]$  l'espace des classes d'homotopies d'applications de  $X$  dans  $Y$ .

#### 3.1.1 Le cas du cercle

Toute application continue  $\gamma$  du cercle  $U$  dans  $X$  donne naissance à un lacet  $\tilde{\gamma}$  basé en  $\gamma(1)$  par  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(e^{2i\pi t})$ . Réciproquement, si  $\tilde{\gamma}$  est un lacet, il existe une application continue  $\gamma$  de  $U$  dans  $X$  telle que  $\gamma(e^{2i\pi t}) = \tilde{\gamma}(t)$ .

Pour éviter la confusion sur le sens du mot "homotope", nous préciserons soit *homotopie à base fixées* – en tant que lacet basé en un point – soit *homotopie libre* – c'est à dire en tant qu'application de  $U$  dans  $X$ . Notons par ailleurs  $D$  le disque unité

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Nous avons alors les équivalences suivantes en utilisant les notations précédentes

**Proposition 3.1.2** Les trois affirmations suivantes sont équivalentes

- (i) Le lacet  $\tilde{\gamma}$  est homotope à base fixée au lacet constant.
- (ii) L'application  $\gamma$  est homotope librement à une application constante.
- (iii) L'application  $\gamma$  d'étend en une application  $F$  de  $D$  dans  $X$ , c'est-à-dire  $F|_U = \gamma$ .

ATTENTION Il existe des lacets qui sont homotopes librement pas mais pas homotopes à base fixée.

DÉMONSTRATION : L'implication (i) donne (ii) est facile. En effet si  $H$  est l'homotopie à base fixée de  $\tilde{\gamma}$  vers le lacet constant, l'application  $g : G(s, e^{2i\pi t}) = H(s, t)$  réalise une homotopie libre entre  $\tilde{\gamma}$  et l'application constante  $\gamma(0)$ .

Supposons maintenant (ii) et montrons (iii). Soit  $G$  l'homotopie libre entre l'application constante  $x_0$  et  $\gamma$ . On construit une application du disque  $D$  par

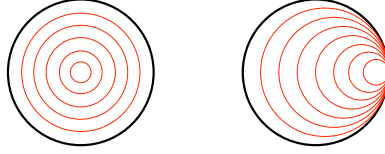
$$F(0) = x_0, \quad F(z) = G(|z|, \frac{z}{|z|}),$$

et on vérifie en exercice que  $F$  est bien continue.

Supposons enfin (iii) et montrons (i), on utilise l'homothétie de centre 1 et de rayon  $s$   $z \rightarrow s(1 - z) + 1$  pour construire

$$H(s, t) = G(s(e^{2i\pi t} - 1) + 1),$$

qui réalise une homotopie à base fixée entre le lacet constant  $\gamma(1)$  et  $\tilde{\gamma}$ .  $\square$



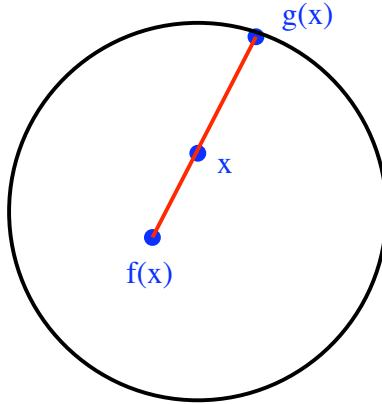
### 3.1.2 Applications

**Théorème 3** [L.E.J. BROUWER, 1909]. *Soit  $\bar{D}$  le disque unité fermé du plan. Toute application continue  $\bar{D} \rightarrow \bar{D}$  possède un point fixe.*

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons qu'il existe une application continue  $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  sans point fixe. Considérons l'application  $g : \bar{D} \rightarrow U$  qui à  $x \in \bar{D}$  associe le point d'intersection  $g(x)$  de la demi-droite d'origine  $f(x)$  passant par  $x$ .  $g$  est continue. En effet,  $g(x)$  est caractérisé par une condition fermée

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{f(x)z}, \overrightarrow{f(x)x}) = 0, \\ \overrightarrow{f(x)z} \cdot \overrightarrow{f(x)x} \geq 0. \end{cases}$$

Si  $x_j$  est une suite tendant vers  $x$ , toute sous-suite convergente de  $g(x_j)$  doit converger vers  $g(x)$ . Par conséquent,  $g(x_j)$  converge vers  $x$ .



Posons, pour  $s \in [0, 1]$  et  $u \in U$ ,  $F(s, u) = g(su)$ . Alors  $F(0, \cdot) = g(0)$  est constante, et  $F(1, \cdot)$  est l'identité. Par conséquent, l'identité  $U \rightarrow U$  est homotope à une constante. Or le degré de l'identité vaut 1, alors que celui d'une application constante vaut 0, contradiction.  $\square$

REMARQUES : Le théorème est vrai en toutes dimensions. Brouwer a traité le cas  $n = 3$  en 1919, le cas général est dû à J. Hadamard.

J'ignore l'histoire du cas  $n = 2$ . Pour généraliser la preuve aux dimensions supérieures, il faut un invariant d'homotopie (groupe d'homotopie ou d'homologie) en chaque dimension, alors que le groupe fondamental ne capture que des propriétés unidimensionnelles.

**Corollaire 3.1.3** *Quand on est à Paris et qu'on déplie un plan de Paris, il y a un point du plan qui est exactement à sa position réelle dans Paris.*

**Théorème 4** [JEAN LE ROND D'ALEMBERT, CARL FRIEDRICH GAUSS]. *Tout polynôme à coefficients complexes, de degré non nul, possède au moins une racine complexe.*

Ce théorème fut énoncé par D'Alembert au XVIII<sup>ème</sup> dans l'Encyclopédie puis démontré par Gauss au XIX<sup>ème</sup>.

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons qu'il existe un polynôme  $f$  de degré  $d$  à coefficients complexes, qui ne s'annule pas. Il ne coûte rien de supposer que le coefficient directeur de  $f$  vaut 1. Considérons l'application  $]0, 1[ \rightarrow U$  définie par

$$g(s, u) = \frac{f(u \frac{1-s}{s})}{|f(u \frac{1-s}{s})|}.$$

Lorsque  $s$  tend vers 0,  $g(s, u)$  tend vers  $u^d$ . Lorsque  $s$  tend vers 1,  $g(s, u)$  tend vers  $\frac{f(0)}{|f(0)|}$ . Par conséquent,  $g$  se prolonge en une application continue  $G : [0, 1] \times U \rightarrow U$ , qui est une homotopie entre la constante  $\frac{f(0)}{|f(0)|}$  et l'application  $u \mapsto u^d$ . Si  $d \neq 0$ , c'est incompatible avec l'invariance homotopique du degré.  $\square$

### 3.1.3 Equivalences d'homotopie

**Définition 3.1.4** *Une équivalence d'homotopie entre  $X$  et  $Y$ , c'est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle qu'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont homotopes à l'identité. S'il existe une équivalence d'homotopie entre  $X$  et  $Y$ , on dit que  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie.*

C'est une relation d'équivalence.

EXEMPLE :  $\mathbb{R}^n$  a même type d'homotopie qu'un espace  $*$  réduit à un point (on dit qu'il est *contractile*).

En effet, soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow *$  l'application constante, et  $g : * \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application dont l'image est 0. Alors  $g \circ f = id_*$ ,  $f \circ g$  est la fonction nulle, homotope à l'identité par  $F(s, x) = sx$ .  $\square$

EXEMPLE : Soit  $X, Y$  des espaces topologiques. Si  $X$  a même type d'homotopie que  $X'$ , alors  $X \times Y$  a même type d'homotopie que  $X' \times Y$ . En particulier,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  a même type d'homotopie que le cercle unité  $U$ .

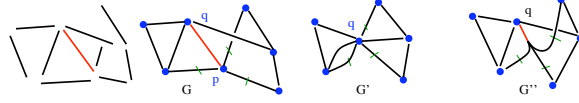
---

Fin du cours n<sup>0</sup>11

**Proposition 3.1.5** *Soit  $G$  un graphe fini, i.e. l'espace topologique obtenu à partir d'une réunion disjointe finie de copies de l'intervalle  $[0, 1]$  en identifiant des extrémités. Soit  $a$  une arête, i.e. un des intervalles constituant  $G$ . On suppose que les extrémités de  $a$  sont distinctes dans  $G$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu en écrasant  $a$ , i.e. en identifiant tous les points de  $a$ . Alors  $G$  et  $G'$  ont même type d'homotopie.*

DÉMONSTRATION : Notons  $f : G \rightarrow G'$  le passage au quotient. Pour construire son inverse  $g$ , montrons que  $G$  peut être vu comme un quotient de  $G'$ . Notons  $p$  et  $q \in G$  les extrémités de

l'arête écrasée. Notons  $a = pq, a_1, \dots, a_k$  les arêtes dont l'une des extrémités est  $p$ . Si une arête a ses deux extrémités égales à  $p$ , on la compte deux fois. Paramétrons chacune d'entre elles par  $t \mapsto a_i(t), t \in [0, 1]$ , de sorte que  $p$  corresponde au paramètre 0. Si une arête a ses deux extrémités égales à  $p$ , on la paramètre deux fois, une fois dans chaque sens, i.e.  $a_j(t) = a_i(1 - t)$ . Pour chaque  $t \in [0, 1/3]$ , identifions les points  $a_1(t), \dots, a_k(t)$ . On obtient un espace  $G''$  homéomorphe à  $G$ . On note  $g : G' \rightarrow G'' \rightarrow G$  le passage au quotient suivi de l'homéomorphisme, qui étire un tiers d'arête (obtenu par identification du premier tiers des  $a_i$ ) en l'arête  $a$  entière. C'est l'inverse homotopique de  $f$ .



Considérons l'application  $F_s : G \mapsto G$  qui est l'identité en dehors des arêtes contenant  $p$ , envoie  $a(t)$  en  $a(s + (1 - s)t)$ ,  $a_i(t)$  en  $a(|2st - s + t|)$  pour  $t \leq s/1 + 2s$ ,  $a_i(t)$  en  $a_i(|2st - s + t|)$  pour  $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$ , sans rien changer si  $t \geq \frac{1}{2}$ , sauf pour les arêtes  $a_i$  ayant leurs deux extrémités en  $p$ , pour lesquelles les points  $a_i(t) = a_j(1 - t)$  subissent le traitement prescrit aussi pour  $t \geq \frac{1}{2}$ . Alors  $F$  est une homotopie de l'identité à  $g \circ f$ .

Considérons l'application  $H_s : G' \mapsto G'$  qui est l'identité en dehors des arêtes  $a_i$ , envoie  $a_i(t)$  en  $a_i(0)$  pour  $t \leq s/1 + 2s$ ,  $a_i(t)$  en  $a_i(|2st - s + t|)$  pour  $s/1 + 2s \leq t \leq \frac{1}{2}$ , sans rien changer si  $t \geq \frac{1}{2}$ , sauf pour les arêtes  $a_i$  ayant leurs deux extrémités en  $p$ , pour lesquelles les points  $a_i(t) = a_j(1 - t)$  subissent le traitement prescrit aussi pour  $t \geq \frac{1}{2}$ . Alors  $H$  est une homotopie de l'identité à  $f \circ g$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.6** *Tout graphe fini connexe a même type d'homotopie qu'un graphe n'ayant qu'un sommet auquel sont attachées un nombre fini de boucles.*

DÉMONSTRATION : On écrase l'une après l'autre toutes les arêtes dont les extrémités sont distinctes. A la fin, il ne reste que des boucles attachées au même sommet.  $\square$

### 3.1.4 Homotopie et groupes fondamentaux

Nous devons tout d'abord examiner ce qui se passe lorsque l'on change de point base. Soit  $\alpha$  un chemin allant de  $x$  à  $y$ , nous laissons en exercice la proposition suivante.

**Proposition 3.1.7** *L'application  $\alpha_*$  de  $\pi_1(X, x)$  dans  $\pi_1(X, y)$  définie par  $\alpha_*([\gamma]) = [\alpha^{-1} \cdot \gamma \alpha]$  est bien définie et est un isomorphisme. De plus,*

- la composition des chemins donne la composition des morphismes,  $\alpha_\# \circ \beta_\# = (\alpha \cdot \beta)_\#$ ,
- si  $\alpha$  est homotope à  $\beta$ , alors  $\alpha_\# = \beta_\#$ .

En particulier si  $X$  est un espace topologique connexe par arcs, alors pour tous  $x, x' \in X$ , les groupes  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(X, x')$  sont isomorphes. De façon un peu abusive, on note tous ces groupes  $\pi_1(X)$ .

Nous allons maintenant pouvoir préciser le lien entre homotopie entre applications continues.

**Proposition 3.1.8** *Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme de groupe  $f_\# : \pi_0(X, x) \rightarrow \pi_0(Y, f(x))$  donné par  $f_\#([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ .*

(i) *De plus  $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$ .*

(ii) *Si  $f$  est homotope à  $g$  par une application  $H$ , alors  $g_\# = \alpha_\# \circ f_\#$ , où  $\alpha$  est le lacet joignant  $f(x)$  à  $g(x)$  donné par  $\alpha(s) = H(s, t)$ .*

DÉMONSTRATION : Le point délicat est le dernier point. Donnons tout d'abord l'idée. Notons  $f_s$  l'application  $t \rightarrow H(s, t)$ . Pour tout lacet  $\gamma$ , nous devons réaliser une homotopie entre le lacet  $\alpha^{-1} \cdot f(\gamma) \cdot \alpha$  et le lacet  $g(\gamma)$ . L'idée est de construire une déformation de telle sorte que le lacet déformé au temps  $s$  est obtenu en suivant  $\alpha^{-1}$  jusqu'au temps  $s$ , puis  $f_s \circ \gamma$  puis enfin  $\alpha$  à partir du temps  $s$ .

Considérons pour cela le carré  $[0, 1]^2$ . Le bord du carré est composé de quatre chemins orientés par le sens direct :

- Le côté bas  $c_{\text{bas}}$  qui va de  $(0, 0)$  à  $(1, 0)$ .
- Le côté droit  $c_{\text{droit}}$  qui va de  $(1, 0)$  à  $(1, 1)$ .
- Le côté haut  $c_{\text{haut}}$  qui va de  $(1, 1)$  à  $(0, 1)$ .
- Le côté gauche  $c_{\text{gauche}}$  qui va de  $(0, 1)$  à  $(0, 0)$ .

D'après la proposition 2.2.3 appliquée au convexe  $[0, 1]^2$ , le chemin  $c_{\text{droit}}$  est homotope par une homotopie  $G$  à extrémités fixées au le chemin  $(c_{\text{haut}}^{-1} \cdot c_{\text{gauche}}^{-1}) \cdot c_{\text{bas}}^{-1}$ .

Ensuite posons  $W(s, t) = H(s, \gamma(t))$ . On remarque que  $W \circ c_{\text{droit}}^{-1}$  est le lacet  $g \circ \gamma$ , le lacet  $w((c_{\text{bas}} \cdot c_{\text{droit}}) \cdot c_{\text{haut}})$  est le lacet  $(\alpha^{-1} \cdot f(\gamma)) \cdot \alpha$ .

L'homotopie  $F(s, t) = W(G(s, t))$  réalise alors l'homotopie à base fixée que nous recherchions.

□

**Corollaire 3.1.9** *Si  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie et sont connexes par arcs, alors  $\pi_1(X)$  et  $\pi_1(Y)$  sont isomorphes. En particulier, la simple connexité est un invariant d'homotopie.*

DÉMONSTRATION : on utilise le fait algébrique que si  $F : A \rightarrow B$  et  $G : B \rightarrow A$  sont des morphismes de groupes et si  $F \circ G$  de même que  $G \circ F$  est un isomorphisme alors  $F$  et  $G$  sont des isomorphismes.

□

**Corollaire 3.1.10**  $S^1 = U$  n'a pas même type d'homotopie que  $S^n$  ou  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  pour  $n \geq 2$ .

**Corollaire 3.1.11** Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  ne sont pas homéomorphes.

### 3.1.5 Rétraction par déformation

**Définition 3.1.12** *Soit  $X$  un espace topologique et  $Y \subset X$  un sous-espace. Une rétraction  $r : X \rightarrow Y$  est une application continue qui fixe chaque point de  $Y$ . Une rétraction par déformation de  $X$  sur  $Y$ , c'est une rétraction  $r : X \rightarrow Y$  qui est homotope à l'identité parmi des applications qui fixent chaque point de  $Y$ .*

REMARQUES : Si  $Y$  est un rétracte par déformation  $X$ , il a même type d'homotopie que  $X$ .

EXEMPLE :  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se rétracte par déformation sur  $S^{n-1}$ .

DÉMONSTRATION : Poser  $F(s, x) = \frac{x}{s|x| + 1 - s}$ . □

**Proposition 3.1.13** *Soit  $p \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  la droite à l'infini. Alors  $\ell$  est un rétracte par déformation de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$ .*

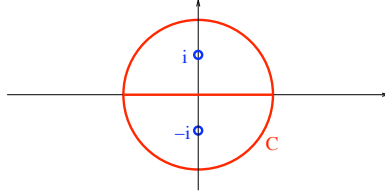
DÉMONSTRATION : Soit  $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\} \rightarrow \ell$  la projection de centre  $p$  sur  $\ell$ . Alors  $\pi$  est une rétraction. Chaque fibre  $\pi^{-1}(q)$ ,  $q \in \ell$  est une droite projective avec un point marqué ( $q$ ) et un point retiré ( $p$ ), elle possède donc une structure canonique de droite vectorielle. On peut donc

multiplier un point  $r \in \pi^{-1}(q)$  par  $s \in \mathbb{R}$ . L'application  $F(s, r) = sr$  définit une homotopie de  $\pi$  à l'identité à travers des rétractions.

Concrètement, si  $p = [0 : 0 : 1]$ ,  $r = [x_0 : x_1 : x_2]$ ,  $\pi(r) = [x_0 : x_1 : 0]$ , et on pose  $F(s, r) = [x_0 : x_1 : sx_2]$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.14** *Le complémentaire d'un disque dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  n'est pas homéomorphe à un disque. En fait, il n'a pas le même type d'homotopie.*

EXEMPLE :  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$  a même type d'homotopie que la réunion du cercle de rayon 2 centré en 0 et de l'intervalle  $[-2, 2]$  de l'axe réel.



En effet, notons  $B = \bar{B}(0, 2) \setminus \{-i, i\}$ . Alors  $B$  est un rétracte par déformation de  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ . La rétraction  $\rho$  envoie un point  $z$  du complémentaire de  $B$  sur  $2z/|z|$ . La déformation  $\rho_s$  envoie  $z$  sur  $(1-s)z + s\rho(z)$ .

Notons  $C = [-2, 2] \cup \{|z| = 2\}$ . Alors  $B$  se rétracte par déformation sur  $C$ . Dans chacune des moitiés de  $B$ , la rétraction  $r$  envoie un point  $z$  sur le premier point d'intersection de la demi-droite  $iz$  (resp.  $(-i)z$ ) avec  $C$ . La déformation  $r_s$  envoie  $z$  sur  $(1-s)z + sr(z)$ .

# Chapitre 4

## Le théorème de Van Kampen

### 4.1 Motivation

Un espace topologique eut souvent être décrit comme réunion d'espaces topologiques plus "simples". Le problème que résout le théorème de van Kampen est de donner une description du groupe fondamental d'un espace en fonction des morceaux dans lequel il est découpé.

Par récurrence on est amené à comprendre ce qui se passe pour deux morceaux. Dans tout ce chapitre, nous donnerons un espace  $CX$ , deux ouverts connexes  $X_1$  et  $X_2$  de  $X$  tels que

1. l'espace  $X$  est la réunion de  $X_1$  et  $X_2$ ,
2. l'intersection  $X_0$  de  $X_1$  et  $X_2$  est connexe.

Nous nous proposons de décrire  $\pi_1(X)$  à l'aide de  $\pi_1(X_1)$ ,  $\pi_1(X_2)$  et  $\pi_1(X_0)$ .

Un bon exemple à l'esprit est le cas de l'espace topologique  $X = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ ,  $X_1 = \{\Im m(z) > -1, z \neq i\}$  et  $X_2 = \bar{X}_2$ . Dans ce cas, nous connaissons déjà  $\pi_1(X_1)$ ,  $\pi_1(X_2)$  et  $\pi_1(X_0)$ .

**Notations.** Dans toute cette section, on suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont ouverts, et que  $X_0$ ,  $X_1$  et  $X_2$  sont connexes par arcs. On fixe un point base  $x_0 \in X_0$ . On note  $G_0 = \pi_1(X_0, x_0)$ ,  $G_1 = \pi_1(X_1, x_0)$ ,  $G_2 = \pi_1(X_2, x_0)$  et  $G = \pi_1(X, x_0)$ .

#### 4.1.1 Un résultat partiel

**Lemme 4.1.1**  *$G$  est engendré par les images de  $G_1$  et de  $G_2$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un lacet basé en  $x_0$ . On note pose

$$\begin{aligned} K_1 &= \gamma^{-1}(X \setminus X_2), \\ U_1 &= \gamma^{-1}(X_1). \end{aligned}$$

Nous remarquons que l'ouvert  $U_1$  est formée d'une réunion dénombrable disjoints d'intervalles disjoints qui recouvre le compact  $K_1$ . Nous en déduisons qu'il existe un nombre fini de ces intervalles disjoints  $]a_i, b_i[$  qui recouvre  $K_1$  pour  $i$  appartenant  $\{1, \dots, n\}$ . Par construction  $a_i$  et  $b_i$  n'appartiennent pas à  $K_1$ . Par compacité de  $K_1$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in K_1$ , et pour tout  $i$

$$\inf\{|x - a_i|, |x - b_i|, |a_i - b_i| \mid x \in K_1, 1 \leq i \leq n\} \geq 3\epsilon$$

Soit alors  $c_i = a_i + \epsilon$  et  $d_i = b_i - \epsilon$ . Alors par construction, on a  $a_i < c_i < d_i < b_i$  et de plus

$$\begin{aligned} \gamma([c_i, d_i]) &\subset X_1, \\ \gamma([d_i, c_{i+1}]) &\subset X_2. \end{aligned}$$

Posons enfin  $\gamma_i : t \rightarrow \gamma((1-t)c_i + td_i)$  et  $\tilde{\gamma}_i : t \rightarrow \gamma((1-t)d_i + tc_{i+1})$  en adoptant la convention que  $d_0 = 0$  et  $c_{n+1} = 1$

Par construction, le lacet  $\gamma$  homotope au lacet  $\tilde{\gamma}_0\gamma_1\tilde{\gamma}_1\ldots\gamma_n\tilde{\gamma}_n$  qui est la composition de chemins alternativement tracés dans  $X_1$  et  $X_2$ .

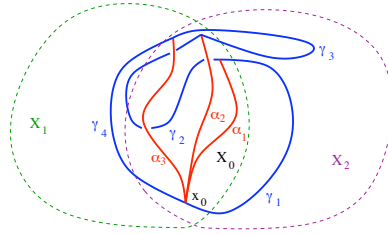
Nous choisissons maintenant pour tout  $i$  un chemin  $\alpha_i$  de  $x_0$  à  $\gamma(c_i)$  et  $\beta_i$  de  $x_0$  à  $\gamma(d_i)$ . Ces chemins existent bien car  $X_0$  est connexe.

On pose enfin

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_i &= \beta_i\tilde{\gamma}_i\alpha_{i+1}^{-1} \\ \xi_i &= \alpha_i\gamma_i\beta_{i+1}^{-1}.\end{aligned}$$

Par construction  $\xi$  sont des lacets dans  $X_1$  et  $\tilde{\xi}$  des lacets dans  $X_2$  basés en  $x_0$ . Enfin le lacet  $\xi$  homotope au lacet  $\tilde{\xi}_0\xi_1\tilde{\xi}_1\ldots\xi_n\tilde{\xi}_n$ , c'est ce que nous voulions montrer.

□



**Corollaire 4.1.2** Si  $X_0$  est connexe et  $X_1, X_2$  simplement connexes,  $X$  est simplement connexe.

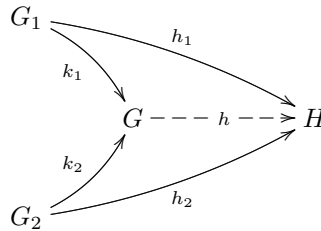
## 4.2 Constructions de théorie des groupes

ON va donner dans cette section des constructions de "recolllements de groupes".

### 4.2.1 Produit libre de deux groupes

**Théorème 5** Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes. Il existe un groupe  $G$ , unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.

1. Il existe des homomorphismes  $k_i : G_i \rightarrow G$ ,  $i = 1, 2$ .
2. Inversement, étant donné un groupe  $H$  et des homomorphismes  $h_i : G_i \rightarrow H$ ,  $i = 1, 2$  il existe un homomorphisme unique  $h : G \rightarrow H$  tel que  $h_1 = h \circ k_1$ ,  $h_2 = h \circ k_2$ .



**Définition 4.2.1** On appelle le groupe  $G$  produite par le théorème précédent produit libre des deux groupes  $G_1$  et  $G_2$ , noté  $G_1 * G_2$ .

**DÉMONSTRATION :** On considère l'ensemble des suites finies  $(g_1, \dots, g_k)$  d'éléments non triviaux pris alternativement dans  $G_1$  et  $G_2$ , sans oublier la suite vide, notée  $()$ . On multiplie deux suites  $(g_1, \dots, g_k)$  et  $(g'_1, \dots, g'_\ell)$  selon la règle définie par récurrence sur la longueur comme suit : si  $g_k$  et  $g'_1$  n'appartiennent pas au même groupe,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g'_\ell) = (g_1, \dots, g_k, g'_1, \dots, g'_\ell).$$

Sinon, et si de plus  $g_k g'_1 \neq 1$ ,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g_\ell) = (g_1, \dots, g_k g'_1, \dots, g_\ell).$$

Enfin, si  $g_k g'_1 = 1$ ,

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (g'_1, \dots, g_\ell) = (g_1, \dots, g_{k-1}) \cdot (g'_2, \dots, g_\ell),$$

qui est déjà défini, car de longueur inférieure. On vérifie (laborieux) que cette multiplication est associative. Cela donne un groupe  $G$ , avec élément neutre  $()$ , l'inverse de  $(g_1, \dots, g_k)$  étant  $(g_k^{-1}, \dots, g_1^{-1})$ .

Clairement, l'application  $k_1 : G_1 \rightarrow G$ ,  $e \mapsto ()$ ,  $g \mapsto (g)$  est un homomorphisme injectif. De même pour  $G_2$ . Remarquer que  $k_1(G_1)$  et  $k_2(G_2)$  engendrent  $G$ . Si  $H$  est un groupe, et si  $h_i : G_i \rightarrow H$ ,  $i = 1, 2$ , sont des homomorphismes, l'application  $h : G \rightarrow H$ , définie par  $h(g_1, \dots, g_k) = \Pi_j h_{\sigma(j)}(g_j)$ , où  $\sigma(j)$  est le numéro du groupe auquel  $g_j$  appartient, est un homomorphisme, et c'est le seul possible, qui satisfait  $h_1 = h \circ k_1$ ,  $h_2 = h \circ k_2$ . On conclut que  $G$  est le produit libre de  $G_1$  et de  $G_2$ .  $\square$

EXEMPLE :  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  s'appelle le groupe libre à deux générateurs.

EXEMPLE : En général,  $G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3$ , qu'on note  $G_1 * G_2 * G_3$ . On peut donc noter  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  le groupe libre à  $n$  générateurs.

### 4.2.2 Groupes définis par générateurs et relation

Nous nous intéressons au groupe libre à  $n$  générateurs  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ .

#### Mots et alphabets

Donnons quelques définitions.

**Définition 4.2.2** [MOTS ET MOTS RÉDUITS] *Un mot sur un alphabet à  $n$  lettres est une paire de  $k$ -uplets  $(i_1, \dots, i_k)$  et  $(n_1, \dots, n_k)$  – éventuellement vide – telle que  $i_j \in \{1, \dots, n\}$  et  $n_j \in \mathbb{Z}$ . Un mot est réduit si de plus*

1. on a  $i_j \neq i_{j+1}$ ,
2. on a  $n_i \neq 0$ .

Pour représenter de manière pratique les mot sur un alphabet à  $n$  lettres, on choisit  $n$  symboles ou lettres  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et on représente le mot  $w = ((i_1, \dots, i_k), (n_1, \dots, n_k))$  sous la forme  $w = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$ . Par convention, on note la suite vide  $e$ .

**Définition 4.2.3** [CONCATÉNATION] *On définit ensuite le produit de concaténation des mots  $w_1 = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$  et  $w_2 = a_{j_1}^{m_1} \dots a_{j_k}^{m_k}$  sous la forme*

$$w_1.w_2 = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k} . a_{j_1}^{m_1} \dots a_{j_k}^{m_k}.$$

*L'inverse du mot  $w = a_{i_1}^{n_1} \dots a_{i_k}^{n_k}$  est le mot  $w^{-1} = a_{i_k}^{-n_k} \dots a_{i_1}^{-n_1}$*

On remarque que le produit de concaténation est compatible avec l'écriture d'un mot en lettres.

On remarque que le produit de concaténation est associatif. On a alors une projection naturelle  $\pi$  des mots vers les mots réduits caractérisée par les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \pi(aw^n w^p b) &= \pi(aw^{n+p} b) \\ \pi(aw^0 b) &= \pi(ab) \end{aligned}$$

**Définition 4.2.4** [GROUPE LIBRE] *Le groupe libre à  $n$  générateurs sur les lettres  $a_1, \dots, a_n$  est alors le groupe dont les éléments sont les mots réduits et le produit est donné par  $a * b = \pi(a.b)$ . Par convention, on note le groupe libre sur les  $n$  lettres  $a_1, \dots, a_n$  sous la forme  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .*

### Groupes définis par générateurs et relations

On se donne un ensemble fini de *relations*  $R_1, \dots, R_p$ , c'est à dire de mots sur l'alphabet  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

**Définition 4.2.5** [GROUPE DÉFINI PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS] *Le groupe engendré par  $a_1, \dots, a_n$  vérifiant les relations  $R_1, \dots, R_p$  est le groupe*

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle := \langle a_1, \dots, a_n \rangle / N(R_1, \dots, R_p),$$

où  $N(R_1, \dots, R_p)$  est le groupe normalement engendré par  $R_1, \dots, R_p$ , c'est-à-dire l'intersection de tous les sous groupes distingués contenant les mots  $R_1, \dots, R_p$ .

On a les deux propositions suivantes.

**Proposition 4.2.6** *Si  $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$  et  $H = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1 = \dots S_k = e \rangle$  alors le produit libre  $G * H$  est isomorphe à*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = e \rangle.$$

*Si  $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$  et si  $N$  est un sous groupe normalement engendré par les mots  $S_1 \dots S_k$  alors  $G/N$  est isomorphe à*

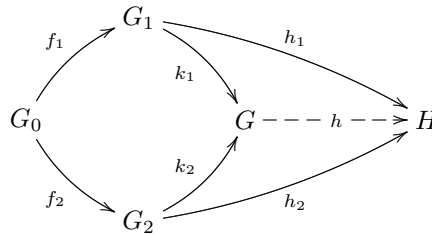
$$\langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = e \rangle.$$

### 4.2.3 Somme amalgamée de groupes

Nous allons maintenant recoller deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  en utilisant un troisième groupe.

**Théorème 6** *Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes. Soit  $G_0$  un troisième groupe, soit  $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$  et  $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$  deux homomorphismes. Il existe un groupe  $G$ , unique à unique isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes.*

1. *Il existe des homomorphismes  $k_i : G_i \rightarrow G$ ,  $i = 1, 2$  tels que  $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$ .*
2. *Inversement, étant donnés un groupe  $H$  et des homomorphismes  $h_i : G_i \rightarrow H$ ,  $i = 1, 2$  tels que  $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$ , il existe un homomorphisme unique  $h : G \rightarrow H$  tel que  $h_1 = h \circ k_1$ ,  $h_2 = h \circ k_2$ .*



**Définition 4.2.7** *On appelle le groupe  $G$  produit par le théorème précédent la somme amalgamée de  $G_1$  et  $G_2$  au-dessus de  $G_0$ , et on le note  $G_1 *_{G_0} G_2$ .*

DÉMONSTRATION :

**Unicité.** Soit  $G, G'$  deux solutions du problème. On applique la propriété universelle à chacun d'entre eux, cela donne deux homomorphismes  $h : G \rightarrow G'$  et  $h' : G' \rightarrow G$ , puis on constate que  $h' \circ h : G \rightarrow G$  est solution du problème universel pour  $H = G$ , d'où  $h' \circ h = id_G$ .

DÉMONSTRATION :

Soit  $N \subset G_1 * G_2$  le plus petit sous-groupe distingué de  $G_1 * G_2$  qui contient  $f_1(\ker(f_2))$ ,  $f_2(\ker(f_1))$  ainsi que tous les éléments de la forme  $(f_1(g_0), f_2(g_0)^{-1})$  pour  $g_0 \in G_0 \setminus (\ker(f_1) \cup \ker(f_2))$ . Soit  $G$  le groupe quotient  $G_1 * G_2 / N$ , avec les homomorphismes  $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$  et  $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2 \rightarrow G$ . Par construction, pour tout  $g_0 \in G_0$ ,  $k_1 \circ f_1(g_0)(k_2 \circ f_2(g_0))^{-1} = f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1} = e \text{ mod } N$ , donc  $k_1 \circ f_1 = k_2 \circ f_2$ .

Si  $H$  est un groupe,  $h_1 : G_1 \rightarrow H$  et  $h_2 : G_2 \rightarrow H$  des homomorphismes tels que  $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$ , alors l'homomorphisme induit  $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow H$  est trivial sur  $N$ , donc passe au quotient en  $h : G \rightarrow H$  qui satisfait  $h_1 = h \circ f_1$ ,  $h_2 = h \circ f_2$ . Inversement, tout homomorphisme  $h : G \rightarrow H$  tel que  $h_1 = h \circ f_1$ ,  $h_2 = h \circ f_2$  se relève en un homomorphisme  $G_1 * G_2 \rightarrow H$  trivial sur  $N$ , donc il n'y a aucun choix pour  $h$ . On conclut que  $G = G_1 *_{G_0} G_2$ .  $\square$

REMARQUES : Lorsque  $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$  et  $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$  sont injectives, les homomorphismes naturels  $k_1 : G_1 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$  et  $k_2 : G_2 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$  sont injectifs.

Dans ce cas, on peut penser à  $G_0$  comme à un sous-groupe commun à  $G_1$  et  $G_2$ , et à  $G_1 *_{G_0} G_2$  comme le produit libre dans lequel on s'est arrangé pour que chaque élément de  $G_0$  n'apparaisse qu'une seule fois. En terme de générateurs et relations, on a la proposition suivantes

**Proposition 4.2.8** *Si  $G_1 = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1 = \dots R_p = e \rangle$  et  $G_2 = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1 = \dots S_k = e \rangle$ . Si  $G_0$  est engendré par les éléments  $w_1, \dots, w_q$  alors  $G_1 *_{G_0} G_2$  est isomorphe au groupe*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1 = \dots R_p = S_1 = \dots S_k = i_1(w_1)i_2^{-1}(w_1) = \dots = i_1(w_q)i_2^{-1}(w_q)e \rangle.$$

### 4.3 Théorème de Van Kampen

**Théorème 7** *Soit  $X$  un espace topologique, soit  $X_1, X_2$  des ouverts connexes par arcs de  $X$  tels que  $X = X_1 \cup X_2$  et tels que  $X_0 = X_1 \cap X_2$  soit connexe par arcs. Notons  $G_i = \pi_1(G_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , avec les homomorphismes  $f_1 : G_0 \rightarrow G_1$  et  $f_2 : G_0 \rightarrow G_2$  induits par les injections  $X_0 \rightarrow X_1$  et  $X_0 \rightarrow X_2$ . Alors l'homomorphisme naturel  $G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow \pi_1(X)$  est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION : Nous donnons tout d'abord l'idée de la démonstration lorsque  $X_0$  est simplement connexe. Nous voulons donc montrer que si une composition d'arc  $g = g_1.h_1.g_2.h_2 \dots g_n$  avec les  $g_i$  tracées alternativement dans  $X_1$  et les  $h_i$  dans  $X_2$ , est homotope à zéro alors chacun des  $g_i$  – respectivement  $h_i$  – est homotope à zéro dans  $X_1$  – respectivement dans  $X_2$ .

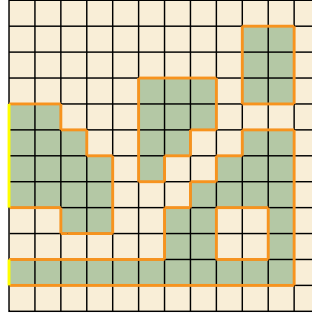
Nous commençons comme dans la preuve de la surjectivité. Nous avons par hypothèse une application  $C$  du carré  $[0, 1]^2$  à valeurs dans  $X$  et réalisant une homotopie de  $g$  vers le lacet constant.

Nous nous représentons ce carré de façon à ce que l'image des côté haut, bas et droit soit l'origine  $x_0$  de nos lacets  $x_1$ .

Nous découpons le carré  $[0, 1]^2$  en  $N^2$  carrés dont les longueurs ont  $1/N$ , avec suffisamment grand de telle sorte que d'après notre lemme topologique ??, chaque carré soit envoyé soit dans  $X_1$  soit dans  $X_2$ . Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ces carrés.

Choisissons une bonne fois pour tout un *coloriage*, c'est-à-dire une fonction  $\epsilon$  de  $\mathcal{C}$  à valeurs dans  $\{1, 2\}$  de telle sorte que le carré  $c$  soit incl. dans  $\epsilon(c)$ . Nous avons représenté sur le dessin par les carrés verts ceux qui ont inclus dans  $X_1$  et les carrés roses ceux qui sont inclus dans  $X_2$ .

Nous pouvons toujours choisir le découpage et le coloriage de façon à ce que tous les carrés qui touchent les lacets  $g_i$  et  $h_i$  soient respectivement verts et roses.



La réunion des carrés verts peut alors être décomposée en une réunion finie de régions "connexes" disjointes. Chacune de ces régions est composée des carrés qui peuvent être joints l'un à l'autre par une succession de carrés verts se touchant en un côté. On procède de la même manière pour les carrés roses.

Nous allons maintenant utiliser la simple connexité de  $X_0$  pour éliminer toutes les régions intérieures, c'est-à-dire celle qui ne touchent pas les côtés du grand carré. Par éliminer, nous voulons dire remplacer l'homotopie par une autre.

Chacune de ces régions est bordée par un nombre finie de lacets pas nécessairement basés en  $x_0$  et qui dans le dessin sont représentés en orange. Par construction, l'image de ces lacets est tracée dans  $X_0$ . Soit  $\gamma$  l'un de ces lacets, ce lacet borde une région  $D_\gamma$  homéomorphe à disque. Nous supposons que les carrés intérieurs le long de  $\gamma$  sont verts.

Comme  $X_0$  est simplement connexe, nous pouvons trouver une application du disque à valeurs dans  $X_0$  qui prolonge  $\gamma$ . Comme le disque est homéomorphe à  $D_\gamma$ , ceci signifie que nous pouvons trouver une application  $F$  de  $D_\gamma$  à valeurs dans  $X_0$  qui prolonge  $\gamma$ . Nous remplaçons  $C|_{D_\gamma}$  par cette application  $F$  pour obtenir une nouvelle homotopie  $\tilde{C}$ . Nous ne changeons pas le coloriage à l'extérieur de  $\gamma$ , mais nous avons toute liberté de choisir la couleur à l'intérieur de  $D_\gamma$ , puisque l'image de  $D_\gamma$  est maintenant à la fois dans  $X_1$  et  $X_2$ . Nous choisissons donc la couleur rose. Nous avons ainsi un nouveau coloriage avec une courbe de moins.

En répétant cette procédure nous arrivons à la situation suivante : la région attenante à un arc  $g_i$  est homéomorphe au disque, et son bord est composé de la réunion de  $g_i$  et d'un arc "orange" c'est-à-dire dont l'image est tracée dans  $X_0$ . Ainsi  $g_i$  est homotope dans  $X_1$  à un arc tracé dans  $X_0$ , qui lui-même est homotope à zéro – par hypothèse dans  $X_0$  et donc en particulier dans  $X_1$ . Nous venons de démontrer que  $g_i$  est homotope à zéro dans  $X_1$ . Le même raisonnement montre que  $h_i$  est homotope à zéro dans  $X_2$ .  $\square$

Voici une démonstration plus formelle dans le cas général.

DÉMONSTRATION : Notons  $G = \pi_1(X)$ . Notons  $\bar{h} : G_1 * G_2 \rightarrow G$  l'homomorphisme naturel. Comme les injections  $X_0 \subset X_1 \subset X$  et  $X_0 \subset X_2 \subset X$  forment un diagramme commutatif, il en est de même au niveau des groupes fondamentaux, donc il y a un homomorphisme naturel  $h : G_1 *_{G_0} G_2 \rightarrow G$ . Comme les images de  $G_1$  et  $G_2$  dans  $G$  engendrent  $G$ ,  $h$  est surjectif. Comme  $\bar{h}$  relève  $h$ , il est trivial sur le sous-groupe distingué  $D$  engendré par les  $f_1(g_0)f_2(g_0)^{-1}$ ,  $g_0 \in G_0$ . Reste à voir que  $\ker(\bar{h}) \subset D$ .

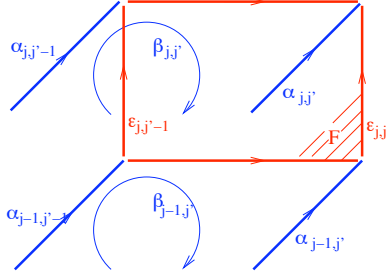
Soit  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$  un lacet dans  $X$ , basé en  $x_0$ , obtenu par composition de lacets  $\gamma_j \subset G_{\sigma(j)}$ . Supposons  $\gamma$  homotope à une constante (i.e.  $[\gamma] \in \ker(\bar{h})$ ). Soit  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une telle homotopie, dans laquelle  $F(0, t)$ ,  $t \in [\frac{j'-1}{k}, \frac{j'}{k}]$  est une paramétrisation de  $\gamma_{j'}$ . On applique le lemme ?? au recouvrement du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par les deux ouverts  $F^{-1}(X_1)$  et  $F^{-1}(X_2)$ . On obtient un entier  $N$  tel que tout sous-carré de côté  $1/N$  soit entièrement contenu dans  $X_1$  ou dans  $X_2$ . On peut supposer que  $N$  est un multiple de  $k$ . Pour tout  $(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , on pose  $\sigma(j, j') = 0$  si

$F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) \in X_0$ ,  $\sigma(j, j') = 1$  ou  $2$  sinon, et on relie  $x_0$  à  $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N})$  par un chemin  $\alpha_{j,j'}$  entièrement contenu dans  $X_{\sigma(j,j')}$ . Si  $j = 1$ ,  $j' = 0$  ou  $j' = 1$ ,  $F(\frac{j}{N}, \frac{j'}{N}) = x_0$  et on choisit le chemin constant.

Pour chaque  $j$ ,  $t \mapsto F(\frac{j}{N}, t)$  est un lacet basé en  $x_0$ , noté  $\beta_j$ . On écrit  $\beta_j = \beta_{j,1} \cdots \beta_{j,N}$ , où

$$\beta_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot F_{[\frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]} \cdot \alpha_{j,j'}^{-1} \subset X_{\max\{\sigma(j,j'-1), \sigma(j,j')\}}.$$

Lorsque  $\max\{\sigma(j, j'-1), \sigma(j, j')\} = 0$ , on décide de voir  $\beta_{j,j'}$  comme un lacet de  $X_1$ . Autrement dit, on peut voir  $\beta_j$  comme l'élément  $m_j = [\beta_{j,1}] \cdots [\beta_{j,N}]$  du produit libre  $G_1 * G_2$ .



Montrons que modulo le sous-groupe distingué  $D$ ,  $m_j$  est indépendant de  $j$ . Notons  $\epsilon_{j,j'} = F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times \{\frac{j'}{N}\})$ . Si  $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}]) \subset X_1$ , alors  $\beta_{j,j'}$  est homotope dans  $X_1$  à

$$\beta'_{j,j'} = \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1}.$$

Si  $F([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times [\frac{j'-1}{N}, \frac{j'}{N}])$  n'est pas entièrement contenu dans  $X_1$ , alors il est contenu dans  $X_2$ . Décider de changer le statut de  $\beta_{j,j'}$  de celui de lacet de  $X_1$  à celui de lacet de  $X_2$  n'est nécessaire que si  $\beta_{j,j'} \subset X_0$  et revient à multiplier  $[\beta_{j,j'}]$  par un élément de  $D$ . Donc quitte à multiplier  $m_j$  et  $m_{j-1}$  par des éléments de  $D$ , on peut décider que tout se passe dans  $X_2$  et dans ce cas l'homotopie de  $\beta_{j,j'}$  à  $\beta'_{j,j'}$  a lieu à nouveau. Dans l'élément  $m_j$ , on trouve, modulo  $D$ , le produit

$$\begin{aligned} \beta'_{j,j'} \beta'_{j,j'+1} &= \alpha_{j,j'-1} \cdot \epsilon_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'-1}^{-1} \cdot \beta_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \\ &\quad \cdot \beta_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j,j'+1} \cdot \epsilon_{j-1,j'+1} \cdot \alpha_{j-1,j'+1}^{-1}, \end{aligned}$$

au coeur duquel figure

$$\alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j,j'} \cdot \epsilon_{j-1,j'}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,j'}^{-1},$$

qui est trivial si les 6 chemins sont contenus dans le même  $X_1$  ou  $X_2$ . Sinon, c'est qu'ils sont tous contenus dans  $X_0$ . On a donc affaire au produit de deux lacets de  $X_0$  inverses l'un de l'autre, leur produit appartient à  $D$ . Modulo  $D$ , le facteur qui s'intercale entre  $\beta_{j-1,j'}$  et  $\beta_{j-1,j'+1}$  dans le produit est trivial. Les termes de bords  $\alpha_{j,0} \cdot \epsilon_{j-1,0}^{-1} \cdot \alpha_{j-1,0}^{-1}$  et  $\alpha_{j,N} \cdot \epsilon_{j-1,N} \cdot \alpha_{j-1,N}^{-1}$  sont des lacets constants. On conclut que  $m_j = m_{j-1} \bmod D$  dans  $G_1 * G_2$ . Comme le dernier mot  $m_N$  est trivial et le premier égal à  $\gamma$ , on conclut que  $\gamma \subset D$ , i.e. que  $\ker(h) \subset D$ .  $\square$

### 4.3.1 Exemples

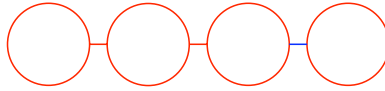
**Proposition 4.3.1** *Soit  $G$  un graphe fini connexe. Alors  $\pi_1(G)$  est un groupe libre à  $\kappa$  générateurs, où  $\kappa$ , la connectivité de  $G$ , vaut*

$$\kappa = 1 - S + A,$$

où  $S$  est le nombre de sommets et  $A$  le nombre d'arêtes de  $G$ .

**DÉMONSTRATION :** Lorsqu'on écrase une arête dont les sommets sont distincts,  $S$  et  $A$  diminuent

d'une unité, donc la connectivité ne change pas. Lorsque toutes les arêtes sont écrasées, sauf les boucles, on se retrouve avec  $\kappa$  boucles attachées à l'unique sommet. On introduit une arête entre deux boucles, pour obtenir la figure suivante, notée  $L_\kappa$ . A nouveau, cela ne change ni la connectivité, ni le groupe fondamental.



On lui applique le théorème de Van Kampen, avec  $X_1$  homéomorphe à un cercle avec une arête qui dépasse,  $X_2$  à un  $L_{\kappa-1}$  avec une arête qui dépasse,  $X_0$  une arête sans ses extrémités. Comme  $\pi_1(X_0)$  est trivial,  $\pi_1(X)$  est un produit libre. Clairement, le cercle avec arête ouverte qui dépasse se rétracte par déformation sur le cercle. De même pour  $L_{\kappa-1}$ . On trouve que  $\pi_1(G)$  est un produit libre de  $\kappa$  copies de  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.2**    1. La connectivité est un invariant d'homotopie des graphes.

2. Le groupe fondamental de  $\mathbb{C}$  privé de 2 points est un groupe libre à 2 générateurs. Il n'est donc pas commutatif.

# Chapitre 5

## Revêtements

### 5.1 Introduction

Il s'agit d'étendre à d'autres situations la propriété de relèvement mise en évidence pour l'application exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow U$ .

#### 5.1.1 Définition

**Définition 5.1.1** Une application continue  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement si tout point  $x \in X$  a un voisinage  $U$  tel que

1.  $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$ ,  $V_i \subset E$ ,  $I \neq \emptyset$ , réunion disjointe d'ouverts,
2. pour chaque  $i \in I$ ,  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme.

On appelle  $X$  la base et  $E$  l'espace total du revêtement. J'appelle  $U$  un voisinage trivialisant.

Démontrons les propriétés suivantes

**Proposition 5.1.2** 1. si  $U$  est un ouvert trivialisant, si  $V$  est un ouvert contenu dans  $U$ , alors  $V$  est également trivialisant.

2. Si  $U$  est un ouvert trivialisant connexe, alors  $p$  est un homéomorphisme de chaque composante connexe de  $p^{-1}(U)$  sur  $U$ .
3.  $p$  est un homéomorphisme local, donc les fibres  $p^{-1}(y)$  sont discrètes.
4. On peut faire des produits de revêtements  $(p, p') : E \times E' \rightarrow X \times X'$ .
5. Si  $X$  est connexe, les fibres  $p^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ , ont toutes le même cardinal (éventuellement infini).
6. Si  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement et  $Y \subset X$ , alors  $p|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \rightarrow Y$  est un revêtement.

DÉMONSTRATION :

1. Ce premier point est trivial.
2. Pour le deuxième point, on voit que si  $p^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$  où les  $V_i$  sont ouverts, alors chaque  $V_i$  est à la fois ouvert et fermé dans  $p^{-1}(U)$ .
3. Les derniers points sont évidents.

#### 5.1.2 Exemples

1. Soit  $S$  un espace topologique discret. Alors la projection sur le premier facteur  $p : X \times S \rightarrow X$  est un revêtement appelé *revêtement trivial* de fibre  $S$ .

2.  $t \mapsto e^{it}$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow U$  est un revêtement.
3.  $z \mapsto e^z$ ,  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  est un revêtement.
4. Si  $n \neq 0$ ,  $z \mapsto z^n$ ,  $U \rightarrow U$ , est un revêtement.
5. La restriction de  $t \mapsto e^{it}$  à  $]0, 3\pi[$  n'est pas un revêtement de  $]0, 3\pi[$  sur  $U$ .

En effet, soit  $U$  le voisinage de  $-1$  dans  $U$  formé des  $z \in U$  dont l'argument diffère de  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ) d'au plus  $\epsilon$ . Alors  $p^{-1}(U)$  est la réunion disjointe de deux intervalles,  $V_1 = ]\pi - \epsilon, \pi + \epsilon[$  et  $V_2 = ]3\pi - \epsilon, 3\pi[$ .  $V_1$  est l'image d'une section de  $p$  au-dessus de  $U$ , mais  $V_2$  ne l'est pas. D'ailleurs, le cardinal des fibres n'est pas constant.

**Proposition 5.1.3** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un homéomorphisme local, avec  $E$  compact. Alors  $p$  est un revêtement.*

DÉMONSTRATION : Soit  $x \in X$ . Alors  $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$  est fini car discret et compact. Soit  $W_i$  un voisinage ouvert de  $e_i$  tel que  $p|_{W_i}$  soit un homéomorphisme de  $W_i$  sur un ouvert  $U_i$  contenant  $x$ . Quitte à rétrécir, on peut supposer les  $W_i$  deux à deux disjoints. Quitte à rétrécir encore, on peut supposer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , tel que pour tout  $i$ ,  $p$  est un homéomorphisme de  $W_i$  sur  $U$ .

Il reste à montrer, au besoin en rétrécissant  $U$ , que  $p^{-1}(U) \subset \bigcup_i W_i$ . Considérons  $K = Y \setminus \bigcup_i W_i$ ,  $K$  est un compact, donc  $p(K)$  est un compact qui ne contient pas  $x$ . Par construction  $O = X \setminus p(K)$  est un voisinage ouvert de  $x$ . Considérons enfin,  $O_i = p^{-1} \cap W_i$ . A nouveau,  $p$  est un homéomorphisme local de  $O_i$  sur  $O$ , et les  $O_i$  sont tous disjoints.

Par construction  $p^{-1}(O) \cap K = \emptyset$ . Nous en déduisons que  $p^{-1}(O) \subset \sqcup_i W_i$  et ainsi  $p^{-1}(O) = \sqcup_i W_i$ . L'ouvert  $O$  est donc trivialisant.  $\square$

EXEMPLE : L'application  $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  qui à un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  associe la droite vectorielle qu'il engendre est un revêtement.

En effet, soit  $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Choisissons des coordonnées homogènes de sorte que  $p = [0 : \dots : 1]$ . Si  $q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est proche de  $p$ , il admet des coordonnées homogènes de la forme  $q = [x_0 : \dots : x_n]$  avec  $x_n > 0$ . Alors  $(x_0^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2}(x_0, \dots, x_n)$  est l'unique vecteur unitaire sur la droite  $q$  dont la dernière composante est  $> 0$ . Il dépend continûment de  $q$ . Il y a deux telles applications réciproques locales de  $f$ , donc  $f$  est un revêtement.  $\square$

**Proposition 5.1.4** *Soit  $E$  un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet une base de voisinages compacts). Soit  $G$  un groupe qui agit sur  $E$*

1. librement, i.e. si  $x \in E$  et  $g \neq 1$ , alors  $gx \neq x$  ;
2. proprement, i.e. si  $K \subset E$  est compact, l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $gK \cap K \neq \emptyset$  est fini.

*Alors  $X = G \backslash E$  est séparé, et la projection  $p : E \rightarrow G \backslash E$  est un revêtement.*

DÉMONSTRATION : Séparation : voir TD. Soit  $e \in E$ . Soit  $V$  un voisinage compact de  $e$ . Comme  $E$  est séparé, et comme l'intersection de  $V$  et de l'orbite de  $e$  est un ensemble fini, les points de  $Ge \cap V = \{e = g_0e, g_1e, \dots, g_ne\}$  admettent des voisinages  $U_i$  deux à deux disjoints dans  $V$ . Soit  $U = \bigcap_i g_i^{-1}(U_i)$ . C'est un voisinage de  $e$  dont les translatés par des éléments de  $G$  sont deux à deux disjoints. La restriction de  $p$  à chaque  $gU$  est un homéomorphisme sur le voisinage  $[U]$  de la classe  $[p] \in G \backslash E$ .  $\square$

EXEMPLE : L'application  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est le revêtement associé à l'action du groupe à 2 éléments sur la sphère par  $x \mapsto -x$ .

EXEMPLE : Soit  $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  le groupe cyclique à  $n$  éléments, agissant par multiplication sur  $U$ . Alors le revêtement associé n'est autre que  $z \mapsto z^n$ ,  $U \rightarrow U$ .

EXEMPLE : Soit  $G \subset \mathbb{R}$  le groupe engendré par la translation de  $2\pi$ . Alors  $G$  agit librement et proprement sur  $\mathbb{R}$ . Le revêtement associé coïncide avec le revêtement exponentiel  $\mathbb{R} \rightarrow U$ .

### 5.1.3 Sections

**Définition 5.1.5** Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Une section de  $p$  est une application continue  $s : X \rightarrow E$  telle que  $p \circ s = \text{id}_X$ . Une section au-dessus de  $Y \subset X$ , c'est une section de  $p|_{p^{-1}(Y)}$ , i.e. définie seulement au-dessus de  $Y$ . Une section locale en  $x$  est une section définie sur un voisinage de  $x$ .

**Proposition 5.1.6** Nous avons

1. Une section  $s$  au-dessus de  $Y$  est automatiquement un homéomorphisme de  $Y$  sur  $s(Y)$ .
2. Par définition même, un revêtement possède des sections locales en tout point  $x$ , exactement autant que d'images réciproques de  $x$ .
3. Si  $Y$  est connexe, deux sections au dessus de  $Y$  qui coïncident en un point sont égales.
4. une section locale est une application ouverte.
5. si  $\sigma$  est une section au-dessus d'un ouvert  $U$  connexe alors  $\sigma(U)$  est une composante connexe de  $p^{-1}(U)$ .

### 5.1.4 Morphismes

On précise le sens de "coïncide".

**Définition 5.1.7** Soit  $p : E \rightarrow X$  et  $p' : E' \rightarrow X$  deux revêtements. On appelle morphisme de  $E$  vers  $E'$  une application continue  $m : E \rightarrow E'$  telle que  $p' \circ m = p$ . Si  $f$  est une bijection, on parle d'isomorphisme.

Remarquer que si  $E'$  est connexe, un morphisme injectif est automatiquement un isomorphisme, lequel est automatiquement un homéomorphisme.

EXEMPLE : Dans la situation de la proposition 13, le groupe  $G$  agit sur  $E$  par automorphismes du revêtement  $E \rightarrow G \backslash E$ .

**Définition 5.1.8** On dit qu'un revêtement est trivial s'il est isomorphe à un revêtement trivial  $X \times S$ .

Noter que si  $S$  a plus d'un élément,  $X \times S$  n'est jamais connexe. Par conséquent, un revêtement  $p : E \rightarrow X$  avec  $E$  connexe n'est trivial que si c'est un homéomorphisme.

EXEMPLE : Soit  $G \subset \mathbb{R}^n$  le groupe engendré par  $n$  translations linéairement indépendantes. Le revêtement associé est isomorphe au produit de  $n$  copies du revêtement exponentiel  $\mathbb{R} \rightarrow U$ .

En effet, à changement linéaire de coordonnées près, on peut supposer que  $G = \mathbb{Z}^n$  est l'ensemble des translations par les vecteurs à coordonnées entières.

Voici une manière de comprendre les morphismes de revêtements.

**Proposition 5.1.9** Soit  $p : E \rightarrow X$  et  $p' : E' \rightarrow X$  deux revêtements et  $m$  un morphisme de  $E$  vers  $E'$ . Alors

1. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  à la fois trivialisant pour  $p$  et  $p'$ . Soit  $\sigma$  une section locale de  $p$  définie de  $U$  dans  $U_i$ , alors  $m \circ \sigma$  est une section locale de  $p'$ .

2. Un morphisme de revêtement est un homéomorphisme local dont l'image est fermée.
3. Si  $E'$  est connexe alors, un morphisme de revêtements est un morphisme.

DÉMONSTRATION : Le premier point suit de la définition.

Montrons un résultat intermédiaire : soit  $U$  un ouvert connexe trivialisant à la fois pour  $p$  et  $p'$ , soit  $V$  une composante connexe de  $p^{-1}(U)$  alors  $m$  est un homéomorphisme de  $V$  sur une composante connexe de  $p'^{-1}(U)$ . Il est clair que  $m(V)$  est connexe et donc inclus dans une composante connexe  $V'$  de  $p'^{-1}(U)$ . Soit  $\sigma'$  la section de  $p'$  définie de  $U$  dans  $V'$ . Alors  $m = \sigma' \circ p$ . Ainsi  $m$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $V'$ .

Nous en déduisons immédiatement que  $m$  est un homéomorphisme local. Montrons que l'image est fermée : soit  $y$  un point qui n'appartient pas à l'image, soit  $U$  un voisinage connexe trivialisant à la fois pour  $p$  et  $p'$  de  $p(y)$  et  $V$  un voisinage de  $y$  telle que  $p'$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $U$ . Montrons que  $V$  n'intersecte pas  $m(E)$ , ceci montrera que  $m(E)$  est fermé. Soit  $z$  tel que  $m(z)$  appartiennent à  $V$ . Soit  $O$  la composante connexe de  $p^{-1}(U)$  contenant  $z$ . Comme  $m(O)$  est la composante connexe de  $p'^{-1}(U)$  contenant  $m(z)$ , c'est donc  $V$ . En particulier  $V$  est inclus tout entier dans  $m(E)$  et la contradiction.

Un homéomorphisme local étant une application ouverte, l'image  $m(E)$  est un ouvert. Son image est fermée par ce qui précède. Si  $E'$  est connexe nous en déduisons que  $m$  est surjective. Le résultat intermédiaire montre que  $m$  est un revêtement dont les ouverts trivialisant sont les composantes connexes des préimages par  $p'$  des ouverts trivialisant à la fois pour  $p$  et  $p'$ .

## 5.2 Relèvement des homotopies

### 5.2.1 Relèvements

**Définition 5.2.1** Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue. Un relèvement de  $f$  à  $E$ , c'est une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  telle que  $f = p \circ \tilde{f}$ . Si on se donne en plus des points bases  $y_0 \in Y$ ,  $x_0 \in X$ , et un relèvement  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  dans  $E$ , on parle de relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$ .

**Lemme 5.2.2** Lorsque  $Y$  est connexe, quand  $f$  admet un relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$ , il est unique.

DÉMONSTRATION : Soit  $\tilde{f}$  et  $\tilde{f}'$  deux relèvements d'origine  $\tilde{x}_0$ . Alors  $\{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$  est ouvert. En effet, au voisinage de  $\tilde{f}(y)$ ,  $p$  est un homéomorphisme, donc pour  $z$  proche de  $y$ , l'équation  $p(\tilde{x}) = f(z)$  admet une unique solution voisine de  $\tilde{f}(y)$ , c'est  $\tilde{f}(z) = \tilde{f}'(y)$ . Comme cet ensemble est non vide et fermé, c'est  $Y$ , donc  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .  $\square$

### 5.2.2 Relèvement des chemins

La proposition suivante généralise le théorème de relèvement du revêtement exponentiel. On organise la preuve différemment.

**Proposition 5.2.3** Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Tout chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  admet des relèvements. Si on fixe  $x_0 \in X$  et un relèvement  $\tilde{x}_0 \in E$  de  $x_0$ , il existe un unique relèvement  $\tilde{\gamma}$  d'origine  $\tilde{x}_0$ .

DÉMONSTRATION : On se donne une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , tel que pour tout  $i$ ,  $c[t_j, t_{j+1}]$  soit inclus dans un ouvert trivialisant  $O^j$ . On pose ensuite  $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$  et on note  $\sigma_i^j$  la section locale de  $p$  définie de  $O^j$  dans  $O_i^j$ .

Ensuite on construit par récurrence une suite  $i_1, \dots, i_n$  telle que

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit  $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$  sur l'intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$   $\square$

### 5.2.3 Relèvement des homotopies

La proposition suivante généralise l'invariance du degré par homotopie.

**Proposition 5.2.4** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $Y$  un espace topologique. Fixons des points bases  $y_0 \in Y$ ,  $x_0 \in X$  et un relèvement  $\tilde{x}_0 \in E$  de  $x_0$ . Soit  $F : [0, 1] \times Y \rightarrow X$  une homotopie entre deux applications  $f_0$  et  $f_1 : Y \rightarrow X$  envoyant  $y_0$  sur  $x_0$ . Si  $f_0$  possède un relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$ , il en est de même de  $F$ , et par conséquent de  $f_1$ .*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition précédente, pour chaque  $y \in Y$ , le chemin  $\gamma_y : s \mapsto F(s, y)$  possède un unique relèvement  $\tilde{\gamma}_y$  d'origine  $\tilde{f}_0(y)$ . On pose  $\tilde{F}(s, y) = \tilde{\gamma}_y(s)$ . Pour montrer que  $\tilde{F}$  est continue, il suffit de vérifier que le procédé de relèvement est continu, i.e. que deux chemins voisins se relèvent en deux chemins voisins. Or relever un chemin  $\gamma_y$ , c'est faire appel à un nombre fini de sections locales  $s_j$  (définies sur les ouverts trivialisants recouvrant le compact  $\gamma([0, 1])$ ). Les mêmes sections locales permettent de relever  $\gamma_z$  pour  $z$  proche de  $y$ .

Donnons une preuve plus précise, en utilisant la démonstration du relèvements des chemins. Nous nous donnons un point  $y$  de  $Y$  et le chemin  $c = \gamma_y$  défini plus haut. D'après la preuve du relèvement des chemins, nous avons une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , tel que pour tout  $i$ ,  $c[t_j, t_{j+1}]$  soit inclus dans un ouvert trivialisant  $O^j$ . On pose ensuite  $p^{-1}(O^j) = \sqcup_{i \in I} O_i^j$  et on note  $\sigma_i^j$  la section locale de  $p$  définie de  $O^j$  dans  $O_i^j$ .

Nous avons ensuite par récurrence une suite  $i_1, \dots, i_n$  définie de manière unique par la propriétés suivantes

$$\sigma_{i_j}^j(c(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(c(t_{j+1})).$$

Enfin, on définit  $\tilde{c} = \sigma_{i_j}^j(c)$  sur l'intervalle  $[t_j, t_{j+1}]$ .

Nous nous proposons de montrer que pour  $t$  appartenant à  $[t_j, t_{j+1}]$ , pour  $(z, s)$  au voisinage de  $(y, t)$  on a  $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$ . Ceci montrera que  $\tilde{F}$  est continue. Or pour  $z$  suffisamment proche de  $y$  on a par continuité de  $F$

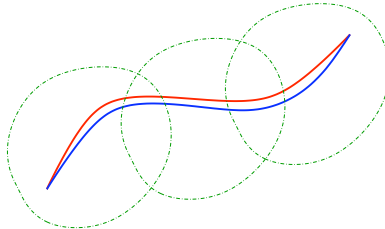
$$\begin{aligned} \gamma_z[t_j, t_{j+1}] &\subset O^j, \\ \sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) &\in O_{i_{j+1}}^{j+1}, \end{aligned}$$

car ce sont deux propriétés ouvertes. En particulier, comme les  $\sigma$  sont des sections locales on a

$$\sigma_{i_j}^j(\gamma_z(t_{j+1})) = \sigma_{i_{j+1}}^{j+1}(\gamma_z(t_{j+1})).$$

D'après la construction du relèvement des chemins, cela donne bien  $\tilde{F}(z, s) = \sigma_{i_j}^j F(z, s)$ .  $\square$

$\square$



**Corollaire 5.2.5** *Soit  $\alpha, \beta$  deux chemins dans  $X$  de mêmes extrémités  $x_0$  et  $x_1$ . Soit  $\tilde{x}_0 \in E$  un relèvement de  $x_0$ . Soit  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  les relèvements de  $\alpha$  et  $\beta$  d'origine  $\tilde{x}_0$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont homotopes à extrémités fixées,  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ . En particulier, si  $\alpha$  est un lacet homotope à une constante,  $\tilde{\alpha}$  est un lacet.*

DÉMONSTRATION : Par l'hypothèse, l'homotopie  $F$  de  $\alpha$  à  $\beta$  satisfait  $F(s, 1) = x_1$  pour tout  $s$ . Son relèvement  $\tilde{F}$  satisfait  $\tilde{F}(s, 1) \in p^{-1}(x_1)$  pour tout  $s$ . Comme  $p^{-1}(x_1)$  est discret,  $\tilde{F}(s, 1)$  ne dépend pas de  $s$ , donc  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(0, 1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\beta}(1)$ .  $\square$

### 5.3 Critère de relevabilité

**Théorème 8** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement connexe,  $x_0 \in X$  un point base,  $\tilde{x}_0 \in E$  un relèvement de  $x_0$ . Soit  $Y$  un espace connexe et localement connexe par arcs, soit  $y_0 \in Y$  un point base. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue qui envoie  $y_0$  en  $x_0$ . Alors  $f$  possède un relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$  si et seulement si*

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)).$$

*Le relèvement est alors unique.*

DÉMONSTRATION : Supposons que  $f$  possède un relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ . Alors  $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$  donc son image est contenue dans celle de  $p_{\#}$ .

Réciproquement, supposons que l'image de  $f_{\#}$  est contenue dans celle de  $p_{\#}$ . Soit  $y \in Y$  et  $\gamma$  un chemin de  $y_0$  à  $y$ . Le chemin  $\alpha = f \circ \gamma$  de  $x_0$  à  $f(y)$  possède un relèvement  $\tilde{\alpha}$  d'origine  $\tilde{x}_0$ . Posons  $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$ . Si  $\gamma'$  est un autre lacet de  $y_0$  à  $y$ , alors le lacet  $\alpha' \cdot \alpha^{-1} = f_{\#}(\gamma' \cdot \gamma^{-1})$  dans  $X$  est homotope à un lacet de la forme  $p_{\#}(\beta)$  où  $\beta$  est un lacet dans  $E$  basé en  $x_0$ . Autrement dit, les chemins  $(p \circ \beta) \cdot \alpha$  et  $\alpha'$  sont homotopes à extrémités fixées dans  $X$ . Ils se relèvent donc en des chemins de même extrémités. Or l'unique relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$  de  $(p \circ \beta) \cdot \alpha$  est  $\beta \cdot \tilde{\alpha}$ . On conclut que  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$ . Nous définissons alors  $\tilde{f}$  par  $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$  ne dépend pas du choix du chemin  $\gamma$ .

Il nous reste à démontrer la continuité de  $\tilde{f}$ . Soit  $y$  un point quelconque de  $Y$ . Par construction nous avons une section locale  $\sigma$  définie sur un ouvert trivialisant  $O$  contenant  $f(y)$  et telle que  $\tilde{f}(y) = \sigma \circ f(y)$ . Pour conclure, il suffit de montrer que  $\tilde{f} = \sigma \circ f$  au voisinage de  $y$ . Soit donc  $U$  un voisinage connexe par arcs de  $y$  tel que  $f(U)$  soit inclus dans  $O$ . Soit  $z$  un point de  $U$ , nous pouvons alors trouver un chemin de  $y_0$  à  $z$  tel que  $c(1/2) = y$  et  $c[1/2, 1]$  soit inclus dans  $U$ . Soit par ailleurs  $\tilde{f}_c$  le relèvement de  $f \circ c$  partant de  $\tilde{x}_0$ . D'après ce que nous avons vu,  $\tilde{f}_c(1/2) = \tilde{f}(y)$ . Nous en déduisons par unicité du relèvement des chemins que  $\sigma^i \circ f \circ c$  coïncide avec  $\tilde{f}_c$  sur l'intervalle  $[1/2, 1]$ . En particulier,  $\sigma^i f(z) = \sigma^i \circ f \circ c(1) = \tilde{f}(z)$ .

EXEMPLE : Une application  $f : U \rightarrow U$  se relève à travers le revêtement  $z \mapsto z^n$  si et seulement si elle représente une classe d'homotopie divisible par  $n$ . Autrement dit, si et seulement si son degré est divisible par  $n$ .

En particulier,

**Corollaire 5.3.1** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement, soit  $x_0 \in X$  un point base,  $\tilde{x}_0 \in E$  un relèvement de  $x_0$ . Soit  $Y$  un espace connexe par arcs, simplement connexe et localement connexe par arcs, avec point base  $y_0$ . Toute application continue  $f : Y \rightarrow X$  envoyant  $y_0$  en  $x_0$  possède un (unique) relèvement à  $E$  d'origine  $\tilde{x}_0$ .*

$\square$

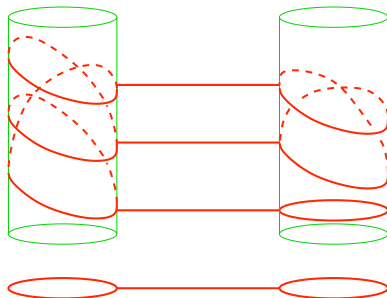
REMARQUES : Supposons  $E$  connexe par arcs. La réciproque du corollaire 5.2.5 est vraie si et seulement si  $E$  est simplement connexe.

**Lemme 5.3.2** Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Supposons  $E$  connexe par arcs. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

1. Pour tout lacet  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}$  est un lacet  $\Rightarrow \alpha$  est homotope à une constante.
2.  $E$  est simplement connexe.

DÉMONSTRATION : Si  $E$  est simplement connexe, un relèvement  $\tilde{\alpha}$  qui est un lacet est homotope à une constante, donc  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$  l'est aussi. Réciproquement, soit  $\tilde{\gamma}$  un lacet dans  $E$  basé en  $\tilde{x}_0$ . C'est un relèvement du lacet  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ . Par hypothèse,  $\gamma$  est homotope à une constante dans  $X$ . Soit  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une homotopie du lacet constant  $1_{x_0}$  à  $\gamma$ . Comme  $1_{x_0}$  se relève en le lacet constant  $1_{\tilde{x}_0}$ ,  $F$  se relève en  $\tilde{F}$ , qui est une homotopie de  $1_{\tilde{x}_0}$  à  $\tilde{\gamma}$ .  $\square$

EXERCICE : La figure suivante représente un revêtement à 3 feuillets. Soit  $x_0$  le sommet de droite de  $X$ . Déterminer les relèvements de divers lacets basés en  $x_0$ , pour diverses origines  $\tilde{x}_0$ . En déduire que certains lacets ne sont pas homotopes à une constante.



## Chapitre 6

# Revêtement universel

### 6.1 Construction d'un revêtement simplement connexe

Supposons que  $X$  admette un revêtement  $p : E \rightarrow X$  simplement connexe. Soit  $U \subset X$  un ouvert trivialisant. Alors tout lacet  $\gamma$  contenu dans  $U$  se relève en un lacet  $\tilde{\gamma}$  de  $E$ . Comme  $\tilde{\gamma}$  est homotope à une constante, il en est de même de  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ . Cela motive la définition suivante.

**Définition 6.1.1** *Un espace connexe par arcs  $X$  est dit semi-localement simplement connexe si tout point  $x$  admet un voisinage  $U$  tel que tout lacet basé en  $x$ , contenu dans  $U$  soit homotope à une constante dans  $X$ .*

**Théorème 9** *Soit  $X$  un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors  $X$  possède un revêtement  $E$  connexe et simplement connexe.*

#### Topologie de la convergence uniforme

**Définition 6.1.2** *Si  $Y$  et  $X$  sont deux espaces topologique, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace  $C(Y, X)$  des applications continues de  $X$  sur  $Y$  est la topologie engendrée par les ouverts  $\mathcal{E}_{K,U}$  où  $K$  est un compact de  $Y$ ,  $U$  est un ouvert de  $X$  et*

$$\mathcal{E}_{K,U} = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Nous avons alors

**Lemme 6.1.3** *Soit  $X$  un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit  $\gamma$  un chemin. Il existe alors un voisinage  $O$  de  $\gamma$  dans  $C([0, 1], X)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, tel que tout chemin de même extrémités que  $\gamma$  appartenant à  $O$  est homotope à  $\gamma$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$  une subdivision de l'intervalle,  $U_i$  des voisinages de  $\gamma(t_i)$

- Tout lacet tracé dans  $U_i$  est homotope à une constante.
- $U_i \cap U_{i+1}$  contient un voisinage  $O_i$  de  $\gamma(t_i)$  connexe par arcs.
- $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset U_i$ .

Nous laissons au lecteur le soin de montrer que de tels voisinages et subdivision existent Soit

$$O = \{c \in C([0, 1], X) \mid \gamma[t_i, t_{i+1}] \subset U_i, \gamma(t_i) \in O_i\}.$$

Par définition de la topologie de la convergence uniforme  $O$  est un ouvert. Par ailleurs, soit  $c$  un chemin appartenant à  $O$  joignant les extrémités de  $\gamma$ . Nous allons montrer que  $c$  est homotope

à  $\gamma$ . Notons  $c_i$  et  $\gamma_i$  les restrictions de  $c$  et  $\gamma$  à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Soit  $l_i$  des chemins tracés dans  $O_i$  joignant  $c(t_i)$  à  $\gamma(t_i)$ . Alors  $\gamma_i \cdot l_{i+1}^{-1} \cdot c^{-1}l_i$  est homotope à une constante en particulier

$$c_i \sim l_i \cdot \gamma_i \cdot l_{i+1}^{-1}.$$

Ainsi

$$c \sim c_0 \cdot c_1 \dots c_{n-1} \sim \gamma_0 \cdot \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \sim \gamma.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.  $\square$

### Démonstration du théorème 9

DÉMONSTRATION : Fixons  $x_0 \in X$ . Soit  $C_{x_0}$  l'espace des chemins d'origine  $x_0$  dans  $X$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.

C'est un espace topologique connexe par arcs. En effet, chaque chemin  $\gamma$  se joint au chemin constant par l'application – dont il faut montrer qu'elle est continue –  $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ .

On note  $\tilde{p} : C_{x_0} \rightarrow X$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(1)$ . On note  $E = C_{x_0} / \sim$  l'espace quotient de  $C_{x_0}$  par la relation d'homotopie à extrémités fixées. Il est lui aussi connexe par arcs. L'application  $\tilde{p}$  passe au quotient en une application continue  $p : E \rightarrow X$ ,  $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ .

$p$  est un revêtement. En effet, soit  $x \in X$ , soit  $U$  le voisinage de  $x$  donné par l'hypothèse de simple connexité semi-locale. Quitte à le rétrécir, on peut supposer  $U$  connexe par arcs. Notons  $I$  l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins reliant  $x_0$  à  $x$ . Pour chaque  $x' \in U$ , fixons un chemin  $\delta_{x'}$  reliant  $x'$  à  $x$  dans  $U$ . Posons

$$U_i = \{[\gamma] \mid p(\gamma) \in U, [\gamma \cdot \delta_{p(\gamma)}] = i\}.$$

Comme tout les lacets tracés dans  $U$  sont homotopes à une application constante,  $U_i$  ne dépend pas du choix des chemins  $\delta_{x'}$ . D'après le lemme 6.1.3, chaque ensemble  $U_i$  est ouvert. De plus, l'hypothèse de simple connexité semi-locale, les ouverts  $U_i$  sont disjoints et  $p$  est une bijection de  $U_i$  sur  $U$ . On vérifie enfin, toujours en utilisant le lemme 6.1.3, que  $p$  est une application ouverte. Nous venons donc de montrer que  $p$  est un revêtement.

$E$  est simplement connexe. On utilise la remarque 5.3.2. Il suffit de montrer que si un lacet  $\alpha$  se relève en un lacet  $\sigma$  de  $E$ , alors  $\alpha$  est homotope à une constante. Pour chaque  $t \in [0, 1]$ ,  $\sigma(t)$  est un chemin de  $x_0$  à  $\alpha(t)$ .

Par définition de la topologie de la convergence uniforme, on vérifie que l'application qui à  $t$  associe le lacet  $\sigma(t)^{-1}\alpha_{[0,t]}$  est continue et donc constant car à valeurs dans un espace discret. Par conséquent, le lacet  $\sigma(1)$  est homotope à  $\alpha$ . Autrement dit, si  $\sigma$  est un lacet,  $\alpha$  est homotope à une constante.  $\square$

## 6.2 Propriété universelle

**Proposition 6.2.1** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement connexe par arcs et simplement connexe de  $X$ . Soit  $p' : E' \rightarrow X$  un autre revêtement. Soit  $\tilde{x}_0 \in E$  et  $\tilde{x}'_0$  des relèvements d'un même point base  $x_0 \in X$ . Alors il existe un unique morphisme  $m : E \rightarrow E'$  envoyant  $\tilde{x}_0$  en  $\tilde{x}'_0$ .*

DÉMONSTRATION : D'après le Corollaire 5.3.1, l'application  $p : E \rightarrow X$  possède un relèvement  $\tilde{p} : E \rightarrow E'$ , tel que  $p = p' \circ \tilde{p}$  et  $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ . C'est un morphisme de revêtements. Inversement, si  $m : E \rightarrow E'$  est un morphisme de revêtements, alors  $p = p' \circ m$ , donc  $m$  est un relèvement de  $p$ . D'après le Corollaire 5.3.1, la condition sur les points bases le rend unique.  $\square$

REMARQUES : Lorsque  $E'$  est connexe,  $m : E \rightarrow E'$  est un revêtement. On peut donc penser au revêtement  $E'$  comme à un revêtement intermédiaire entre  $X$  et  $E$ .

EXEMPLE : Les revêtements finis du cercle  $z \mapsto z^n$ ,  $U \rightarrow U$ , sont eux mêmes revêtus par le revêtement exponentiel.

### 6.2.1 Unicité du revêtement simplement connexe

**Théorème 10** *Soit  $X$  un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit  $x_0 \in X$  un point base. Soit  $p : E \rightarrow X$  et  $p' : E' \rightarrow X$  deux revêtements connexes et simplement connexes de  $X$ . Soit  $\tilde{x}_0 \in E$  et  $\tilde{x}'_0 \in E'$  des relèvements de  $x_0$ . Il existe un unique isomorphisme de revêtements  $f : E \rightarrow E'$  envoyant  $\tilde{x}_0$  en  $\tilde{x}'_0$ .*

DÉMONSTRATION : Résulte de la propriété universelle.  $\square$

Autrement dit, une fois fixés des points bases, le revêtement connexe et simplement connexe de  $X$  est canoniquement défini, i.e. unique à unique isomorphisme près.

**Terminologie.** On appelle le revêtement simplement connexe *revêtement universel*.

EXERCICE : Soit  $X$  le graphe de l'exercice 5.3. Déterminer le revêtement universel de  $X$  (c'est un arbre infini de valence 3, comment s'enroule-t'il autour de  $X$  ?

### 6.2.2 Automorphismes du revêtement universel

**Notation.** On note  $\text{Aut}(E/X)$  le groupe des automorphismes d'un revêtement  $p : E \rightarrow X$ .

**Théorème 11** *Soit  $X$  un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement simplement connexe de  $X$ . Alors Pour tout  $x_0 \in X$ ,  $\text{Aut}(E/X)$  agit simplement transitivement sur  $p^{-1}(x_0)$ .*

DÉMONSTRATION : Cela résulte du théorème 10 : étant donnés deux relèvements  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'_0$  de  $x_0$ , il existe un unique isomorphisme du revêtement  $f : E \rightarrow E$  envoyant  $\tilde{x}_0$  en  $\tilde{x}'_0$ .  $\square$

EXEMPLE : Pour le revêtement exponentiel, les automorphismes du revêtement sont les translations d'un multiple de  $2\pi$ .

## Chapitre 7

# Revêtements et groupe fondamental

On s'oriente vers la classification des revêtements d'un espace  $X$ . On va voir que  $X$  admet presque toujours un revêtement connexe plus grand que tous les autres (les autres en sont des quotients), c'est celui qui est simplement connexe.

Commençons par un exemple

### Revêtements du cercle

**Proposition 7.0.2** *Tout revêtement connexe du cercle est isomorphe ou bien au revêtement exponentiel  $\mathbb{R} \rightarrow U$ , ou bien à l'un (et un seul) des revêtements  $z \mapsto z^n$ ,  $n \geq 1$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $p : E \rightarrow U$  un revêtement. L'application exponentielle  $t \mapsto e^{it}$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow U$  admet un relèvement  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ . Alors  $f$  est un morphisme de revêtements.

Si  $f$  est injective,  $f$  est un isomorphisme, c'est fini.

Supposons  $f$  non injective. Si  $t < t' \in \mathbb{R}$  et  $f(t) = f(t')$ , alors  $e^{it} = e^{it'}$  donc  $t' - t$  est un multiple entier strictement positif de  $2\pi$ . Soit  $2\pi n$  le plus petit multiple rencontré, i.e. il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(t_0 + 2\pi n) = f(t_0)$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$ , notons  $\gamma_s = p \circ f_{[s, s+2\pi n]}$ . C'est un lacet dans  $U$ . Comme tous les  $\gamma_s$  sont homotopes et  $\gamma_{t_0}$  admet un relèvement à  $E$ , il en est de même de  $\gamma_s$ . Comme le relèvement  $\tilde{\gamma}_{t_0}$  est un lacet, il en est de même de  $\tilde{\gamma}_s$ . Autrement dit,  $f(s + 2\pi n) = f(s)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $f$  passe au quotient en  $g : \mathbb{R}/2\pi n\mathbb{Z} \rightarrow E$  qui est un morphisme de revêtements injectif, donc un isomorphisme.

Le degré permet de distinguer les revêtements  $z \mapsto z^n$  entre eux. En effet, si  $p : U \rightarrow U$  et  $p' : U \rightarrow U$  sont des revêtements, et  $m : U \rightarrow U$  un homéomorphisme tel que  $p' \circ m = p$ , alors  $\deg(p) = \deg(m)\deg(p') = \pm \deg(p')$ .  $\square$

Réglons d'abord le sort des revêtements non connexes.

## 7.1 Revêtements non connexes

**Définition 7.1.1** *Un espace topologique  $X$  est dit localement connexe (resp. par arcs) si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).*

**Proposition 7.1.2** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Supposons  $X$  localement connexe par arcs. Soit  $E'$  une composante connexe de  $E$ . Alors  $p|_{E'} : E' \rightarrow X$  est un revêtement.*

Autrement dit, un revêtement non connexe est une union disjointe de revêtements connexes.

DÉMONSTRATION : Soit  $x \in X$ , soit  $U$  un voisinage trivialisant de  $x$ , i.e. il existe des sections  $s_i$  au-dessus de  $U$  telles que  $p^{-1}(U) = \sqcup_i s_i(U)$ . Quitte à rétrécir  $U$ , on peut le supposer connexe. Alors les  $s_i(U)$  sont connexes, donc chacun est ou bien contenu dans ou bien disjoint de  $E'$ . Par conséquent,

$$p_{|E'}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap E' = \sqcup_{\{i \mid s_i(U) \subset E'\}} s_i(U).$$

□

## 7.2 Action sur la fibre

**Notation.** On note toujours  $\text{Aut}(E/X)$  le groupe des automorphismes d'un revêtement  $p : E \rightarrow X$ .

**Définition 7.2.1** Soit  $\gamma$  un lacet basé en  $x_0$ . Soit  $\tilde{x}_0$  un point de  $p^{-1}(x_0)$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  le relevé de  $\gamma$  partant de  $\tilde{x}_0$ . Nous définissons l'action à droite de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $p^{-1}(x_0)$  par

$$\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] := \tilde{\gamma}(1).$$

On vérifie aisément que ceci définit une action à droite de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $p^{-1}(x_0)$ .

**Théorème 12** Soit  $X$  un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement de  $X$ . Alors

1. L'action à droite de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $p^{-1}(x_0)$  est transitive et commute avec l'action à gauche de  $\text{Aut}(E/X)$ .
2. Le stabilisateur de  $\tilde{x}_0$  est le sous-groupe  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ .
3. Enfin si  $E$  est simplement connexe, cette action est simplement transitive, et le choix d'un point  $\tilde{x}_0$  dans  $p^{-1}(x_0)$  définit un isomorphisme de  $\pi_1(X, x_0)$  avec  $\text{Aut}(E/X)$ .

**Corollaire 7.2.2** Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  sont deux éléments de la fibre  $p^{-1}(x_0)$ , les sous-groupes  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$  et  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$  sont conjugués dans  $\pi_1(X, x_0)$ . Tous les sous-groupes de  $\pi_1(X, x_0)$  conjugués à  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}))$  sont de la forme  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'))$  pour un choix de  $\tilde{x}'$ .

Ce corollaire découle d'une propriété générale pour les actions transitives.

DÉMONSTRATION :

1. L'action est transitive, car un chemin entre deux points de la fibre est le relèvement de son image dans  $X$  et cette image est un lacet. Cette action, qui ne fait pas intervenir de choix d'origine dans  $E$ , commute avec l'action à gauche de  $\text{Aut}(E/X)$ . Plus précisément, si  $\phi$  est un automorphisme du revêtement,  $\tilde{x}_0$  un point de la fibre,  $\tilde{\gamma}$  le relevé du lacet  $\gamma$  partant de  $\tilde{x}_0$ , alors  $\phi \circ \tilde{\gamma}$  est le relevé du lacet  $\gamma$  partant de  $\phi(\tilde{x}_0)$ . Autrement dit

$$\phi(\tilde{x}_0 \cdot [\gamma]) = \phi(\tilde{\gamma}(1)) = \phi \circ \tilde{\gamma}(1) = \phi(\tilde{x}_0) \cdot [\gamma].$$

C'est-à-dire les actions de  $\text{Aut}(E/X)$  et du groupe fondamental commutent.

2. Si un lacet stabilise un point, cela signifie qu'il se relève en un lacet de  $E$  et donc qu'il appartient à  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ .
3. Supposons  $E$  simplement connexe. Fixons un relèvement  $\tilde{x}_0$ . L'application, bijective par le deuxième point et le théorème 12,  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$  qui à  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$  associe l'unique  $f \in \text{Aut}(E/X)$  tel que  $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$  est un isomorphisme de groupes car les deux actions commutent.

□

EXERCICE : Soit  $p : X \rightarrow E$  le revêtement de l'exercice 5.3. Vérifier, pour quelques exemples, que les lacets de  $X$  qui se relèvent en des lacets de  $E$  sont bien dans l'image du groupe fondamental  $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$  (cela dépend de  $\tilde{x}_0$ ) ?

### 7.3 Construction de revêtements intermédiaires

On a vu que le revêtement  $z \mapsto z^n$  du cercle unité  $U$  pouvait s'obtenir en quotientant le revêtement universel  $t \mapsto e^{it}$  par le sous-groupe  $2\pi n\mathbb{Z}$  du groupe de ses automorphismes. Cette construction est générale.

**Théorème 13** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement simplement connexe. Soit  $H$  un sous-groupe du groupe  $\text{Aut}(E/X)$  des automorphismes de  $E$ . Alors*

1. *L'espace quotient  $E' = H \backslash E$  est séparé et la projection  $E \rightarrow H \backslash E = E'$  est un revêtement. Le groupe  $\text{Aut}(E/E')$  coïncide avec  $H$ .*
2. *La projection  $p$  passe au quotient en un revêtement  $p' : E' \rightarrow X$ .*
3. *Le groupe fondamental de  $E'$  est isomorphe à  $H$ , l'isomorphisme est obtenu en composant  $p'_\# : \pi_1(E', \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  et l'isomorphisme  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$  du théorème 12.*

DÉMONSTRATION : Soit  $\tilde{x}, \tilde{y}$  deux points de  $E$  qui ne sont pas dans la même orbite de  $H$ .

Premier cas :  $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ . Notons  $x = p(\tilde{x})$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert trivialisant de  $x$  dans  $X$ , i.e. il existe des sections locales  $s_j$  au-dessus de  $U$ , indexées par les éléments de  $J = p^{-1}(x)$ , telles que  $p^{-1}(U) = \sqcup_{j \in p^{-1}(x)} s_j(U)$ . Le groupe  $\text{Aut}(E/X)$  agit simplement transitivement sur  $p^{-1}(x)$ . Alors  $V_{\tilde{x}} = \sqcup_{j \in H\tilde{x}} s_j(U)$  et  $V_{\tilde{y}} = \sqcup_{j \in H\tilde{y}} s_j(U)$  sont des ouverts saturés de  $E$  contenant respectivement les orbites de  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$ . Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient  $E' = H \backslash E$ .

Deuxième cas :  $p(\tilde{x}) \neq p(\tilde{y})$ . Alors c'est encore plus simple. Soit  $U_x$  et  $U_y$  des voisinages trivialisants disjoints de  $x = p(\tilde{x})$  et  $y = p(\tilde{y})$  dans  $X$ . Alors  $p^{-1}(U_x)$  et  $p^{-1}(U_y)$  sont des voisinages saturés de  $E$  contenant respectivement les orbites de  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$ . Il leur correspond des voisinages disjoints dans l'espace quotient  $E' = H \backslash E$ . Ceci prouve que  $E'$  est séparé.

L'application  $p$  passe au quotient par définition même des automorphismes de revêtement. Si  $x \in X$ , soit  $J \subset p^{-1}(x)$  un sous-ensemble qui contient exactement un représentant de chaque orbite de  $H$ , soit  $U$  un voisinage trivialisant de  $x$  dans  $X$ . Alors l'ouvert  $V_J = \sqcup_{h \in H} s_{hj}(U)$  coupe chaque orbite de  $H$  en un seul point, cela définit une section  $s'_J : U \rightarrow E'$  de  $p'$  au-dessus de  $U$ , et  $p'^{-1}(U) = \sqcup_{j \in J} V_J$ , donc  $p'$  est un revêtement, et la projection  $m : E \rightarrow E'$  un morphisme de revêtements.

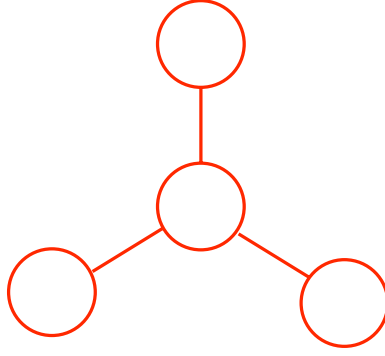
Soit  $\tilde{x}_0$  un point base dans  $E$ . Soit  $h \in H$ , soit  $\gamma$  un chemin de  $\tilde{x}_0$  à  $h\tilde{x}_0$  dans  $E$ . Son image dans  $E'$  est un lacet  $\gamma'$  basé en  $\tilde{x}'_0 = m(\tilde{x}_0)$ . Notons  $\alpha = p' \circ \gamma' = p \circ \gamma$ . C'est un lacet dans  $X$  basé en  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ , et représentant la classe  $p_\#([\gamma']) \in \pi_1(X, x_0)$ . D'après le théorème 12, il lui correspond la transformation de revêtement  $g \in \text{Aut}(E/X)$  telle que  $g(\tilde{x}_0)$  soit l'extrémité de l'unique relèvement de  $\alpha$  d'origine  $\tilde{x}_0$  dans  $E$ . Or ce relèvement, c'est  $\gamma$ , donc  $g = h$ . Inversement, si  $\alpha'$  est un lacet dans  $E'$  basé en  $\tilde{x}'_0$ , il possède un relèvement  $\gamma$  d'origine  $\tilde{x}_0$  dans  $E$ , d'extrémité  $g(\tilde{x}_0)$ . Comme  $m(g(\tilde{x}_0)) = m(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ ,  $g \in H$ , donc  $\simeq \circ p_\#([\alpha']) \in H$ .

On a donc montré que l'image de  $\simeq \circ p_\# : \pi_1(E', \tilde{x}'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(E/X)$  est exactement le sous-groupe  $H$ . L'injectivité de cet homomorphisme résulte du lemme suivant.  $\square$

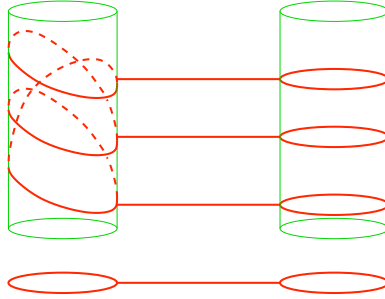
**Lemme 7.3.1** *Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement connexe,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in E$  un relèvement de  $x_0$ . La projection  $p$  induit un homomorphisme injectif  $p_\# : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .*

DÉMONSTRATION : En effet, soit  $\gamma \in E$  un lacet basé en  $\tilde{x}_0$ . Supposons  $\alpha = p \circ \gamma$  homotope à une constante. Alors l'homotopie  $F$  de  $\alpha$  au lacet constant  $1_{\tilde{x}_0}$  se relève en une homotopie de  $\gamma$  à un lacet contenu dans un fibre, donc constant. On conclut que  $\gamma$  est trivial dans  $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$ , donc que  $p_\#$  est injective.  $\square$

EXERCICE : Soit  $E$  le graphe de la figure suivante. Vérifier que l'action du groupe  $H$  des rotations d'ordre 3 sur  $E$  définit un revêtement  $E \mapsto H \backslash E = X$ , et le représenter graphiquement dans le style de la figure de l'exercice 5.3.



**Solution.**



## 7.4 Classification des revêtements connexes

On va établir une bijection entre classes d'isomorphismes de revêtements connexes  $p : E \rightarrow X$  et classes de conjugaison de sous-groupes  $H \subset \pi_1(X, x_0)$ .

**Théorème 14** Soit  $p : E \rightarrow X$  et  $p' : E' \rightarrow X$  des revêtements connexes,  $x_0 \in X$  un point base,  $\tilde{x}_0 \in E$  et  $\tilde{x}'_0 \in E'$  des relèvements de  $x_0$ .

1. Il existe un morphisme de revêtements  $m : E \rightarrow E'$  envoyant  $\tilde{x}_0$  en  $\tilde{x}'_0$  si et seulement si  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p'_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$ .
2. Il existe un morphisme de revêtements  $m : E \rightarrow E'$  si et seulement s'il existe un conjugué de  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  dans  $\pi_1(X, x_0)$  qui est contenu dans  $p'_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$ .
3. Les revêtements  $E$  et  $E'$  sont isomorphes si et seulement si  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  et  $p'_{\#}(\pi_1(E', \tilde{x}'_0))$  sont conjugués dans  $\pi_1(X, x_0)$ .

**DÉMONSTRATION :** Un morphisme de revêtements  $m : E \rightarrow E'$ , c'est la même chose qu'un relèvement de  $p : E \rightarrow X$  à  $E'$ .  $\square$

**Corollaire 7.4.1** Supposons  $X$  connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. L'application qui à un revêtement  $p : E \rightarrow X$  associe le sous-groupe  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$  induit une bijection entre classes d'isomorphisme de revêtements et classes de conjugaison de sous-groupes de  $\pi_1(X, x_0)$ . La bijection réciproque consiste à quotienter le revêtement universel de  $X$  par un sous-groupe de son groupe d'automorphismes.

**DÉMONSTRATION :** Résulte des propositions 13 et 14.  $\square$

**EXEMPLE :** Il y a autant de revêtements du cercle, à isomorphisme près, que de sous-groupes dans  $\mathbb{Z}$ .

Comme  $\mathbb{Z}$  est commutatif, il n'y a pas lieu de parler de conjugaison.

REMARQUES : Dans cette correspondance entre revêtements connexes pointés et sous-groupes du groupe fondamental, il y a aussi une correspondance entre morphismes et injections de sous-groupes. On parle d'*équivalence de catégories*.

### 7.4.1 Revêtements galoisiens

On se demande si, en dehors du revêtement universel, il existe des revêtements qui possèdent beaucoup d'automorphismes.

EXEMPLE : Le revêtement à 3 feuillets de l'exercice 5.3 ne possède aucun automorphisme autre que l'identité.

En effet, le graphe  $E$  contient un sommet uniquement caractérisé par la propriété suivante : les deux extrémités d'une même arête s'y confondent. Tout homéomorphisme (et *a fortiori* tout automorphisme) doit fixer ce point. Or un automorphisme qui fixe un point est l'identité. Autrement dit, étant donné un point de  $E$ , il n'est pas possible de choisir continûment un point parmi les deux autres points de sa fibre.

Sachant qu'un automorphisme est uniquement déterminé par son action sur une fibre, ce qu'on peut demander de plus, c'est la transitivité sur une fibre.

**Définition 7.4.2** *Un revêtement  $p : E \rightarrow X$  est dit galoisien si son groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(E/X)$  agit transitivement sur les fibres.*

REMARQUES : Si  $X$  est connexe, il suffit que ce soit vrai pour une fibre.

En effet, l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\text{Aut}(E/X)$  agisse transitivement sur  $p^{-1}(x)$  est une réunion d'ouverts trivialisants, donc est ouvert et fermé.

EXEMPLE : Les revêtements triviaux, le revêtement universel sont galoisiens.

**Proposition 7.4.3** *On suppose  $X$  localement connexe par arcs. Un revêtement connexe  $p : E \rightarrow X$  est galoisien si et seulement si le sous-groupe  $p_{\#}(\pi_1(E)) \subset \pi_1(X)$  est distingué. Dans ce cas,  $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/p_{\#}(\pi_1(E))$  (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

DÉMONSTRATION : Un morphisme de revêtement, c'est un relèvement de  $p$ . D'après le critère de relevabilité, il existe un morphisme de revêtement envoyant  $\tilde{x}_0$  sur  $\tilde{x}'_0$  si et seulement si  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$ , et un automorphisme si et seulement si  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}'_0))$ . Donc, avec le corollaire 7.2.2, si  $\text{Aut}(E/X)$  est transitif, tous les conjugués de  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  coïncident, donc ce sous-groupe est distingué. Et réciproquement.

Si  $p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  est distingué, il agit trivialement (à droite) sur la fibre de  $x_0$ . Par conséquent, le groupe quotient  $G = \pi_1(X, x_0)/p_{\#}(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  agit à droite sur la fibre, simplement transitivement d'après la proposition ?? . De son côté, le groupe  $\text{Aut}(E/X)$  agit à gauche simplement transitivement sur la fibre, les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes.  $\square$

EXEMPLE : Existe-t'il des revêtements non galoisiens à deux feuillets ?

Plus généralement,

**Proposition 7.4.4** *On suppose  $X$  localement connexe par arcs. Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement connexe, soit  $\tilde{x}_0$  et  $x_0$  des points bases. Notons  $G = \pi_1(X, x_0)$  et  $H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ . Soit  $N_G(H)$  le normalisateur de  $H$  dans  $G$ , i.e. l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que  $g^{-1}Hg \subset H$ . Alors  $\text{Aut}(E/X) \simeq N_G(H)/H$  (isomorphisme qui dépend du choix d'un point base).*

DÉMONSTRATION : Soit  $g \in G$ . Alors  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot g)) = g^{-1}p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))g = g^{-1}Hg$ . D'après le critère de relevabilité, il existe  $h \in \text{Aut}(E/X)$  tel que  $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot g$  si et seulement si  $g^{-1}Hg \subset H$ . Autrement dit, l'orbite à gauche de  $\tilde{x}_0$  sous  $\text{Aut}(E/X)$  coïncide avec l'orbite à droite de  $\tilde{x}_0$  sous  $N_G(H)$ . Sur cette orbite,  $\text{Aut}(E/X)$  agit à gauche simplement transitivement. D'après la proposition ??, le stabilisateur de  $\tilde{x}_0$  est  $H$ . Or  $H$  est distingué dans  $N_G(H)$ , donc  $H$  fixe chaque point de l'orbite. Autrement dit, le groupe quotient  $N_G(H)/H$  agit à droite simplement transitivement sur l'orbite. Les deux actions commutent, ce qui donne un isomorphisme entre les deux groupes.  $\square$

EXEMPLE : Cas du revêtement non galoisien à 3 feuillets de l'exercice 5.3.

Prenons le sommet spécial de  $E$  comme point base  $\tilde{x}_0$ , et  $x_0$  son image. Le graphe  $X$  a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 2 générateurs  $a$  et  $b$ , où  $a$  est représenté par la boucle de sommet  $x_0$  et  $b$  par un lacet qui va faire le tour de l'autre boucle sans repasser par  $x_0$ . Pour spécifier uniquement  $a$  et  $b$ , il suffit d'orienter chacune des boucles. Ces orientations se relèvent à  $E$ .

Le graphe  $E$  a une connectivité égale à 4, donc son groupe fondamental est un groupe libre à 4 générateurs  $c, d, e$  et  $f$ , où

- $c$  est représenté par la boucle de sommet  $\tilde{x}_0$  parcourue dans le sens positif, de sorte que  $p_*(c) = a$ ,
- $d$  par un lacet qui ne recoupe pas la fibre de  $x_0$ , parcouru dans le sens positif, de sorte que  $p_*(d) = b^3$ ,
- $e$  par un lacet obtenu comme suit : on traverse de  $x_0$  au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de  $c$ , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on suit positivement la boucle qui entoure deux fois le second cylindre jusqu'au niveau 3, on retransverse de droite à gauche, on redescend positivement le long de  $c$ , et on rejoint  $x_0$ , de sorte que  $p_*(e) = bab$ ,
- $f$  obtenu comme suit : on traverse de  $x_0$  au sommet du bas à gauche, on monte positivement d'un tour le long de  $c$ , on traverse de gauche à droite au niveau 2, on fait positivement le tour complet de la boucle qui entoure deux fois le second cylindre, ce qui ramène au niveau 2, on retransverse de droite à gauche, on redescend négativement le long de  $c$ , et on rejoint  $x_0$ , de sorte que  $p_*(f) = ba^2b^{-1}$ .

Il résulte de la proposition 7.4.4 que le normalisateur dans  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  du sous-groupe engendré par  $a, b^3, bab$  et  $ba^2b^{-1}$  est réduit à ce sous-groupe. Il résulte de la proposition ?? que le sous-groupe de  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  engendré par  $a, b^3, bab$  et  $ba^2b^{-1}$  est d'indice 3. Ce n'est pas facile à montrer directement. C'est une illustration du fait que la théorie des revêtements est réellement utile pour démêler des questions combinatoires sur les groupes. Voici une autre illustration.

**Théorème 15** Nielsen-Schreier. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

DÉMONSTRATION : Puisqu'on n'a parlé que de graphes finis et de groupes libres de type fini, seul le cas des sous-groupes d'indice fini d'un groupe libre de type fini est à notre portée. Voici tout de même l'argument général. Tout groupe libre est le groupe fondamental d'un graphe. Tout sous-groupe est le groupe fondamental d'un revêtement de ce graphe (proposition 13). Comme un revêtement d'un graphe est un graphe, et comme le groupe fondamental d'un graphe est libre (proposition 4.3.1, dans le cas des graphes finis), le sous-groupe est libre.  $\square$

### 7.4.2 Revêtements du tore

EXERCICE : Classifier les revêtements connexes du tore  $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ .

**Solution.**

D'après la proposition 13, La projection  $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$  est un revêtement. Comme  $\mathbb{R}^2$  est simplement connexe, il s'agit du revêtement universel. En particulier,  $T^2$  est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Le groupe d'automorphismes de ce revêtement est le groupe  $\mathbb{Z}^2$  agissant par translations sur  $\mathbb{R}^2$ .

D'après le corollaire 7.4.1, il y a exactement autant de revêtements de  $T^2$  que de sous-groupes du groupe  $\mathbb{Z}^2$ , le revêtement associé à un sous-groupe  $H$  est le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par  $H$  agissant par translations sur  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $\mathbb{Z}^2$  est commutatif, le revêtement est automatiquement galoisien, son groupe d'automorphisme, isomorphe à  $\mathbb{Z}^2/H$ , agit simplement transitivement sur chaque fibre, en particulier sur la fibre de  $0 \in T^2$ , qui est constituée des “points à coordonnées entières” de  $E$ .

Un groupe abélien de type fini possède un rang, nombre de générateurs minimal de sa partie libre. Dans le cas d'un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$ , le rang est inférieur ou égal à 2.

Lorsque le rang vaut 0,  $H = \{0\}$ ,  $E = \mathbb{R}^2$  est le revêtement universel.

Lorsque le rang vaut 1,  $H$  est engendré par un vecteur entier  $v$ .  $E$  est homéomorphe à un cylindre. Si  $v$  est primitif (i.e. ses composantes sont des entiers premiers entre eux), le groupe quotient  $\mathbb{Z}^2/H$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, chaque orbite de ce groupe (qui s'identifie à une fibre de la projection  $E \rightarrow T^2$  car le revêtement est galoisien) est une spirale qui passe par tous les points entiers du cylindre. Si  $d$  est le pgcd des composantes de  $v$ , le groupe quotient  $\mathbb{Z}^2/H$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ . Un élément (le générateur  $v/d$  de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ) agit par rotation pure autour de l'âme du cylindre. Les points entiers du cylindre se regroupent en  $d$  spirales disjointes permutées circulairement par  $v/d$ .

Lorsque le rang vaut 2, il existe une base  $(a, b)$  de  $\mathbb{Z}^2$  et deux entiers  $d$  et  $d'$  ( $d'$  multiple de  $d$ ) telle que  $H$  ait pour base  $da$  et  $d'b$ . Alors le groupe d'automorphismes du revêtement est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/d'\mathbb{Z})$ , il est fini. L'espace  $E$  est un tore, ses points entiers se regroupent de deux manières en spirales qui se referment, à  $d$  points et  $d'$  points respectivement. Lorsque  $d = d' = 1$ , et seulement dans ce cas, le revêtement est trivial.

## 7.5 A retenir

Soit  $X$  un espace connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe.

1. Tout revêtement connexe de  $X$  est un quotient  $H \backslash \tilde{X}$  du revêtement universel  $\tilde{X}$  par un sous-groupe  $H$  de  $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X)$ .
2. Deux revêtements de ce type sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes sont conjugués.
3. Le revêtement  $E = H \backslash \tilde{X}$  est galoisien si et seulement si  $H$  est distingué, et dans ce cas  $\text{Aut}(E/X) \simeq \pi_1(X)/H$ .

# Bibliographie

- [B1] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs*. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques*. CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, *Topologie des surfaces*. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, (1965).

# Table des matières

Laboratoire de Mathématique d'Orsay  
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.  
Université de Paris-Sud  
91405 Orsay, France  
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`  
`http ://www.math.u-psud.fr/~pansu`