Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante

François Labourie* Jean-Marc Schlenker**

14 Novembre 1995

Résumé

On montre l'existence et l'unicité des immersions isométriques équivariantes des surfaces riemanniennes dans les espaces lorentziens de dimension 3 à courbure constante sous des hypothèses impliquant la convexité, quand on impose que les représentations associées fixent un point.

Abstract

We show the existence and uniqueness of the equivariant isometric immersions of riemannian surfaces into Lorentz space-forms under conditions implying convexity, when we impose that the associated representations leave a point invariant.

1 Introduction

Décrivons brièvement les trois types d'espaces de dimension 3 simplement connexes lorentziens à courbure constante. Nous avons tout d'abord l'espace de

*Topologie et Dynamique (CNRS, URA 1169), Bat. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France ; labourie@topo.math.u-psud.fr

**Topologie et Dynamique (CNRS, URA 1169), Bat. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France ; schlenk@topo.math.u-psud.fr

Minkowski R^3_1 à courbure nulle. Ensuite, l'espace de Sitter S^3_1 à courbure constante 1 dont la réalisation géométrique est l'hyperboloïde à une nappe dans l'espace de Minkowski de dimension 4; en tant qu'espace homogène, il s'identifie avec $SO(3,1)/SO(2,1)$. Enfin, le dernier de ces espaces est Anti-de Sitter H^3_1 qui se décrit comme le revêtement universel de $SL(2,\mathrm{R})$ muni de la métrique de Killing, et qui en tant qu'espace homogène est, à un revêtement près, $SO(2,2)/SO(1,2)$. Remarquons que pour chacun de ces trois espaces M_i, la composante connexe $Iso(M_i, m_0)$ du groupe des isométries fixant un point m_0 est isomorphe à $PSL(2,\mathrm{R})$. De plus chaque orbite de type espace de ce groupe est isométrique au plan hyperbolique, le cas de l'espace de Minkowski étant bien connu. Ces orbites sont convexes en un sens que nous préciserons.

Nous nous intéresserons aux surfaces convexes invariantes sous un groupe d'isométries fixant un point. Plus précisement, soit (Σ, σ) une surface munie d'une métrique riemannienne, et (M, μ) une variété lorentzienne de dimension 3 à courbure constante; une *immersion isométrique équivariante* de (Σ, σ) dans (M, μ) est la donnée d'un couple (ϕ, ρ), où $\phi : \tilde{\Sigma} \to M$ est une immersion isométrique du revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ dans M, et où $\rho : \pi_1(\Sigma) \to Iso(M)$ est une représentation dans le groupe des isométries de M telle que

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall g \in \pi_1\Sigma,\ \phi(gs) = \rho(g)\phi(s)$$

Des objets similaires ont été étudiés par exemple dans [Lab92a], [Lab92b], et interviennent naturellement dans des problèmes de géométrie hyperbolique. Notre étude ne concernera que les situations où les conditions de courbure assurent que la surface immergée est localement convexe, c'est à dire que les courbures K_Σ et K_M de Σ et de M sont telles que $K_\Sigma < K_M$.

Les seules immersions isométriques proprement dites de surfaces compactes qui existent dans ce cadre concernent les sphères dans l'espace de Sitter S^3_1 (cf. [Sch]). Dans les trois cas possibles (courbure $0, +1, -1$) on va décrire les immersions isométriques équivariantes associées à une représentation qui fixe un point de M et obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit (M, μ) une variété lorentzienne de dimension 3 à courbure constante $K_0 \in \{-1, 0, 1\}$, (Σ, σ) une surface riemannienne compacte de genre g strictement plus grand que 1 à courbure $K < K_0$, et $m_0 \in M$. Supposons qu'il n'existe pas de géodésique contractile de longueur $L \leq 2\pi$ dans Σ. Il existe alors une immersion équivariante (ϕ, ρ) de (Σ, σ) dans M telle que ρ soit à valeurs dans $Iso(M, m_0)$, et elle est unique modulo $Iso(M, m_0)$. De plus, cette immersion est un plongement et l'image de la représentation est un groupe cocompact de la composante connexe de $Iso(M, m_0)$.*

Remarquons tout d'abord que d'après le théorème de Hadamard, l'hypothèse concernant les géodésiques fermées de $\tilde{\Sigma}$ n'apparaît que dans le cas où $K_0 = 1$;

dans ce cas, elle est nécessaire : en effet, si $(\tilde{\Sigma}, \sigma)$ admet une géodésique fermée de longueur $L \leq 2\pi$ alors $\tilde{\Sigma}$ n'admet pas d'immersion isométrique dans S^3_1 (cf. [Sch]).

Dans le cas particulier de l'espace de Minkowski, où nous montrerons que l'image de la surface est dans le cône lumière de m_0, on peut penser à ce théorème comme à une généralisation du modèle de Minkowski pour les surfaces à courbure négative variable.

Dans le cas de l'espace de Sitter, on peut donner une interprétation de ce résultat reposant sur la dualité entre H^3 et S^3_1 qui associe à un point de S^3_1 unjms plan de H^3 et réciproquement. Cette dualité se voit en utilisant le modèle de Minkowski de l'espace hyperbolique comme hypersphère dans R^4_1, elle associe à un point de l'hyperboloïde à une nappe vu comme vecteur de R^4_1, l'intersection de l'orthogonal à ce vecteur avec l'autre hyperboloïde, par extension elle donne naissance à une dualité entre surfaces dans chacun des espaces associant à chaque point x d'une surface S tracée dans l'hyperbolïde, l'intersection avec l'autre hyperboloïde de l'orthogonal à l'espace $\mathrm{R}x \oplus T_xS$. Elle transforme ainsi une surface convexe de métrique σ_0 fixée dans S^3_1 une surface convexe de H^3 dont la troisième forme fondamentale — c'est la forme quadratique qui mesure la variation du vecteur normal, donnée par $\mathrm{III}(x, y) = g(\nabla_x n, \nabla_y n)$ — est σ_0; par ailleurs, une isométrie de S^3_1 qui fixe un point correspond à une isométrie de H^3 qui fixe un plan. Notre résultat se traduit par: si Σ est une surface de genre $g \geq 2$ munie d'une métrique σ_0 à courbure $K > -1$ n'admettant pas de géodésique fermée contractile de longueur inférieure à 2π, alors il existe (modulo $Iso(\mathrm{H}^3)$) une unique immersion équivariante fuchsienne (c'est à dire qui fixe un plan) de Σ dans H^3 dont la troisième forme fondamentale est σ_0. Ceci est à rapprocher d'un résultat de M. Gromov [Gro86] qui a montré l'existence — mais pas l'unicité — d'une immersion isométrique équivariantejms fuchsienne dans H^3 pour toute surface (Σ, σ) de genre $g \geq 2$ à courbure $K > -1$. L'unicité semble plus facile à obtenir dans le cas lorentzien.

Donnons enfin une traduction du théorème 1.1 en termes de variétés de dimension 3 . Nous dirons qu'une variété M lorentzienne complète de dimension 3 à courbure constante K_0 à bord est un *bout convexe* si elle est homéomorphe à $S \times [0, 1[$, à courbure constante K_0 où S est une surface compacte, et si son bord est convexe ; nous dirons aussi qu'un tel bout est *fuchsien* s'il contient un sous-domaine de complémentaire compact feuilleté par des surfaces totalement ombiliques compactes. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2 *Soit $K_0 \in \mathrm{R}$, S une surface compacte, et σ une métrique sur S à courbure $K < K_0$ telle que la longueur de toute géodésique fermée contractile est strictement plus petite que 2π. Il existe alors un unique bout fuchsien convexe à courbure K_0 dont le bord soit (S, σ).*

On notera Σ une surface compacte de genre $g \geq 2$, munie d'une métrique riemannienne σ. Nous dirons qu'une immersion isométrique équivariante (ϕ, ρ) fixe un point m_0 si ρ est à valeurs dans $Iso(M, m_0)$. Enfin nous dirons qu'une représentation du groupe fondamental est *fuchsienne* si son image est un sous-groupe cocompact de $Iso(M, m_0)$, et qu'une immersion isométrique équivariante est *fuchsienne* si la représentation associée l'est. Enfin, on notera alternativement par M_{K_0}, ou M s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'espace à courbure constante K_0.

La démonstration de notre résultat principal utilise la méthode de continuité, et repose en particulier sur l'étude des dégénérescences locales de suites d'immersions isométriques faite dans [Sch].

2 Rappels et généralités

Nous allons dans cette section rappeler quelques résultats connus ou faciles qui nous seront utiles par la suite. On va d'abord s'intéresser aux suites d'immersions isométriques d'un disque dans une variété lorentzienne à courbure constante. L'étude est faite dans [Sch] et on obtient les deux résultats suivants. D'abord, le cas où il n'y a pas de dégénérescence est décrit par le :

THÉORÈME 2.1 *Soit $\phi_n : D \to M$ une suite d'immersions de type espace uniformément elliptiques — c'est à dire telle que le determinant de la deuxième forme fondamental est uniformément minoré par une constante strictment positive – d'une surface F telles que $(\phi^* g_0)_{n\in\mathrm{N}}$ converge C^∞ vers une métrique g_∞ et que la suite des intégrales des courbures moyennes H_n soit majorée par une constante, et soit $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de points de F telle que (x_n) et $(j^1\phi_n(x_n))$ convergent. Alors il existe une suite extraite de ϕ_n qui converge C^∞ sur tout compact vers une immersion isométrique.*

Ensuite, un autre énoncé décrit ce qui se passe quand la limite est au contraire singulière :

THÉORÈME 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}} : D \to M$ une suite d'immersions de type espace uniformément elliptiques d'une surface F, telle que $(f_n^* g_0)_{n\in\mathrm{N}}$ converge C^∞ vers g_∞. Soit $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de points de F convergeant vers x_∞ telle que $(j^1 f_n(x_n))$ converge, mais sans que (f_n) converge C^∞ au voisinage de x_∞. Alors il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, qu'on notera encore $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, une géodésique maximale $\gamma \ni x_\infty$ de (D, g_∞), et un segment géodésique Γ de M, tels que $(f_{n|\gamma})$ converge vers une isométrie sur Γ.*

On peut noter que ces résultats sont reliés à un énoncé beaucoup plus général de [Lab95] concernant les équations de Monge-Ampère de type elliptique sur les surfaces.

L'approche que nous allons utiliser dans la suite suivra le schéma classique suivant. On prend $K_0 \in \{-1, 0, 1\}$, et on choisit un point $x_0 \in M_{K_0}$; on définit l'espace $\mathcal{M}$ des métriques C^∞ sur Σ à courbure $K < K_0$ dont le relevé à $\tilde{\Sigma}$ n'admet pas de géodésique fermée de longueur $L \leq 2\pi$. De même on appelle $\mathcal{B}_0$ le quotient de l'espace des immersions équivariantes convexes de Σ dans M_{K_0} qui fixent x_0 par $Iso(M_{K_0}, x_0)$. On dispose alors d'un opérateur naturel π qui à une immersion équivariante associe la métrique induite. Nous verrons que c'est un opérateur Fredholm (ce qui correspond à l'ellipticité des équations associées au problème) et que son indice est 0 (cela provient du théorème de l'indice, le fait de fixer un point dans les représentations de $\pi_1\Sigma$ donne juste le bon nombre de contraintes).

Nous montrerons que cet opérateur est localement injectif, ce qui se ramène à la rigidité infinitésimale des surfaces équivariantes convexes ; et qu'il est propre, ce qui utilisera de manière cruciale les résultats rappelés ci-dessus. Enfin on montrera que les métriques à courbure constante admettent une unique image réciproque. Il suffira pour conclure de montrer que l'espace d'arrivée de π est connexe, ce qui ressortira dans le cas lorentzien de l'énoncé suivant :

Lemme 2.3 *Soit Σ une surface, et $K_0 \in \mathrm{R}$; l'ensemble des métriques à courbure $K < K_0$ sur Σ est connexe.*

Démonstration. — Considérons d'abord le cas où $K_0 = 0$. Il est clair que si le genre de Σ est 0 ou 1, l'ensemble des métriques en question est vide et donc connexe. Sinon, soit σ une métrique à courbure $K < 0$ sur Σ ; σ est dans la classe conforme d'une unique métrique hyperbolique σ_0, c'est à dire qu'il existe une fonction $u : \Sigma \to \mathrm{R}$ telle que $\sigma = \exp(2u)\sigma_0$. Un calcul classique montre alors que la courbure de σ est :

$$K = -\exp(-2u)(1 + \Delta u)$$

Posons maintenant $\sigma_t = \exp(2tu)\sigma_0$ pour $t \in [0, 1]$. La courbure K_t de σ_t est bien entendu :

$$K_t = -\exp(-2ut)(1 + t\Delta u) = -(1 - t)\exp(-2ut) + t\exp(2u(1 - t))K < 0$$

ce qui montre que σ peut être joint à une métrique hyperbolique par un lacet continu de métriques à courbure $K < 0$. Comme l'espace des métriques hyperboliques est connexe, cela clôt la démonstration dans le cas $K_0 = 0$.

Passons au cas où $K_0 < 0$. Soit σ_0, σ_1 deux métriques à courbure $K_0, K_1 < K_0$. D'après le cas $K_0 = 0$, il existe un chemin $(\sigma_t)_{t\in[0,1]}$ qui les relie et tel que pour $t \in [0, 1]$, la courbure K_t de σ_t est strictement inférieure à 0. Notons alors $K' := \sup_{t\in[0,1], s\in\Sigma} K_t(s)/K_0$, et définissons un nouveau chemin $(\sigma'_t)_{t\in[0,1]}$ par :

- pour $t \in [0, 1/3]$, $\sigma'_t = (1 - 3t + 3tK')^2 \sigma_0$;
- pour $t \in [1/3, 2/3]$, $\sigma'_t = K'^2 \sigma_{3t-1}$;
- pour $t \in [2/3, 1]$, $\sigma'_t = ((3t-2) + (3-3t)K')^2 \sigma_1$.

On vérifie qu'on a défini une famille continue joignant σ_0 à σ_1, et la définition de K' montre qu'on a toujours $K < K_0$ au cours de la déformation.

Enfin, le cas où $K_0 > 0$ est traité par la même méthode simple de dilatation dans [Sch] (voir aussi [RH93] pour une situation similaire). □

3 Rigidité

Nous allons énoncer et démontrer ici des propriétés de rigidité d'immersions isométriques équivariantes dont les représentations fixent un point.

Nous appellerons déformation isométrique infinitésimale d'une immersion isométrique équivariante fixant un point (ϕ, ρ) un couple (Z, r), où Z est un champ de vecteur de $\phi^* TM$ correspondant à une déformation isométrique de la surface, et où $r : \pi_1\Sigma \to \mathcal{I}(M, m_0)$, l'algèbre de Lie du groupe $Iso(M, m_0)$, est une déformation du morphisme de groupes ρ, tel que

$$\forall s \in \Sigma,\ \forall g \in \pi_1\Sigma,\ Z(gs) = \rho(g)_* Z(s) + \rho(g)^{-1} r(g)(\phi(s))$$

Nous dirons qu'une telle déformation isométrique infinitésimale (Z, r) est triviale si elle est induite par un élément $\gamma \in \mathcal{I}(M, m_0)$, c'est à dire si on a partout

$$Z(s) = \gamma(\phi(s))$$

Auquel cas, en particulier, r en tant qu'élement de $H^1_\rho(\pi_1\Sigma, Iso(M_{K_0}, m_0))$ est trivial.

Notre objectif est de montrer que toutes les déformations isométriques infinitésimales sont triviales. On démontre ce résultat d'abord pour les immersions dans l'espace de Minkowski R^3_1 :

Lemme 3.1 *Soit (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante de (Σ, σ) dans R^3_1, avec $K_\sigma < 0$, où $\rho : \pi_1\Sigma \to Iso(\mathrm{R}^3_1, 0)$, et où l'image de ϕ est incluse dans le cône lumière; soit (Z, r) une déformation isométrique infinitésimale de (ϕ, ρ) avec $r : \pi_1(\Sigma) \to \mathcal{I}(\mathrm{R}^3_1, 0)$. Alors (Z, r) est triviale, c'est à dire est engendrée par un élément de $T_{Id} Iso(\mathrm{R}^3_1, 0)$.*

Démonstration. — On va noter $f = \langle \phi, \phi \rangle$, et $f' = 2\langle Z, \phi \rangle$ sa variation due à la déformation Z. De la même manière, on notera B' la variation de B. On

pose : $h := 2\langle \phi, n\rangle$ et sa variation sera notée h'. Comme r fixe 0, f est invariante par $\pi_1(\Sigma)$, et f' est donc invariante aussi.

Un calcul direct montre que

$$\nabla^2 f = 2\mu$$

où μ est la métrique canonique de R^3_1 de connexion de Levi-Civitá ∇. Si on note $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de Σ, on en déduit que pour deux champs de vecteur x, y sur Σ on a :

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 f)(x,y) &= x.(y.f) - (\overline{\nabla}_x y).f \\ &= x.(y.f) - ((\nabla_x y) - I\!I(x,y)n).f \\ &= (\nabla^2 f)(x,y) + I\!I(x,y)h\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\overline{\nabla}^2 f = \sigma + hI\!I$$

Comme $\overline{\nabla}$ ne varie pas au premier ordre avec Z, on en déduit que

$$\overline{\nabla}^2 f' = hI\!I' + h'I\!I \tag{1}$$

où $I\!I'(x,y) = \sigma(B'x, y)$, et est donc invariante par $\pi_1(\Sigma)$.

On peut maintenant définir une 1-forme ω sur Σ par

$$\omega(x) = df'(J_0 B' x).$$

Sa différentielle se calcule en utilisant (1) :

$$d\omega(x,y) = x.\omega(y) - y.\omega(x) - \omega([x,y])$$

$$\begin{aligned}d\omega(x,y) = df'(J_0(\overline{\nabla}_x(B'y) - \overline{\nabla}_y(B'x) - B'[x,y])) + \\ + (\overline{\nabla}^2 f')(x, J_0 B'y) - (\overline{\nabla}^2 f')(y, J_0 B'x)\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}d\omega(x,y) = df'(J_0(d^{\overline{\nabla}} B')(x,y)) + h'(I\!I(x, J_0 B'y) - \\ - I\!I(y, J_0 B'x)) + h(I\!I'(x, J_0 B'y) - I\!I(y, J_0 B'y))\end{aligned}$$

Or :

- $d^{\overline{\nabla}} B' = 0$ d'après l'équation de Codazzi-Mainardi ;
- $I\!I(x, J_0 B'y) - I\!I(y, J_0 B'x) = 0$ car $\mathrm{tr}(B^{-1}B') = 0$ ce qui provient du fait que $\det(B)$ ne varie pas avec Z d'après l'équation de Gauss ;

- $I\!I'(x, J_0B'y) - I\!I'(y, J_0B'x) = -2\det(B')dv(x,y)$.

et on trouve finalement que

$$d\omega = -2h\det(B')dv$$

Il nous reste à remarquer à nouveau que $\mathrm{tr}(B^{-1}B') = 0$, ce qui nous donne $\det(B^{-1}B') \leq 0$ et donc enfin $\det(B') \leq 0$; or

$$\int_\Sigma d\omega = 0$$

et $h > 0$, ce qui montre que $d\omega \equiv 0$ et que $\det(B') \equiv 0$, et finalement

$$B' \equiv 0$$

ce qui revient à dire que Z est une déformation triviale. □

Nous allons maintenant utiliser l'énoncé précédent pour donner un résultat équivalent dans les autres variétés lorentziennes à courbure constante. Nous le ferons en nous inspirant d'une construction remarquable de Pogorelov dans le cas riemannien (cf. [Spi75], Vol.5) dont nous allons remarquer qu'elle s'étend aux cas pseudo-riemanniens. Le point de départ est le modèle projectif classique des espaces pseudo-riemanniens à courbure constante : si $x_0 \in \mathrm{S}^n_p$, on note Ω_0 l'ensemble des points de S^n_p qui peuvent être joints à x_0 par une géodésique de type temps ou lumière, ou par une géodésique de type espace et de longueur strictement plus petite que $\pi/2$. Le modèle projectif classique est alors une application

$$\phi : \Omega_0 \to \mathrm{R}^n_p$$

qui envoie Ω_0 sur un domaine de R^n_p en préservant les géodésique. Cette application peut se définir en remarquant que S^n_p peut se voir comme

$$\mathrm{S}^n_p = \{x \in \mathrm{R}^{n+1}_p \mid \langle x, x\rangle = 1\}$$

On identifie R^n_p au tangent à S^n_p en x_0 dans R^{n+1}_p et on définit ϕ par la projection sur R^n_p suivant la direction de 0.

Pogorelov [Pog73] a amélioré cette construction et a défini une application dont les propriétés sont données par le lemme suivant (il l'a en fait définie dans les cas riemanniens, c'est à dire quand $p \in \{0, n\}$).

Lemme de Pogorelov 3.2. — *Il existe une application* $\Phi : \Omega_0 \times \Omega_0 \to \mathrm{R}^n_p \times \mathrm{R}^n_p$ *telle que :*

1. *si* $V \in T(\Omega_0 \times \Omega_0)$ *avec* $\|\pi_1 V\| = \|\pi_2 V\|$ *alors* $\|\pi_1(\Phi_* V)\| = \|\pi_2(\Phi_* V)\|$ *;*

2. *Φ commute aux isométries préservant x_0 et y_0 dans la mesure où, pour $\rho \in Iso(\Omega_0, x_0)$, on a*

$$\Phi \circ (\rho \times \rho) = [(\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}) \times (\phi \circ \rho \circ \phi^{-1})] \circ \Phi$$

et $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ est une isométrie ;

3. *$\Phi_{|\Delta} = (\phi \times \phi)_{|\Delta}$, où Δ est la diagonale de $\Omega_0 \times \Omega_0$.*

Démonstration. — On se place dans R_p^{n+1}, et on identifie S_p^n avec $\{x \in \mathrm{R}_p^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ et R_p^n avec le tangent à S_p^n en x_0. On vérifie alors que

$$\phi(x) = \frac{x - \langle x, x_0\rangle x_0}{\langle x, x_0\rangle}$$

On pose en suivant Pogorelov :

$$\Phi(x, x') = 2\left(\frac{x - \langle x, x_0\rangle x_0}{\langle x + x', x_0\rangle}, \frac{x' - \langle x', x_0\rangle x_0}{\langle x + x', x_0\rangle}\right)$$

Alors pour $(X, X') \in T_{(x,x')}(\Omega_0 \times \Omega_0)$ on obtient directement que :

$$2\langle x+x', x_0\rangle^2 \pi_1 \Phi_*(X, X') = (X - \langle X, x_0\rangle x_0)\langle x+x', x_0\rangle - \langle X+X', x_0\rangle(x - \langle x, x_0\rangle x_0)$$

et donc

$$\begin{aligned}4\langle x+x', x_0\rangle^4 \|\pi_1 \Phi_*(X, X')\|^2 &= \langle x+x', x_0\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, x_0\rangle^2) + \\ &+ \langle X+X', x_0\rangle^2(\|x\|^2 - \langle x, x_0\rangle^2) - 2\langle x+x', x_0\rangle\langle X+X', x_0\rangle(\langle X, x\rangle - \langle X, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle)\end{aligned}$$

et comme $\|x\| = 1$ et donc $\langle x, X\rangle = 0$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}4\langle x+x', x_0\rangle^4 \|\pi_1 \Phi_*(X, X')\|^2 &= \langle x+x', x_0\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, x_0\rangle^2) + \\ &+ \langle X+X', x_0\rangle^2(1 - \langle x, x_0\rangle^2) - 2\langle x+x', x_0\rangle\langle X+X', x_0\rangle\langle X, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle \\ &= \langle x+x', x_0\rangle^2\|X\|^2 + \langle X+X', x_0\rangle^2 - (\langle x+x', x_0\rangle\langle X, x_0\rangle - \langle X+X', x_0\rangle\langle x, x_0\rangle)^2 \\ &= \langle x + x', x_0\rangle^2\|X\|^2 + \langle X + X', x_0\rangle^2 - (\langle x', x_0\rangle\langle X, x_0\rangle - \langle x, x_0\rangle\langle X, x_0\rangle)^2\end{aligned}$$

qui est symétrique par rapport à l'échange de (x, X) et de (x', X') si et seulement si $\|X\| = \|X'\|$, ce qui montre que la première propriété est vérifiée.

Pour la seconde, il suffit d'invoquer la symétrie de la construction de Φ ; enfin la troisième propriété est une conséquence facile de la définition de Φ. □

Un énoncé infinitésimal de ce lemme est donné par le

Corollaire 3.3 *Il existe un morphisme de fibrés $\tilde{\phi} : T\Omega_0 \to T\mathrm{R}_p^n$ au-dessus de ϕ tel que, si Σ est une surface plongée dans Ω_0 et V est un champ de déformation isométrique sur Σ, alors $\tilde{\phi}(V)$ est une déformation infinitésimale isométrique de $\phi(\Sigma)$. De plus, $\tilde{\phi}(V)$ est triviale si et seulement si V l'est.*

Pour le voir on constate que la différentiation de Φ au voisinage de la diagonale de Ω_0 fournit une application :

$$\begin{array}{rll} a: & T\Omega_0 & \to T\mathrm{R}^n_p \times_{\mathrm{R}^n_p} T\mathrm{R}^n_p \\ & (x,v) & \mapsto ((\phi(x), a_1(x,v)), (\phi(x), a_2(x,v))) \end{array}$$

tels que si V est un champ de déformation infinitésimale de Σ, $a_1(x,V)$ et $a_2(x,V)$ sont deux champs de déformations de $\phi(\Sigma)$ qui induisent les mêmes variations de la métrique induite au premier ordre. On peut donc poser :

$$\tilde{\phi}(x,v) := (\phi(x), a_2(x,v) - a_1(x,v))$$

et on obtient le résultat annoncé.

On peut noter que $\tilde{\phi}$ a un comportement très simple : elle laisse invariante la norme de la composante des vecteurs dans la direction radiale (par rapport aux points de base x_0 et y_0) et divise la norme de la composante orthogonale par $\mathrm{ch}(r)$, où r est la distance à x_0.

Nous allons maintenant utiliser le lemme de Pogorelov pour déduire de la rigidité des surfaces dans R^3_1 (le lemme 3.1) des résultats analogues pour les autres espaces lorentziens à courbure constante. Nous devons pour cela vérifier que les immersions considerées restent dans Ω_0. Notons d'ailleurs que, dans les deux cas qui nous intéressent, chaque point $x \in \mathrm{S}^3_1$ (resp. $x \in \mathrm{H}^3_1$) a un antipode $\overline{x}$, qui est tel qu'il existe une unique géodésique de type espace (resp. de type temps) de longueur π qui les joint. Les isométries qui préservent x sont exactement celles qui laissent $\overline{x}$ invariant ; mais un seul de ces points, pris comme "centre" x_0 dans la définition de Ω_0, est tel que les surfaces qu'on considèrent restent dans Ω_0. Il faut pour le choisir supposer qu'il existe une géodésique de type temps issue du côté concave de la surface S et de longueur $L < \pi/2$ qui atteint x_0, ce que nous exprimerons en disant que x_0 est du côté concave de S.

Pour $r \in \mathrm{R}^*_+$ (resp. pour $r \in \mathrm{R}^*_+$, pour $r \in]0, \pi/2[$), nous noterons encore $E(r)$ l'ensemble des points de S^3_1 (resp. de R^3_1, de H^3_1) qui peuvent être joints à x_0 par une géodésique de type temps et de longueur r. Enfin pour r_1, r_2 convenables, nous appellerons $E(r_1, r_2)$ la réunion des $E(r)$ pour $r \in [r_1, r_2]$. On dispose alors dans Anti-de Sitter du lemme suivant :

Lemme 3.4 *Soit S une surface, et (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante convexe de type espace de S dans $\mathrm{H}^3_1 = M_{-1}$ telle que ρ préserve x_0 et que x_0 soit du côté concave de $\phi(S)$. Alors ϕ est à valeurs dans Ω_0, et c'est un plongement fuchsien. Mieux, ϕ est à valeurs dans $E(argcotg(\sqrt{-1-K_1}), argcotg(\sqrt{-1-K_2}))$ où K_1 et K_2 sont respectivement le minimum et le maximum de la courbure de S pour la métrique induite.*

Démonstration. — Nous allons démontrer d'abord la seconde assertion, la première s'en déduira.

Soit $x \in \mathrm{H}^3_1$; supposons qu'il existe une géodésique de type temps joignant x_0 à x ; on notera alors $r(x)$ le minimum des longueurs de telles géodésiques. Si par contre il existe une géodésique de type espace (ou lumière) joignant x_0 à x, on notera $-ir(x)$ sa longueur, c'est à dire que dans ce cas $r(x) \in i\mathrm{R}$.

On note $f := \cos(r)$ et on obtient ainsi une fonction régulière sur H^3_1 dont le hessien vérifie :

$$\nabla^2 f = f\mu$$

où μ est la métrique de H^3_1. On en déduit comme dans la démonstration du lemme 3.1 que sur S on a pour la métrique induite σ et la connexion associée $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\nabla}^2 f = f\sigma - h\mathit{II}$$

où $h := -n.f$ et II est la seconde forme fondamentale de l'immersion, le vecteur normal n étant dirigé dans la direction opposée à x_0 (suivant la géodésique minimisante vers x_0).

Si on se place en un extrémum de f sur S, on voit donc que la courbure extrinsèque de ϕ est :

$$K_e = \det(\mathit{II}) = \det(f\sigma - \overline{\nabla}^2 f)/h^2$$

et on en déduit que, en un maximum de f :

$$K_e \geq f^2/h^2 = \mathrm{cotg}(r)$$

et que de même en un minimum de f :

$$K_e \leq \mathrm{cotg}(r)$$

ce qui fournit les contrôles de r recherchés. □

On peut en profiter pour noter qu'on a une proposition similaire dans le cas plat, et dont la démonstration se fait de la même façon :

Lemme 3.5 *Soit S une surface, et (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante convexe de type espace de S dans R^3_1 telle que ρ préserve x_0. Alors ϕ est à valeurs dans $E(-1/4K_2, -1/4K_1)$ — et en particulier dans le cône lumière — où K_1 et K_2 sont respectivement le minimum et le maximum de la courbure de S pour la métrique induite. De plus, ϕ est un plongement fuchsien.*

Démonstration. — On note cette fois-ci $f := r^2$, et on constate que f vérifie :

$$\nabla f = -\mu_0$$

où μ_0 est encore la métrique canonique de R^3_1. On en déduit que la restriction de f à S vérifie maintenant :

$$\overline{\nabla} f = -\sigma + h I\!I$$

où $h = n.f > 0$; de plus, $\|\overline{\nabla} f\|^2 - h^2 = -\|\nabla f\|^2 = -4f$, et on en déduit qu'aux extrema de f on a

$$\overline{\nabla} f = -\sigma + 2\sqrt{f} I\!I$$

Aux minima de f, on constate donc que $K_e = \det(I\!I)$ est minoré par $1/4f$, et de même, aux maxima de f, $K_e \leq 1/4f$. On en déduit le résultat. □

Enfin dans le cas de l'espace de Sitter S^3_1 les choses sont plus complexes, et on va énoncer pour l'instant seulement le :

Lemme 3.6 *Soit S une surface, et (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante convexe de type espace de S dans S^3_1 telle que ρ préserve x_0 et que x_0 soit du côté concave de $\phi(S)$. Alors ϕ est à valeurs dans le cône de lumière de x_0 (et donc dans Ω_0). De plus, ϕ est un plongement fuchsien et son image reste séparée de x_0 (dans le cône de lumière de x_0) par $E(argcoth(\sqrt{1-K_1}))$, où K_1 est encore le minimum de la courbure de S pour la métrique induite.*

Démonstration. — Nous allons utiliser dans ce lemme la dualité entre l'espace de Sitter et l'espace hyperbolique. Dans cette dualité les 2-plans totalement geódésiques (éventuellement de type espace) de l'un des deux espaces correspondent aux points de l'autre. Cette dualité se voit dans le modèle de Minkowski comme une application de Gauss. Les surfaces convexes de l'un donnent naissance par cette dualité à des surfaces convexes dans l'autre espace.

On commence par montrer que ϕ est à valeurs dans le cône de lumière de x_0. On considère pour cela l'application duale de ϕ, soit $\tilde{\phi} : \Sigma \to \mathrm{H}^3$. Il s'agit d'une immersion isométrique équvariante convexe dans H^3 dont la représentation associée fixe un plan totalement géodésique P_0. On vérifie alors que ϕ est à valeurs dans le cône de lumière de x_0 si et seulement si les 2-plans tangents à $\tilde{\phi}$ dans H^3 sont disjoints de P_0. Or $\tilde{\phi}$ est convexe, ce qui entraine que son image sépare P_0 de ses plans tangents, et ϕ est donc à valeurs dans le cône de lumière de x_0.

Ensuite on doit montrer que ϕ est à valeur dans la région du cône de lumière composée des points qui peuvent être joints à x_0 par une géodésique de longueur au moins $\mathrm{argcoth}(\sqrt{1-K_1})$. On pose pour cela $f := \mathrm{ch}(r)$ sur S, et on vérifie alors directement que :

$$\nabla^2 f = -f\mu$$

et on en déduit que le hessien de la restriction de f à S vérifie :

$$\overline{\nabla}^2 f = -f\sigma + h I\!I \tag{2}$$

où $h = n.f$ et où $I\!I$ est définie positive (en utilisant la position de x_0 du côté concave de $\phi(S)$). On peut donc utiliser le même argument que dans le cas $K_0 = -1$ pour obtenir une minoration de r sur S. Malheureusement ceci ne permet pas d'obtenir une majoration de r car la courbure de S peut être positive, d'où une courbure extrinsèque inférieure à 1. □

Si on applique le lemme de Pogorelov et le lemme 3.1, on trouve maintenant un résultat de rigidité pour les immersions équivariantes dans les espaces lorentziens à courbure constante :

Corollaire 3.7 *Soit M_{K_0} une variété lorentzienne de dimension 3 simplement connexe à courbure constante K_0 et (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante de (Σ, σ) dans M, avec $K_\sigma < K_0$ et $\rho : \pi_1\Sigma \to Iso(M, x_0)$; soit (Z, r) une déformation isométrique infinitésimale de (ϕ, ρ) avec $r : \pi_1(\Sigma) \to \mathcal{I}(M, x_0)$. Alors (Z, r) est triviale, c'est à dire est engendrée par un élément de $Iso(M, x_0)$.*

Démonstration. — Soit (ϕ, ρ) une immersion isométrique équivariante dans une variété lorentzienne M à courbure constante 1 ou -1, telle que ρ préserve x_0, et soit (Z, r) une déformation infinitésimale de (ϕ, ρ) telle que r préserve aussi x_0. D'après les lemmes 3.4, 3.5 ou 3.6, on voit que, quitte à remplacer x_0 par son antipode, on peut supposer que l'image de ϕ est contenue dans Ω_0. On peut donc appliquer le corollaire 3.3 ; on obtient ainsi une immersion isométrique équivariante (ϕ', ρ') de Σ dans R^3_1 et une déformation infinitésimale (Z', r'). Maintenant, comme ϕ' est équivariante et convexe, elle est nécessairement de type espace, sans quoi son image serait d'un coté d'un plan de type dégénéré (le plan tangent en un point où ϕ' n'est pas de type espace), et donc la distance de l'image de ϕ' au point y_0 ne pourrait pas être bornée, ce qui contredirait le fait que ϕ' est équivariante. Comme enfin $\tilde{\phi}$ commute avec les isométries préservant x_0 et y_0, r' préserve y_0. On peut donc appliquer le lemme 3.1, et on trouve que (Z', r') est triviale ; mais alors (Z, r) est triviale aussi. □

4 Propreté

Nous allons nous intéresser maintenant à la propreté de l'opérateur π défini dans la section 2. Nous considérerons une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de métriques sur Σ qui converge C^∞ vers une métrique σ_∞, et une suite $(\phi_n, \rho_n)_{n\in\mathrm{N}}$ d'immersions équivariantes convexes telle que $F(\phi_n, \rho_n) = \sigma_n$; nous chercherons à montrer que, quitte à la "renormaliser" par $Iso(M_{K_0}, x_0)$, la suite $(\phi_n, \rho_n)_{n\in\mathrm{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Dans les cas $K_0 = 0$ et $K_0 = -1$, ceci va découler directement des lemmes 3.5 et 3.4 et des rappels de la section 2. On commence par utiliser l'action de

$Iso(M_{K_0}, x_0)$ pour rendre convergente la suite des images d'un point (c'est possible car les valeurs de r sont bornées d'après les lemmes 3.5, 3.4). Puisque notre surface est dans une région de la forme $E(r_1, r_2)$, on en déduit (en utilisant la convexité de la surface) que le produit scalaire entre ∇r et le vecteur normal à la surface reste borné par une constante ne dépendant que de r_1 et r_2 ; en particulier après extraction d'une sous-suite le 1-jet de la suite d'immersions isométriques renormalisée converge. Les dégénérescences locales de la suite d'immersions sont alors interdites car elles conduisent, d'après le théorème 2.2, à l'apparition de géodésiques de pli complètes dans l'espace d'arrivée ; or les surfaces restent dans un domaine de la forme $E(r_1, r_2)$ dont on vérifie facilement qu'il ne contient pas de géodésique complète . La suite des courbures moyennes est alors bornée et le théorème 2.1 montre qu'il y a convergence C^∞ vers une immersion isométrique.

Pour le cas où $K_0 = 1$, les choses sont plus compliquées et on commence par établir le fait plus simple suivant, utilisant l'hypothèse sur la longueur des géodésiques fermées de (Σ, σ_∞) :

Proposition 4.1 *La suite des courbures moyennes H_n des ϕ_n est bornée par une constante H_0.*

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que dans l'espace de Sitter, deux points joints par une géodésique de type temps ne peuvent être joints par une courbe de type espace.

Supposons maintenant qu'il existe une famille $(\phi_n, \rho_n)_{n\in\mathrm{N}}$ d'immersions isométriques convexes de (Σ, σ_n) dans S^3_1 telle, que pour tout $n \in \mathrm{N}$, il existe $x_n \in \Sigma$ avec $H_n(x_n) \geq n$. Quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que x_n converge vers une limite x_∞. Choisissons alors une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$, $\alpha_n \in Iso(\mathrm{S}^3_1)$ telle que si l'on pose $f_n = \alpha_n \circ \phi_n$ la suite des 1-jets $j^1(f_n)(x_n)$ converge vers $j_\infty = (y_0, t_0)$ avec $f_n(x_n) = y_0$ pour tout n et $t_0 : T_{x_\infty}\Sigma \to T_{y_0}\mathrm{S}^3_1$ isométrique. Bien entendu, les $(f_n, \alpha_n\rho_n)$ restent des immersions isométriques équivariantes, mais elles n'ont plus a priori de points fixes communs.

Choisissons maintenant $n \in \mathrm{N}$. Notons P_0 le plan totalement géodésique passant par y_0 et tangent à $\mathrm{Im}(t_0)$; c'est (pour la métrique induite par celle de S^3_1) une sphère ronde. Prenons un $\epsilon > 0$ et notons S_ϵ l'ensemble des points de P_0 à distance plus petite que ϵ de y_0, et notons encore C_ϵ le cylindre formé de la réunion des géodésiques normales à P_0 passant par un point de S_ϵ et K_ϵ le compact formé de l'intersection de l'extérieur du cône de lumière de y_0 avec K_ϵ. Commençons par remarquer que la projection naturelle π de K_ϵ sur S_ϵ vérifie $2\mu(D\pi(u), D\pi(v)) \geq \mu(u, v)$ pour ϵ assez petit.

Pour tout n, soit K_n le compact $f_n^{-1}(K_\epsilon)$. Puisque les $f_n(\Sigma)$ sont de type espace elles sont incluses dans le complémentaire du cône de lumière de y_0. En particulier le bord $\partial f_n(K_n)$de chaque compact $f_n(K_n)$ est inclus dans le bord ∂C_ϵ de C_ϵ. Le cylindre ∂C_ϵ est de type mixte, il est donc d'intersection transverse avec

$f_n(\Sigma)$. La projection de $\partial f_n(K_n)$ sur ∂S_ϵ est un revêtement et la remarque faite au début de ce paragraphe montre que finalement le bord de $f_n(K_n)$ est formé d'une seule courbe difféomorphe à sa projection ∂C_ϵ. Par ailleurs, la projection naturelle π de K_ϵ sur S_ϵ vérifie $2\mu(D\pi(u), D\pi(v)) \geq \mu(u,v)$ pour ϵ assez petit. Nous en déduisons finalement que le diamètre de K_n est plus petit que 10ϵ.

La conclusion de cette discussion est la suivante: pour tout ϵ il existe un voisinage ouvert de y_0, C_ϵ tel que $d(y, x_n) \geq 10\epsilon$ entraîne $f_n(y) \notin C_\epsilon$.

Maintenant le théorème 2.2 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ devrait être dégénérée le long d'une géodésique γ de (Σ, σ_∞) et que, quitte à se restreindre à une sous-suite, on pourrait supposer que la limite envoie isométriquement γ sur une géodésique Γ de S^3_1. Comme les géodésiques de S^3_1 sont toutes fermées et de longueur 2π, et que d'aprés notre discussion précédente l'application limite de γ sur Γ ne peut être un revêtement, Γ devrait être fermée de longueur 2π, ce qui est impossible. □

On peut ensuite utiliser cette borne sur H_0 pour interdire que les images des ϕ_n partent à l'infini :

Proposition 4.2 *Il existe des constantes r_1, r_2 — dépendant de la métrique σ_∞ — telles que pour n assez grand, ϕ_n est à valeurs dans $E(r_1, r_2)$.*

Démonstration. — L'existence de r_1 est assurée par le lemme 3.6.

Pour la borne r_2, on note f_0 le minimum de la fonction $f(x) := \mathrm{ch}(r(x))$ sur Σ. On rappelle que

$$\overline{\nabla}^2 f = -f\sigma + h I\!I \tag{3}$$

où $h > 0$ et

$$\|\overline{\nabla} f\|^2 - h^2 = \|\nabla f\|^2 = \sinh^2 r = 1 - f^2$$

d'où on tire que

$$\overline{\nabla}^2 f = -f\sigma + (\|\overline{\nabla} f\|^2 + f^2 - 1)^{1/2} \tag{4}$$

Soit γ une géodésique de (Σ, σ) avec $f(\gamma(0)) = f_0$; notons $y(s) := f(\gamma(s))$. On déduit alors de (4) que

$$y''(s) \leq 2(|y'(s)| + y(s))H_0$$

et on en déduit une constante C_0 (dépendant de H_0 et du diamètre de (Σ, σ)) telle que pour tout $s \in \Sigma$, $f(s) \leq C_0 f_0$.

On peut maintenant utiliser à nouveau (3) pour en tirer que pour tout $X \in T\Sigma$ unitaire, on a :

$$\begin{aligned}
|X.\|\overline{\nabla} f\|^2| &= 2|h I\!I\left(\overline{\nabla} f, X\right) - f\sigma\left(X, \overline{\nabla} f\right)| \\
&\leq 2f\|\overline{\nabla} f\| + 4H_0\|\overline{\nabla} f\|\sqrt{\|\overline{\nabla} f\|^2 + f^2 - 1} \\
&\leq 2C_0 f_0\|\overline{\nabla} f\| + 4H_0\|\overline{\nabla} f\|(\|\overline{\nabla} f\| + C_0 f_0) \\
&\leq (C_1 + C_2\|\overline{\nabla} f\|^2) f_0
\end{aligned}$$

pour deux constantes C_1, C_2 dépendant encore de (Σ, σ). Comme $\|\overline{\nabla} f\| = 0$ en un point, il existe C_3 tel que $\|\overline{\nabla} f\| \leq C_3 f_0$.

En particulier, aux points où f est assez grand, on a :

$$\|\overline{\nabla} r\| \leq 2\|\overline{\nabla} f\|/f \leq 2C_3C_0$$

et on en tire que la projection orthogonale de Σ sur $E(r)$ est dilatante d'un facteur au plus $\sqrt{1+4C_0^2C_3^2}$, et donc que son jacobien est lui aussi majoré par une constante C_4, ceci dès que f est assez grand.

Or un raisonnement élémentaire montre que, pour $r \geq r_1$, la projection orthogonale de $E(r)$ sur $E(r_1)$ est contractante d'un facteur $\sinh(r)/\sinh(r_1)$. Ainsi donc, si f_0 est assez grand, le jacobien de la projection orthogonale de Σ sur $E(r_1)$ est minoré par $C_4 \sinh^2(r_1)/(f_0^2 - 1) := J_0(f_0)$, et on note que $J_0(f_0) \to 0$ quand $f_0 \to \infty$.

Enfin l'aire des quotients de $E(r_1)$ par les actions de $\pi_1(\Sigma)$ associées aux immersions isométriques équivariantes fixant x_0 ne dépendent que du genre de la surface (par le théorème de Gauss-Bonnet) ce qui implique que f_0 est majorée, et donc que f l'est aussi. $\square$

Grâce à cette denière proposition, on peut alors conclure à la propreté dans le cas de Sitter comme dans le début de ce paragraphe pour les deux autres cas: on utilise une suite d'isométries dans $Iso(\mathrm{S}_1^3, x_0)$ de façon que la suite des images d'un point converge. Le même raisonnement qu'au début de ce paragraphe montre que l'on peut extraire une sous-suite telle que la suite des 1-jets converge. Enfin, la courbure moyenne étant bornée, le théorème 2.1 assure alors que la suite d'immersions équivariantes converge.

5 Les surfaces à courbure constante et les orbites de $SL(2, \mathrm{R})$

Notre dernier préliminaire avant de démontrer les résultats annoncés dans notre introduction, va consister à résoudre complètement le cas (facile et peut-être folklorique) des immersions de H^2 dans R_1^3 :

Lemme 5.1 *Soit (Σ, σ) une surface hyperbolique, et $x_0 \in \mathrm{R}_1^3$. Il existe une unique (modulo $Iso(\mathrm{R}_1^3, x_0)$) immersion isométrique équivariante (ϕ, ρ) de (Σ, σ) dans R_1^3 avec $\rho : \pi_1\Sigma \to Iso(\mathrm{R}_1^3, x_0)$ et elle est totalement ombilique.*

Il est possible et assez facile de donner une preuve de ce lemme qui repose sur les méthodes (principe du maximum, etc) utilisées dans la section 3. Mais nous allons donner une autre démonstration, utilisant des formules intégrales.

Démonstration. — Soit (ϕ, ρ) une telle immersion isométrique équivariante. On définit un champ de vecteurs $f \in \phi^* T\mathrm{R}^3_1$ en décidant que pour $x \in \Sigma$,

$$\exp_{\phi(x)}(-f) = x_0$$

Il est clair que f existe et est unique.

On note aussi n une normale unitaire à Σ dans R^3_1, et on définit deux 1-formes sur $\tilde{\Sigma}$ par :

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \det(f, n, u) \\ \beta(u) &= \det(f, n, \nabla_u n) \end{aligned}$$

où le déterminant correspond à la forme volume de R^3_1. Un point important est que, comme ρ est à valeurs dans $Iso(\mathrm{R}^3_1, x_0)$, α et β sont en fait des 1-formes sur Σ.

On sait que $\nabla_u n = -Bu$, où $B : T\Sigma \to T\Sigma$ est l'opérateur de Weingarten, tel que $\det(B) = K_e = 1$ et $\mathrm{tr}(B) = H$. On calcule donc que

$$\begin{aligned} d\alpha &= \det(\cdot, n, \cdot) + \det(f, \nabla_\cdot n, \cdot) \\ &= -\det(n, \cdot, \cdot) + \det(f, B\cdot, \cdot) \\ &= -2dA + 2H\langle f, n\rangle dA \\ &= 2(H\langle f, n\rangle - 1)dA \end{aligned}$$

où dA est l'élément d'aire sur Σ. De même, comme la courbure de $\phi^* T\mathrm{R}^3_1$ est nulle,

$$\begin{aligned} d\beta &= \det(\cdot, n, B\cdot) + \det(f, B\cdot, B\cdot) + \det(f, n, \nabla_\cdot(B \cdot .)) \\ &= -\det(n, \cdot, B\cdot) + \det(f, B\cdot, B\cdot) \\ &= -2HdA + 2\langle f, n\rangle K_e dA \\ &= 2(\langle f, n\rangle K_e - H)dA \end{aligned}$$

Or α, β sont des 1-formes sur Σ, donc

$$\int_\Sigma d\alpha = \int_\Sigma d\beta = 0$$

c'est à dire que

$$\int_\Sigma H\langle f, n\rangle dA = \int_\Sigma dA$$

et que

$$\int_\Sigma \langle f, n\rangle dA = \int_\Sigma HdA$$

Mais $K_e = \det(B) = 1$, donc $H = \mathrm{tr}(B)/2 \geq 1$, et donc

$$\int_\Sigma \langle f, n\rangle dA = \int_\Sigma HdA \geq \int_\Sigma dA \geq \int_\Sigma \langle f, n\rangle HdA$$

et donc $H \equiv 1$, ce qui montre que ϕ est totalement ombilique. On en déduit facilement que les immersions isométriques equivariantes de (Σ, σ) dans R^3_1 sont déterminées uniquement par leur 1-jet en un point, et qu'elles sont chacune associées à une représentation qui préserve un unique point, qui est à distance 1 de chacun des points de leur image. Le lemme en découle facilement. □

On peut maintenant utiliser ce résultat et le lemme de Pogorelov pour donner l'énoncé analogue dans les autres variétés lorentziennes à courbure constante :

Corollaire 5.2 *Soit $K_0 \in \{-1, 1\}$, M une variété de dimension 3 lorentzienne simplement connexe à courbure K_0, (Σ, σ) une surface à courbure $K_0 - 2$, et $x_0 \in M$. Il existe une unique immersion isométrique équivariante (ϕ, ρ) de (Σ, σ) dans M avec $\rho : \pi_1\Sigma \to Iso(M, x_0)$ (modulo $Iso(M, x_0)$) et elle est totalement ombilique.*

Démonstration. — L'existence s'obtient en regardant les orbites de type espace de $Iso(M_{K_0}, x_0)$. Pour l'unicité, on applique le lemme de Pogorelov et on voit que si (Σ, σ) admet deux immersions isométriques équivariantes (ϕ, ρ) et (ϕ', ρ') dans M telles que ρ, ρ' préservent x_0, alors une certaine surface $(\Sigma, \tilde{\sigma})$ à courbure $K < 0$ admet deux immersions isométriques équivariantes $(\tilde{\phi}, \tilde{\rho})$ et $(\tilde{\phi}', \tilde{\rho}')$ préservant y_0 dans R^3_1. $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}'$ se déduisent alors l'une de l'autre par une isométrie de R^3_1 fixant y_0, et donc ϕ, ϕ' se déduisent l'une de l'autre par une isométrie fixant x_0, d'où le résultat. □

6 Preuve du théorème 1.1

Nous avons désormais tous les éléments nécessaires pour la démonstration du théorème 1.1. Fixons maintenant un espace lorentzien simplement connexe M à courbure constante K_0. Notons alors $\mathcal{B}$ l'espace des paires (g, B) où g est un élément de $\mathcal{M}$, l'espace des métriques à courbure plus petite que K_0 sur Σ telle que la longueur des géodésiques fermées contractiles est strictement plus petite que 2π, et B est une solution des équations de Gauss-Codazzi pour les immersions isométriques de (Σ, g) dans l'espace M. Par le théorème fondamental sur les sous-variétés [Spi75], cet espace $\mathcal{B}$ s'identifie au quotient de l'espace des immersions isométriques équivariantes régulières strictement convexes de Σ dans M par $Iso(M)$. Démontrons tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 6.1 *L'ensemble $\mathcal{B}$ est une variété de dimension infinie telle que la projection naturelle π de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{M}$ est une submersion de corang $6g - 6$.*

Démonstration. — Fixons une métrique $g \in \mathcal{M}$ sur Σ et considérons la variété $\mathcal{G}_g$ des solutions de l'équation de Gauss, c'est à dire l'ensemble des

opérateurs B symétriques tels que :

$$\det(B) = K_0 - k_g,$$

où k_g est la courbure de la métrique g. Considérons également, si ∇ est la connexion de Levi-Civita de g, l'opérateur

$$d^\nabla \ : \ \Omega^1(\Sigma) \otimes T\Sigma \to \ \Omega^2(\Sigma) \otimes T\Sigma$$

L'équation de Codazzi s'écrit alors $d^\nabla B = 0$. Nous pouvons voir maintenant d^∇ comme une application de $\mathcal{G}_g$ dans $\Omega^2(\Sigma) \otimes T\Sigma$ et les solutions des équations de Gauss-Coddazzi sont alors les zéros de cette application.

Si B est une solution des équations de Gauss, B est un opérateur symétrique positif, il détermine donc une métrique dont nous noterons la structure complexe J ; de même, notons J_0 la structure complexe de g. Un peu d'algèbre linéaire montre que

$$T_B\mathcal{G}_g = \{A = J_0 W \ / \ WJ + JW = 0\}.$$

Identifions maintenant $\Omega^2(\Sigma) \otimes T\Sigma$ avec $T\Sigma$, et munissons $\Omega^1(\Sigma) \otimes T\Sigma$ et $T\Sigma$ de leur métriques naturelles. L'adjoint $L^* : T\Sigma \to T_B\mathcal{G}_g$, pour la métrique L^2 , du linéarisé de d^∇ le long de $\mathcal{G}$ est alors donné par

$$L^*(Z) = J_0 \bar{\partial}_J^\nabla Z$$

où

$$\bar{\partial}_J^\nabla Z \ (X) = \nabla_{JX} Z - J\nabla_X Z.$$

Nous pouvons maintenant remarquer que $\bar{\partial}_J^\nabla$ se déforme dans le $\bar{\partial}$ classique et donc qu'il a le même indice $6 - 6g$. De plus, il est clair d'après la formulation qu'il existe une structure presque complexe sur $T\Sigma$ telle que Z est une solution de $\bar{\partial}_J^\nabla Z = 0$ si et seulement si le graphe de Z est une courbe holomorphe; par positivité de l'intersection on en déduit que le noyau de $\bar{\partial}_J^\nabla$ est nul. Ainsi, l'opérateur d^∇ de $\mathcal{G}_g$ dans $\Omega^2(\Sigma) \otimes T\Sigma$ est une submersion de corang $6g - 6$.

Nous en déduisons le résultat annoncé sur $\mathcal{B}$ en considérant l'application Φ

$$\begin{cases} \mathcal{G} = \bigcup_{g \in \mathcal{M}} \mathcal{G}_g \longrightarrow \mathcal{M} \times (\Omega^2(\Sigma) \otimes T\Sigma) \\ \quad (g, B) \quad \longmapsto \Phi(g, B) = (g, d^{\nabla_g} B) \end{cases}$$

où ∇_g est la connexion de Levi-Civita de g. Ce que nous venons de voir montre que Φ est une submersion de corang $6g - 6$, ainsi bien sûr que sa restriction à $\mathcal{B} = \Phi^{-1}(\mathcal{M} \times \{0\})$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ qui n'est rien d'autre que π. $\square$

Maintenant, soit Ψ l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathrm{Rep}(\pi_1\Sigma, Iso(M))/Iso(M)$ qui associe à une solution des équations de Gauss-Codazzi la représentation de l'immersion isométrique équivariante. Remarquons ensuite qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de l'ensemble $\mathcal{T}$ des représentations fuchsiennes qui a une structure de variété de dimension $12g - 12$. Considérons enfin l'ouvert $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$ constitué des plongements équivariants dont la représentation associée appartient à $\mathcal{O}$. Il est classique alors de montrer — de manière savante en utilisant le théorème d'holonomie de Thurston-Lok — que $T\Psi$ est surjective de $T_p\mathcal{P}$ dans $T_{\Psi(p)}\mathcal{O} = H^1_{\Psi(p)}(\pi_1(\Sigma), \mathcal{I}(M))$.

Rappelons que d'après les lemmes 3.4, 3.5 et 3.6, les immersions isométriques équivariantes convexes dont la représentation est à valeurs dans $Iso(M, m_0)$ sont des plongements fuchsiens. L'espace $\mathcal{B}_0$ de ces immersions s'identifie donc à $\mathcal{P} \cap \Psi^{-1}(\mathcal{T})$, cet espace est donc une sous-variété de même codimension que $\mathcal{T}$, c'est à dire $6g - 6$.

La conclusion de cette discussion est que la restriction de π à $\mathcal{B}_0$ est un opérateur Fredholm de d'indice nul. De plus, le corollaire 3.7 montre que le linéarisé de π est partout injectif, et π est donc un homéomorphisme local.

Les résultats de la section 4 montrent ensuite que π, considéré comme à valeurs dans $\mathcal{M}$ est propre, ainsi π est un revêtement puisque $\mathcal{M}$ est connexe d'après 2.3 ; enfin, le lemme 5.1 et le corollaire 5.2 montrent que certains points de $\mathcal{M}$ admettent une unique image réciproque, ce qui montre que π est un homéomorphisme global et achève la preuve du théorème 1.1.

On en déduit facilement le théorème 1.2. En effet, le théorème 1.1 fournit exactement la variété recherchée, quand on quotiente la partie convexe de l'espace délimitée par $\phi(\Sigma)$ par l'action de $\pi_1(\Sigma)$. Réciproquement, le fait qu'un bout soit fuchsien implique que, quand on passe à son revêtement universel, l'action de son π_1 fixe un point.

Références

[Gro86] M. Gromov. *Partial Differential Relations.* Springer, 1986.

[Lab87] F. Labourie. Limites d'hypersurfaces localement convexes. *Invent. Math.*, 90:115–138, 1987.

[Lab92a] F. Labourie. Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3. *Journal of Differential Geometry*, 35:609–626, 1992.

[Lab92b] F. Labourie. Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et CP1-structures. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 45:549–565, 1992.

[Lab95] F. Labourie. Equations de Monge-Ampère elliptiques. Prépublication, Universit de Paris-Sud, 1995.

[Pog73] A. V. Pogorelov. Extrinsic geometry of convex surfaces. Technical report, Israel Program for Scientific Translation, 1973.

[RH93] I. Rivin and C. D. Hodgson. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Invent. Math.*, 111:77–111, 1993.

[Sch] J.-M. Schlenker. Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante. *Comm. in Analysis and Geometry.* A paraître.

[Spi75] M. Spivak. *A comprehensive introduction to geometry, Vol.I-V.* Publish or perish, 1970-1975.