# LIMITE D'HYPERSURFACES LOCALEMENT CONVEXES.

# François LABOURIE

# 1. Introduction.

- 1.1. L'un des domaines les plus étudiés en géométrie extrinsèque est celui des surfaces à courbures strictement positives dans  ${\bf R}^3$  (surfaces convexes). Ainsi, l'un des plus célèbres théorèmes de rigidité des immersions isométriques est le théorème de Cohn-Vossen [S]: Une surface convexe complète compacte est rigide. Par contre, la situation est tout à fait différente dès que la surface n'est plus complète: Leibin [Le] a ainsi montré que l'on pouvait construire une famille continue de déformations isométriques non congruentes de la surface obtenue en ôt ant à une surface convexe un ouvert à courbure totale strictement positive; Pogorelov [P2] a par ailleurs exhibé un ensemble infini d'immersions isométriques non congruentes d'une surface convexe à laquelle on a ôté deux points. Dans le cas de la sphère moins deux points antipodaux, l'exemple est totalement explicite dans [S]: les immersions sont données comme des surfaces de révolution s'enroulant n fois autour de l'axe des pôles. A la limite lorsque n tend vers l'infini, nous obtenons le segment joignant les deux pôles:
- 1.2. Ces théorèmes nous assurent de l'existence de nombreuses immersions isométriques de surface V à courbure positive dans  $\mathbb{R}^3$  (en fait d'une surface V à courbure strictement supérieure à  $K_0$ , dans une variété M de dimension 3 à courbure constante  $K_0$ ). Les résultats de cet article permettent de mieux comprendre l'ensemble de ces immersions isométriques et en particulier le rapport entre les convergences  $C^0$  et  $C^1$ . Nous avons pour commencer le théorème suivant:

THEOREME A. La topologie de la convergence  $C^0$  coïncide avec la topologie de la convergence  $C^1$  sur l'ensemble des immersions isométriques de V dans M.

1.3. Que se passe-t-il maintenant lorsqu'une suite d'immersions isométriques de V dans M ne converge pas  $C^1$ ? Notre deuxième théorème nous dit que la dégénerescence est celle observée dans l'exemple de Pogorelov, les immersions dégénérant vers une droite. Soit  $(f_n)$  une suite d'immersions convergeant  $C^0$  vers une application  $f_0$ , nous adopterons la définition suivante:

DEFINITION. Un point x de V est dit régulier pour la suite  $(f_n)$  si il existe un voisinage U de x dans V tel que  $(f_n)$  converge  $C^1$  vers  $f_0$  sur U. On dira que x est dégénéré dans le cas contraire.

Notre théorème est alors:

PROPRIETE 4.2. Soit  $f_0$  une application contractante d'une variété V dans un espace M.

- (a) Si il existe une sous-variété W de V telle que  $f_0$  est une isométrie de W sur un ouvert convexe d'un sous-espace totalement géodésique de M, W est elle-même totalement géodésique.
- (b) Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux géodésiques de V se coupant en un point x envoyées isométriquement par  $f_0$  sur deux arcs géodésiques, alors l'angle des géodésiques  $f_0(\gamma_i)$  est égal à l'angle des géodésiques  $\gamma_i$ .

Preuve: On notera dans cette démonstration  $d_v$  la distance de V, et  $d_m$  celle de M. le fait que  $f_0$  soit contractante se traduit par:

$$d_m(f_0(x), f_0(y)) \le d_v(x, y).$$

Prouvons tout d'abord (a):

Soient deux points x et y de W, il nous suffit de montrer qu'il existe une géodésique minimisante tracée sur W joignant x à y. Soit  $\gamma'$  l'image réciproque par  $f_0$  dans W de la géodésique minimisante joignant  $f_0(x)$  à  $f_0(y)$ . La restriction de  $f_0$  à W étant une isométrie,

$$Long(\gamma') = d_m(f_0(x), f_0(y) \le d_v(x, y)$$

 $\gamma'$  est donc une géodésique minimisante joignant x à y.

Prouvons maintenant (b):

Soient donc  $\gamma_i$  deux géodésiques comme dans l'énoncé, se coupant en un point x. On paramétrise ces deux géodésiques par l'arc en mettant l'origine en x. Les deux courbes  $\Gamma_i = f_0(\gamma_i)$  sont alors des géodésiques paramétrées par l'arc d'après les hypothèses. Soit  $\alpha$  l'angle en x entre les géodésique  $\gamma_i$  et  $\beta$  l'angle entre les géodésiques  $\Gamma_i$ . Pour tout  $\lambda$  et t de  $\mathbf{R}$ :

$$d_v^2(\gamma_1(t), \gamma_2(\lambda t)) = t^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha) + o(t^2),$$

ainsi que

$$d_m^2(\Gamma_1(t), \Gamma_2(\lambda t)) = t^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \beta) + o(t^2),$$

Le fait que  $f_0$  est contractante nous permet d'écrire:

$$d_v^2(\gamma_1(t), \gamma_2(\lambda t)) \ge d_m^2(\Gamma_1(t), \Gamma_2(\lambda t)),$$

en divisant par  $t^2$  et en faisant tendre t vers 0, on a:

$$-2\lambda\cos\alpha \ge -2\lambda\cos\beta$$

Ceci étant vrai pour tout  $\lambda$ , nous avons bien:

$$\alpha = \beta$$

PROPRIETE 4.3. Soit S une surface,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux arcs géodésiques passant par un point x de S. Soit de plus  $f_0$  une application contractante de S dans un espace à courbure constante  $K_0$  envoyant isométriquement nos deux arcs géodésiques sur des arcs géodésiques, la courbure de S en x est alors inférieure où égale à  $K_0$ .

Preuve: Remarquons tout d'abord que d'après le lemme précdédent l'angle entre les  $\gamma_i$  et les  $\Gamma_i = f_0(\gamma_i)$  est le même.

Munissons alors un voisinage de 0 dans l'espace tangent en x de la métrique  $d_1$  induite par l'exponentielle, et de la métrique  $d_2$  à courbure constante en coordonnées normales.

Soit  $u_1$  et  $u_2$  les vecteurs tangents aux géodésiques  $\gamma_i$ . Ces géodésiques et leurs images ayant le même angle,

$$d_1(tu_1, tu_2) = d_V(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

$$d_2(tu_1, tu_2) = d_M(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) = d_M(f_0(\gamma_1(t)), f_0(\gamma_2(t)))$$

Maintenant  $f_0$  étant contractante, la comparaison à l'ordre 3 des métriques nous donne bien l'inégalité voulue.  $\blacksquare$ 

Nous aurons également besoin par la suite pour passer du cas euclidien au cas des espaces à courbure constante, de l'existence et des propriétés des modèles projectifs:

PROPRIETE 4.4. Soit x un point d'une variété M à courbure constante  $K_0$  et de dimension p, il existe alors un réel R et un difféomorphisme G de la boule de centre x et de rayon R dans une boule de  $\mathbf{R}^p$ , qui envoie les géodésiques sur les géodésiques. De plus il existe une constante C telle que pour toute hypersurface W incluse dans le domaine de G.

- (a)  $1/Cg \le g' \le Cg$ ,
- (b)  $1/Cd\sigma \leq d\sigma' \leq Cd\sigma$ ,
- (c)  $1/C(K K_0) \le K' \le K K_0$ .

Où g,  $d\sigma$  et K (respectivement g',  $d\sigma'$  et K') désignent la métrique, l'élément d'aire et la courbure sectionnelle de W (respectivement de W' = G(W)).

On appelera un tel difféomorphisme G modèle projectif. Pour l'existence de G on se reportera par exemple à [S], pour ses propriétés à [P1], où plutôt à [G1]. Remarquons pour conclure qu'un modèle projectif envoie une hypersurface localement convexe sur une hypersurface localement convexe.

5. Comment construire des hypersurfaces convexes à partir d'une hypersurface localement convexe.

Nous allons construire au voisinage de chaque point d'une hypersurface localement convexe une hypersurface convexe, qui sera d'une certaine manière l'ouvert maximal contenant x et qui soit un graphe au dessus d'un plan.

On se donne dans tout ce paragraphe

- une hypersurface localement convexe V sans bord de  $\mathbb{R}^n$ ,
- N son champ de vecteur normal intérieur
- C un cylindre ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $C = K+]0, a[N_0, \text{ où } K \text{ est un}$  ouvert convexe borné d'un hyperplan affine  $P_0$ , et  $N_0$  le vecteur normal à  $P_0$ .

On considère ensuite une composante connexe S=S(V,C) de l'ouvert O=O(V,C) de V donné par:

$$O = \{ y \in V \cap C / \langle N(y), N_0 \rangle > 0 \}$$

On notera ensuite  $\overline{S}$  (resp.  $\overline{V}$ ) l'adhérence de S (resp. V) dans  $\mathbf{R}^n$ , ainsi que S' = S'(V, C) l'hypersurface construite à partir de S en posant  $S' = \delta ((S + \mathbf{R}^+ N_0) \cap C)$ .

Le but de ce paragraphe est d'étudier les propriétés de l'hypersurface S, et en particulier de montrer que, modulo certaines hypothèses, S est convexe. Ces propriétés nous permettrons de construire en 5.7., une hypersurface convexe au voisinage de chaque point de V.

HYPOTHESE 5.1. On dira que S vérifie l'hypothèse 5.1. si:

- (i)  $d(S, P_0) > 0$
- (ii)  $\overline{S} \cap C$  est inclus dans V.

HYPOTHESE 5.2. On dira que S vérifie l'hypothèse 5.2. si il existe un point x de S tel que:

- (i) Diam(K) + 2a < Inr(x), où Inr(x) est le rayon intérieur de V en x;
- (ii)  $xsd(P_x \cap C, P_0) > 0$ , où  $P_x$  est l'hyperplan tangent à V en x.

Nous avons alors les propriétés suivantes:

PROPRIETE 5.3. Si S vérifie 5.1., pour tout x et tout y de S il existe un arc de courbe  $\gamma$  tel que:

- (a)  $\gamma$  est tracé sur S et relie x à y.
- (b)  $\gamma$  est tracé sur un plan P parallèle à  $N_0$ , contenant x et y.

Preuve: Tout d'abord un arc de courbe vérifiant (a) et (b), vérifie également (c) et (d):

- (c) P est transverse V le long de  $\gamma$  d'après 3.3.
- (d)  $\gamma$  est une courbe plane convexe à concavité tourné vers le haut. Ceci vient de 3.2. et de ce que pour tout point z de  $\gamma$ ,  $\langle N(z), N_0 \rangle > 0$ .

# Figure 5

Démontrons la propriété à l'aide d'un argument de connexité. Soit x un point fixé de S et A l'ensemble des y de S pour lequel il existe un arc  $\gamma$  qui vérifie (a) et (b).

S étant ouvert, on déduit aisément de (c) que A est lui même ouvert.

Montrons que A est fermé dans S. Soit y un point de S limite d'une suite  $(y_n)$  de points de A, et  $(\gamma_n)$  la suite d'arcs de courbe associée à  $(y_n)$ . Puisque  $\gamma_n$  est inclus dans C qui est relativement compact, on peut extraire par le théorème d'Ascoli de la suite  $(\gamma_n)$  une sous-suite convergent vers un arc  $\gamma$  qui va joindre x à y et vérifier (b). Il reste à montrer que  $\gamma$  est tracé sur S.

Montrons d'abord que  $\gamma$  est inclus dans C. L'arc  $\gamma$  étant limite de courbes planes convexes à concavité tournée vers le haut, est lui même convexe à concavité tournée vers le haut. Il est donc inclus dans le quadrilatère du plan P délimité par les droites (fig.6):

- $\Delta_1$  passant par x et y,
- $\Delta_2$  passant par x et parallèle à  $N_0$ ,
- $\Delta_3$  passant par y et parallèle à  $N_0$ ,
- $\Delta_4$  intersection du plan P et du plan  $P_0 + \epsilon N_0$ , où  $\epsilon = d(S, P_0)$ .

#### Figure 6

Ce quadrilatère étant strictement inclus dans C, nous en déduisons que  $\gamma$  est lui même inclus dans C. D'après (ii) de 5.1.,  $\gamma$  est alors tracée sur V.

Il reste à montrer que pour tout point z de  $\gamma$ ,  $\langle N(z), N_0 \rangle > 0$ . Dans le cas contraire, il existerait un point z de  $\gamma$  tel que  $\langle N(z), N_0 \rangle = 0$ , ce qui entraînerait que le vecteur tangent à  $\gamma$  en ce point z est parallèle à  $N_0$ . L'arc  $\gamma$  étant convexe à concavité tournée vers le haut, le vecteur tangent à  $\gamma$  en x ou en y serait alors parallèle à  $N_0$ . En particulier N(x) ou N(y) serait perpendiculaire à  $N_0$ , ce qui est impossible par hypothèse.

S étant connexe nous avons S = A.

PROPRIETE 5.4. Si S vérifie 5.1., S est une hypersurface convexe, graphe d'une fonction convexe au dessus d'un ouvert convexe du plan  $P_0$ .

#### Figure 7

Preuve: soit p la projection sur le plan  $P_0$ , la proposition précédente entraîne que p(S) est convexe. Comme par ailleurs d'après la construction de S p est une immersion, il reste à montrer que p est injective. En effet, S serait le graphe d'une fonction convexe au dessus d'un ouvert convexe du plan P, et donc une hypersurface convexe. Soient x et y deux points distincts de S. D'après ce qui précède x et y peuvent être joints par une courbe plane convexe qui est un graphe au dessus de  $P_0$ , ce qui entraîne que  $p(x) \neq p(y)$ .

PROPRIETE 5.5. Si S vérifie 5.2., S vérifie 5.1..

Preuve: Remarquons que si S verifie 5.2. et est le graphe d'une fonction convexe au dessus d'un ouvert convexe du plan  $P_0$ , alors S vérifie 5.1.. En effet S étant une hypersurface convexe, (ii) de 5.2. entraı̂ne (i) de 5.1.. Ensuite un point y de S peut être joint à x par une courbe  $\gamma$  verifiant (a) et (b) de la propriété 5.3.. L'arc  $\gamma$  est alors une courbe plane convexe incluse dans un rectangle de côtés de longueur Diam(K) et 2a. Dès lors,

$$Long(\gamma) \leq Diam(K) + 2a$$
.

Or d'après (i) de 5.2.

$$Diam(K) + 2a < Inr(x),$$

En particulier S est inclus dans une boule de V de centre x et de rayon inférieur strictement à Inr(x) d'où (ii) de 5.1..

Fixons maintenant un point x de V, ainsi qu'un hyperplan  $P_0$  de vecteur normal  $N_0$  tel que  $\langle N(x), N_0 \rangle > 0$ . Soit l'ensemble E des cylindres C contenant x de la forme K+]0,  $a[N_0$  (où K est un ouvert convexe de  $P_0$ ) tel que la composante connexe de x dans O(V,C), S(V,C) vérifie 5.2.. Soit de même l'ensemble F des éléments C de E tels que S(V,C) vérifie 5.1.. Muni de la topologie induite par la

distance de  $\mathbb{R}^p$ , E est connexe par arc. Pour démontrer la propriété, il suffit donc de montrer que F est ouvert et fermé dans E.

Si C est limite de points de F, il est facile de montrer que S(V,C) est un graphe de fonction convexe au dessus d'un ouvert convexe du plan  $P_0$ . La remarque préliminaire entraı̂ne que C appartient également à F. F est donc fermé dans E.

Par ailleurs la remarque préliminaire entraı̂ne également que si S(V,C) vérifie 5.1. et 5.2.,  $\overline{S}(V,C)$  est inclus dans V. En particulier si C est un point de F, il possède un voisinage dans E dont les éléments C' vont vérifier (i) de 5.1. et  $\overline{S}(V,C')$  inclus dans V, ces deux conditions étant ouvertes. En particulier F est ouvert dans E.  $\blacksquare$ 

PROPRIETE 5.6. Si S vérifie 5.1., S' est une hypersurface convexe complète. De plus tous les points de  $S' \cap C$  sont réguliers et, dans le cas des surfaces,  $S' \cap C$  est à courbure spécifique bornée par le maximum de la courbure sur V.

Preuve: La première assertion est triviale. Pour démontrer la deuxième partie de la propriété, exhibons tout d'abord un champ N' de vecteur normal intérieur à  $S' \cap C$ :

- si x est un point de S, on pose N'(x) = N(x);
- si x est un point de  $(S' \cap C) S$ , il existe un réel positif t et un point y de  $\overline{S} \cap C$  (et donc de V d'après (i) de 5.1.) tel que  $x = y + tN_0$ . On pose alors N'(x) = N(y).

En utilisant le fait que le vecteur normal est constant le long de tout segment de droite tracé sur V, on vérifie ensuite aisément que N' est bien défini et continu.

Les points de  $S' \cap C$  sont alors réguliers. Enfin par la construction même de N', pour tout ouvert O de  $S' \cap C$ ,  $K(O) = K(O \cap S)$ . Ceci démontre la deuxième partie de l'assertion.

DEFINITIONS 5.7. Si V est une hypersurface localement convexe, x un point de V et  $\epsilon$  un réel positif tel que  $1O\epsilon < Inr(x)$ , on appellera hypersurface convexe associée à V,x et  $\epsilon$ , l'hypersurface S(V,C) contenant x et construite à partir du cylindre  $C = B(x,\epsilon)+] - \epsilon, \epsilon[N_x, \text{ où } B(x,\epsilon) \text{ est la boule de centre x et de rayon } \epsilon$  de l'hyperplan tangent à V en x, et où  $N_x$  est le vecteur normal intérieur à V en x. De même, l'hypersurface S'(V,C) sera alors appelée hypersurface convexe complète associée. S(V,C) vérifie trivialement l'hypothèse 5.2. et nos hypersurfaces méritent leurs appellations d'après les propriétés précedentes.

## 6. Lemmes préliminaires.

Nous allons dans ce paragraphe démontrer les lemmes nécéssaires à la démonstration du théorème D dans le cas où M est  $\mathbf{R}^p$ .

On se donne à partir de maintenant une suite  $(f_n)$  d'immersions localement convexes d'une variété V de dimension p-1, dans  $\mathbb{R}^p$ , telle que:

- (i) la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact vers une application  $f_0$ ;
- (ii) la suite de métriques  $(d_n)$  induites par  $(f_n)$ , est à courbure sectionnelle uniformément majorée et converge  $C^{1,1}$  vers une métrique  $d_0$ .

En particulier, il existe une fonction  $\epsilon$  continue, strictement positive et définie sur V, telle que  $10\epsilon(x) < Inr_n(x)$ , où  $Inr_n$  est le rayon intérieur de la métrique  $d_n$ 

La démonstration du théorème repose sur l'idée suivante: construire au voisinage de chaque point de V une suite d'hypersurfaces convexes associée à notre suite d'immersions et examiner la façon dont cette suite se comporte à la limite. Ce paragraphe va être consacré à la définition et à l'étude de cette suite d'hypersurfaces, ce qui nous permettra, dans le prochain paragraphe de démontrer le théorème.

Nous allons construire en fait pour tout n et tout x de V deux d'hypersurfaces convexes: la suite  $S_n(x)$  d'hypersurface convexes de  $\mathbf{R}^p$ , associées à  $f_n(V)$ ,  $f_n(x)$  et  $\epsilon(x)$ ; ainsi que la suite d'hypersurfaces convexes complètes associées,  $S'_n(x)$  (cf 5.7). On notera pour plus de commodité  $C_n(x)$  le cylindre utilisé pour les construire,  $P_n(x)$  l'hyperplan tangent à  $f_n(V)$  en  $f_n(x)$ , et  $N_n(x)$  le vecteur normal intérieur en ce point. Dans tous les cas sans ambiguïté, on ommettra le signe de la dépendance en x.

Pour étudier cette suite d'hypersurfaces nous avons besoin des définitions suivantes:

DEFINITION 6.1. Un point x de V est dit semi-régulier pour la suite  $(f_n)$  si il existe un voisinage U de x dans V, telle que

- (i)  $f_n(U)$  est une suite d'hypersurfaces convexes
- (ii) et  $f_0(x)$  est un point régulier (cf 2.4.) de l'hypersurface convexe  $f_0(U)$ .

DEFINITION 6.2. Soit  $(x_n)$  une suite de points de V convergeant vers un point x. On dira que  $(x_n)$  et  $(f_n)$  vérifie la condition (\*), si la suite  $(S'_n = S'_n(x_n))$  converge vers une hypersurface convexe complète  $S'_0$  (peut-être applatie).

Nous allons maintenant énoncer et démontrer les différents lemmes nécessaires à la démonstration du théorème.

Les deux premiers lemmes concernent les points semi-réguliers, le premier nous montre la relation entre ces points et les points réguliers, le deuxième la relation entre ces points et la condition (\*).

LEMME 6.3. Un point x est régulier si et seulement si il possède un voisinage de points semi-régulier.

Preuve: D'après 2.5. si un point possède un voisinage de points semis réguliers, il est régulier. l'implication inverse est triviale. ■

LEMME 6.4. Un point x n'est pas semi-régulier si et seulement si il existe une sous-suite  $\phi(n)$  et une suite de points  $(x_{\phi(n)})$  tendant vers x tels que

- (i)  $(x_{\phi(n)})$  et  $(f_{\phi(n)})$  vérifie la condition (\*)
- (ii)  $f_0(x)$  n'est pas un point régulier de la limite.

Preuve: Il est clair que s'il existe  $\phi(n)$  et  $(x_{\phi(n)})$  tendant vers x tels que  $(x_{\phi(n)})$  et  $(f_{\phi(n)})$  vérifie (\*), x n'est pas semi-régulier.

Il faut donc démontrer l'implication inverse, soit x un point de V telle que pour toute sous-suite  $\phi(n)$  et toute suite de points  $(x_{\phi(n)})$  tendant vers x, telle que  $S'_{\phi(n)} = S'_{\phi(n)}(x_{\phi(n)})$  converge,  $f_0(x)$  est un point régulier de la limite  $S'_0$ . Pour montrer que x est semi-régulier, il suffit de montrer qu'il possède un voisinage U tel que  $f_n(U)$  est inclus dans  $S_n(x)$  pour tout n.

Raisonnons par l'absurde: dans le cas contraire il existe une suite de points  $(y_{\psi(n)})$  tendant vers x tel que  $\langle N_{\psi(n)}(y_{\psi(n)}, N_{\psi(n)}) \rangle$  tende vers 0. D'après 2.2., on peut extraire de  $\psi(n)$  une sous-suite  $\phi(n)$  telle que  $S'_{\phi(n)}(x)$  converge vers une hypersurface convexe complète  $S'_0$  (peut-être dégénérée). Mais alors, la limite  $S'_0$  possèderait en  $f_0$  au deux hyperplans d'appui orthogonaux, et  $f_0(x)$  ne serait pas point régulier de  $S'_0$ .

Le lemme suivant nous décrit l'hypersurface limite de notre suite d'hypersurfaces convexes associées en en précisant les dégénerescences possibles. Dans ce lemme, on considérera une suite de points  $(x_n)$  de points tendant vers un point x dégénéré de V et telle que  $(x_n)$  et  $(f_n)$  vérifie la condition (\*). On notera  $S'_0$ ,  $C_0$  et  $N_0$  les limites de  $S'_n$ ,  $C_n$  et  $N_n$ . On omet ici le signe de dépendance en  $x_n$ 

LEMME 6.5. Il existe un unique sous-espace affine E de codimension 2, contenant  $f_0(x)$ , tel que la boule de E,  $B_0 = E \cap C_0$  de centre  $f_0(x)$  et de rayon  $\frac{\epsilon(x)}{10}$  soit incluse dans  $S'_0$  et ne contienne que des points limites de points diédraux.

Preuve: 1) Montrons tout d'abord: Si E un sous-espace affine de dimension 3 de  $\mathbf{R}^p$ , transverse à  $S_0'$  et parallèle à  $N_0$ , la surface convexe  $F_0 = E \cap S_0' \cap C_0$  est à courbure spécifique majorée.

Le sous-espace affine E étant transverse à  $S'_0$  et parallèle à  $N_0$ , on peut trouver une suite de sous-espaces affines  $(E_n)$  contenant  $f_n(x_n)$  et parallèle à  $N_n$ . D'après 3.2.,  $E_n$  est transverse à  $f_n(V)$  le long de la composante connexe  $F_n$  de  $f_n(x_n)$  dans  $E_n \cap f_n(V)$ . D'après 3.1., la surface  $F_n$  est alors localement convexe. La suite de surfaces  $E_n \cap S'_n$  est exactement la suite de surfaces convexes associées à  $F_n$ ,  $f_n(x_n)$  et  $\epsilon(x_n)$ .

Par ailleurs, E étant transverse à  $S'_0$ , la distance de E à un hyperplan tangent à  $E \cap S_n$  est uniformément minorée. La condition (ii) sur les  $f_n$  entraı̂ne alors que  $E \cap S_n$  est à courbure spécifique uniformément majorée.

D'après 5.6. la suite de surfaces convexes  $E_n \cap S'_n \cap C_n$  est elle-même à courbure spécifique uniformément majorée, et donc d'après 2.8.  $E \cap S'_0 \cap C_0$  est courbure spécifique majorée. En particulier, elle ne possède pas de points cônique

2) Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du lemme:

Soit E l'intersection de tous les hyperplans d'appui à  $S'_0(x)$  en  $f_0(x)$ . L'orthogonal G de E passant par  $f_0(x)$  est alors transverse à  $S'_0$  et parallèle à  $N_0$ . Par construction,  $f_0(x)$  est point conique de l'hypersurface convexe  $G \cap S'_0$ . D'après 1),  $dim(G) \leq 2$ .

Deux cas se présentent.

- a)  $\dim(G) = 2$ . Le point  $f_0(x)$  est alors dièdral, ce qui nous assure déjà l'unicité du sous-espace affine que nous recherchons. Soit D une droite quelquonque de E passant par  $f_0(x)$ . Le 3-plan F engendré par D et G est transverse à  $S'_0$  et parallèle à  $N_0$ . La surface  $F \cap S'_0 \cap C_0$  est à courbure spécifique majorée d'après 1),  $f_0(x)$  en est point dièdral d'après ce qui précède et D est l'axe du dièdre. En particulier d'après 2.9, le segment  $I = D \cap C_0$  est tracé sur  $S'_0$ . E est le sous-espace affine que nous recherchons.
- b)  $\dim(G) = 1$ . Le point  $f_0(x)$  est alors régulier. Il possède un voisinage U dans V, tel que  $f_n(U)$  est inclus dans  $S_n$ .  $f_0(U)$  est alors une hypersurface convexe à courbure sectionelle majorée. Le point x étant dégénéré,  $f_0(x)$  est nécéssairement limite de points non réguliers de  $f_0(U)$ . Le raisonnement précédent nous assure que chacun de ces points est diédraux. Par passage à la limite nous obtenons le lemme dans ce cas.

En résumé nous venons de voir que si notre suite  $S'_n$  vérifie la condition (\*) et si x est dégénéré un "pli" apparait à la limite. Il nous reste maintenant à montrer que ce "pli" provient effectivement de V par  $f_0$ , et que l'on peut le prolonger.

C'est l'objet du lemme suivant qui sera le lemme principal dans la démonstration du théorème.

LEMME 6.6. Soit x un point dégénéré. Soit  $(x_n)$  une suite de points de V tendant vers x telle que  $(x_n)$  et  $(f_n)$  vérifient (\*). Il existe une hypersurface totalement géodésique W de V telle que

- (a) W contient une boule de centre x et de rayon  $\epsilon(x)$ ,
- (b)  $f_0$  est une isométrie de W sur un ouvert convexe d'un sous-espace affine,
- (c) quelle que soit  $\phi(n)$ , aucun point de W n'est semi-régulier pour  $f_{\phi(n)}$ ,
- (d) si  $u_n$  est une suite de vecteurs tangents de V convergeant vers un vecteur tangent u à W,  $Df_n(u_n)$  converge vers  $Df_0(u)$ . En particulier  $f_n(W)$  converge  $C^1$  vers  $f_0(W)$ .

Enfin W est unique dans le sens suivant: si  $W'_n$  est une suite d'hypersurfaces de V convergeant  $C^0$  vers W' contenant x, telle que  $f_n(W_n)$  converge  $C^1$  vers un ouvert convexe d'un sous-espace affine de  $\mathbf{R}^p$ , alors le germe de W' en x est égal à celui de W.

Avant de démontrer ce lemme, il en faut un autre:

LEMME 6.7. Avec les mêmes hypothèses que le lemme précédent. Il existe une hypersurface totalement géodésique W de V telle que

- (a) W contient une boule de centre x et de rayon  $\epsilon(x)$ ,
- (b)  $f_0$  est une isométrie de W sur l'ouvert convexe d'un sous-espace affine  $B_0$  du lemme 6.5,
- (c) il existe une suite d'hypersurfaces  $W_n$  de V convergeant  $C^0$  vers W et telle que  $f_n(W_n)$  est inclus dans  $S_n$  et converge  $C^1$  vers  $B_0$ ,

Nous montrerons également que si  $W'_n$  est une suite d'hypersurfaces de V convergeant  $C^0$  vers W' contenant x, telle que  $f_n(W_n)$  converge  $C^1$  vers un ouvert convexe d'un sous-espace affine de  $\mathbf{R}^p$ , alors le germe de W' en x est égal à celui de W.

# Preuve:

Nous notons comme d'habitude  $S_0'$  la limite des surfaces convexes associées  $S_n'(x_n)$ .

1) Montrons tout d'abord la dernière partie du lemme, c'est à dire l'"unicité" de W. Nous utiliserons simplement le fait que W vérifie (a),(b) et (c). soit W' un germe d'hypersurfaces, limite  $C^0$  d'une suite  $(W'_n)$  d'hypersurfaces de V, telles que  $f_n(W'_n)$  converge  $C^1$  vers un ouvert convexe  $B_1$  d'un sousespace affine de  $\mathbf{R}^p$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que W est différent de W'.

Du fait de la convergence  $C^1$ ,  $f_O$  est une isométrie de W' sur  $B_1$ . L'hypersurface W' est donc totalement géodésique d'après 4.2.. A nouveau d'après 4.2. si W et W' sont distincts,  $B_1$  et  $B_0$  sont transverses. Leur réunion engendre donc un hyperplan affine  $P_1$ .

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage U de x tel que  $f_n(U)$  est inclus dans  $S_n = S_n(x_n)$ .  $f_0(x)$  possèdera alors un voisinage entier de points

réguliers de la surface convexe  $f_0(U)$ : L'intersection de  $P_1$  et de  $f_0(U)$ . Ceci prouvera l'absurdité à cause de 6.3..

Raisonnons encore par l'absurde: La projection de l'hypersurface convexe  $S_0$  sur  $P_0$  est d'intérieur vide. D'après 6.5  $f_0(x)$  en est point diédral et  $B_O = f_0(W)$  est parallèle à l'axe du dièdre tangent.

 $B_1 = f_0(W')$  n'est alors pas parallèle à l'axe du dièdre. Il existe donc une suite de points de  $f_n(W_n)$  n'appartenant pas à  $S_n$  et tendant vers  $f_0(x)$ . Comme par ailleurs pour n grand,  $W_n \cap W'_n$  est non vide et donc que  $f_n(W'_n) \cap S_n$ est non vide, nous en déduisons l'existence d'une suite de points  $z_n$  de  $W'_n$  tendant vers x, et tels que  $f_n(z_n)$  appartiennent à  $\delta S_n$  pour n grand. Pour n grand, l'hyperplan d'appui en ces points à l'hypersurface est parallèle au vecteur normal  $N_n$  en  $f_n(x_n)$ .

La limite de ces hyperplans nous fournit un hyperplan d'appui  $P_2$  à  $S_0$  en  $f_0(x)$ , parallèle à  $B_1 = f_0(W')$  et au vecteur  $N_0$ , vecteur limite des  $N_n$ . En particulier,  $P_2$  est transverse à  $B_0$  l'axe du dièdre tangent à  $S_0$  en x ce qui est impossible.

2) Montrons l'existence d'une suite  $W_n$  d'hypersurfaces de V telles que  $f_n(W_n)$  est incluse dans  $S_n$  et converge  $C^1$  vers  $B_0$ .

Soit  $S''_n$  une suite de surfaces convexes, incluses dans  $S_n$ , graphes au dessus d'une suite d'ouverts convexes  $U''_n$ , telle que la limite des  $S''_n$  soit tracée sur  $P_0$  et contienne vers  $B_0$ . On peut par exemple prendre une suite d'hyperplans convergant judicieusement vers  $P_0$  et pour  $S''_n$  la partie de  $S_n$  coincée entre ces hyperplans et  $P_0$ .

#### Figure 9

La limite des  $U''_n$  contient également vers  $B_0$ . On peut donc trouver une suite  $B_n$  d'ouverts de sous-espaces affines de codimension 2 inclus dans  $U''_n$  et convergant vers  $B_0$ . Soit la suite  $F_n$  des graphes au dessus de  $B_n$ .

Montrons que  $F_n$  converge  $C^1$  vers  $B_0$ . Ceci découle du fait que  $F_n$  est une suite d'hypersurfaces convexes (dans des hyperplans de  $\mathbf{R}^p$ ...) régulières convergeant vers une hypersurfaces convexes (d'un hyperplan ...) régulière  $B_0$  et 2.5..

Nous prendrons pour  $W_n$ ,  $W_n = f_n^{-1}(F_n)$ .

3) Nous allons maintenant montrer que si  $W_n$  converge  $C_0$  vers une hypersurface W, cette hypersurface est totalement géodésique et vérifie (a), (b), et (c).

Montrons tout d'abord que W contient x. Nous savons déjà que  $d_e(W_n, f_n(x_n))$  tend vers 0 (où  $d_e$  est la distance extrinsèque dans  $\mathbf{R}^p$ ). Par ailleurs, si une hypersurface S de  $\mathbf{R}^p$  est un graphe convexe alors  $d_i \leq \sqrt{2}d_e$  (où  $d_i$  est la distance intrinséque). Dans notre cas particulier  $(S = S_n)$ , nous obtenons que  $d_n(W_n, x_n) \leq \sqrt{2}d_e(f_n(W_n), f_n(x_n))$ . A la limite, d(W, x) = 0 ce qui signifie que x appartient à W.

Il reste à montrer que  $f_0$  est une isométrie de W sur  $B_O$  c'est-à-dire (b). En effet, W sera totalement géodésique d'après 4.2. (a) est alors évident et (c) est assuré par construction.

Ce dernier point est clair à cause de la convergence  $C^1$  des images.

4) Montrons que  $W_n$  converge  $C^0$ . D'après 1) et 3), il suffit en fait de montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de toute sous-suite.

Ceci se montre aisément:  $f_n(W_n)$  convergeant  $C^1$  vers  $B_0$ , on peut trouver une suite de difféomorphismes  $\sigma_n$  tendant  $C^1$  vers l'identité, et donc équicontinue, de  $B_0$  sur  $f_n(W_n)$ . Maintenant,  $f_n^{-1}o\sigma_n$  est également équicontinue et le théorème d'Ascoli nous permet de conclure.

Pour terminer la démontration du lemme 6.6, il suffit de montrer que W vérifie également les propriétés suivantes:

- (a) quelle que soit  $\phi(n)$ , tous les points de W sont dégénérés pour  $f_{\phi(n)}$ ;
- (b) si  $u_n$  est une suite de vecteurs tangents de V convergeant vers un vecteur tangent  $u \ \grave{a} \ W$ , alors  $Df_n(u_n)$  converge vers  $Df_0(u)$ .

Preuve: 1) Montrons (a).

Soient y un point de W et  $(y_n)$  une suite de point de  $(W_n)$  tendant vers y. Deux cas se présentent alors:

(i)  $f_0(x)$  n'est pas un point régulier de l'hypersurface limite. Dans ce cas il est point dièdral et  $f_n(W_n)$  tend vers l'axe du dièdre  $B_0$ . On peut alors trouver deux suites de points de V,  $(y_n^1)$  et  $(y_n^2)$  adjacentes à  $(y_n)$ , telles que  $f_n(y_n^i)$  appartiennent à  $S_n$  et les hyperplans d'appui en ces points ne convergent pas vers le même hyperplan.

En particulier, y ne pourra être régulier pour une sous-suite de  $f_{\phi(n)}$ .

(ii)  $f_0(x)$  est point régulier de l'hypersurface limite. Il est alors limite de points du type précédent et on raisonne comme en 6.5.2).b).

# 2) Montrons (b).

soit  $(u_n)$  une suite de vecteurs tangents de V, convergeant vers un vecteur tangent u à W. Notons  $y_n$  (resp. y) le pied de  $u_n$  (resp. u).

Remarquons qu'il suffit de trouver pour toute suite  $\phi(n)$ , une sous-suite  $\psi(n)$  et une une suite  $u'_{\psi(n)}$  de vecteurs tangents à  $y_{\psi(n)}$  convergeant vers u et telle que  $Df_{\psi(n)}(u'_{\psi(n)})$  converge vers  $Df_0(u)$ .

En effet  $u_{\psi(n)} - u'_{\psi(n)}$  tendra vers 0,  $Df_{\psi(n)}(u_{\psi(n)} - u'_{\psi(n)})$  également puisque  $Df_n$  est une isométrie. Nous aurons alors démontré que de toute sous-suite  $\phi(n)$  on peut extraire une sous-suite  $\psi(n)$  telle que  $Df_{\psi(n)}(u_{\psi(n)})$  tend vers  $Df_0(u)$ . On terminera enfin la démonstration du résultat par un argument de compacité.

soit  $\phi(n)$  une sous-suite, on sait d'après (a) que y est dégénéré pour  $(f_{\phi(n)})$ . On peut donc extraire une sous-suite  $\psi(n)$  de  $\phi(n)$  telle que  $(y_{\psi(n)})$  et  $(f_{\psi(n)})$  vérifient la condition (\*) (cf 6.4).

Soit W'' l'hypersurface construite à l'aide du lemme 6.7. appliqué à y, son "unicité" entraîne qu'elle est parallèle à W et que en particulier u est tangent à W''. Cette dernière hypersurface étant totalement géodésique, il existe un  $\lambda$  strictement positif tel que  $z = \exp(\lambda u)$  appartiennent à W''.

Soit également  $S_{\psi(n)} = S_{\psi(n)}(y_{\psi(n)})$  la suite de surfaces associées aux  $y_{\psi(n)}$ , et  $(W''_{\psi(n)})$  la suite d'hypersurfaces construites à l'aide du lemme 6.7. (c) convergeant vers W''.

Soit  $z_{\psi(n)}$  une suite de points de  $W''_{\psi(n)}$  convergeant vers z. Il suffit pour conclure d'exhiber une suite de courbes  $\gamma_{\psi(n)}$  joignant  $z_{\psi(n)}$  à  $y_{\psi(n)}$ 

- convergeant  $C^1$  vers la géodésique  $\gamma$  joignant z à y
- et dont l'image par  $f_{\psi(n)}$  converge  $C^1$  vers la géodésique joignant  $f_0(z)$  à  $f_0(y)$ .

On prendra en effet pour  $u'_{\psi(n)}$  la suite de vecteurs tangents à  $\gamma_{\psi(n)}$  en  $y_{\psi(n)}$ .

Soit  $\gamma'_{\psi(n)}$  la suite de courbes planes convexes joignant  $f_{\psi(n)}(z_{\psi(n)})$  à  $f_{\psi(n)}(y_{\psi(n)})$ , incluses dans  $S_{\psi(n)}$  et tracée sur un plan parallèle au vecteur normal  $N_{\psi(n)}$  en  $f_{\psi(n)}(y_{\psi(n)})$  (cf 5.3.).

Cette suite de courbes planes convexes  $\gamma'_{\psi(n)}$  converge vers le segment  $[f_0(y), f_0(z)]$  et leur vecteur tangent en  $f_{\psi(n)}(y_{\psi(n)})$  tend vers le vecteur directeur de ce segment. Ceci entraı̂ne que  $K(\gamma'_{\psi(n)})$  tend vers 0 (où K désigne l'intégrale de courbure).

Soit maintenant la suite de courbes  $\gamma_{\psi(n)} = f_{\psi(n)}^{-1}(\gamma_{\psi(n)}')$ , ce que nous venons de voir entraı̂ne que  $K(\gamma_{\psi(n)})$  tendent vers 0.

En particulier, on peut extraire de n'importe quelle sous-suite de  $\gamma_{\psi(n)}$  une sous-suite qui converge  $C^1$  ainsi que son image par  $f_{\psi(n)}$ . Enfin si la limite existe c'est une géodésique joignant x et y, c'est-à-dire  $\gamma$ . Ceci entraı̂ne que  $\gamma_{\psi(n)}$  converge  $C^1$  vers  $\gamma$  et que  $f_{\psi(n)}(\gamma_{\psi(n)})$  converge  $C^1$  vers  $f_0(\gamma)$ .

La démonstration de ce lemme est donc terminée.

## Figure 10

# 7. Démonstration des théorèmes.

Occupons nous tout d'abord du théorème D.

THEOREME D. Soit  $(f_n)$  une suite d'immersions localement convexes d'une variété V de dimension p-1, dans un espace à courbure constante et de dimension p, telle que:

- (i) la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact vers une application  $f_0$ ;
- (ii) la suite de métriques  $(d_n)$  induites par  $(f_n)$ , est à courbure sectionnelle uniformément majorée et converge  $C^{1,1}$  vers une métrique  $d_0$ .

Soit x un point dégénéré, il existe une hypersurface W de V totalement géodésique pour d, telle que

- (a)  $x \in W$  et  $\delta W$  inclus dans  $\delta V$
- (b) tous les points de W sont dégénérés;
- (c)  $f_0$  est une isométrie de W dans un sous-espace totalement géodésique de M.

De plus, il existe une sous-suite  $f_{\phi(n)}$  de  $f_n$ , telle que pour toute suite de vecteurs tangents  $u_n$  à V convergeant vers un vecteur tangent u à W,  $Df_{\phi(n)}(u_n)$  converge vers  $Df_0(u)$  (En particulier  $f_{\phi(n)}(W)$  converge  $C^1$  vers  $f_0(W)$ ).

Preuve: La démonstration se fait en trois étapes:

- 1) M est l'espace euclidien,
- 2)  $f_n(V)$  est inclus dans le domaine d'un modèle projectif,
- 3) cas général.

# 1) M est l'espace euclidien.

Soit x un point dégenéré, il existe alors une sous-suite  $\phi(n)$  telle que x et  $f_{\phi(n)}$  vérifie la condition (\*) et telle que x est un point dégénéré pour la suite  $f_{\phi(n)}$ . Pour simplifier nous supposerons que  $\phi(n) = n$ 

Le lemme 6.6 nous fournit alors une hypersurface totalement géodésique W telle que:

- (a) W contient une boule de centre x et de rayon  $\epsilon(x)$ ,
- (b)  $f_0$  est une isométrie de W sur un ouvert convexe d'un sous-espace affine,
- (c) quelle que soit  $\phi(n)$ , tous les points W sont dégénérés pour  $f_{\phi(n)}$ ;
- (d) si  $u_n$  est une suite de vecteurs tangents de V convergeant vers un vecteur tangent u à W,  $Df_n(u_n)$  converge vers  $Df_0(u)$ . En particulier  $f_n(W)$  converge  $C^1$  vers  $f_0(W)$ .

De plus si  $W'_n$  est une suite d'hypersurfaces de V convergeant  $C^0$  vers W' contenant x, telle que  $f_n(W_n)$  converge  $C^1$  vers un ouvert convexe d'un sous-espace affine, le germe de W' en x est égal à celui de W.

Considérons l'hypersurface to talement géodésique  $W^\prime$  maximale contenant W telle que:

- ( $\alpha$ )  $f_0$  est une isométrie de W sur un ouvert d'un sous-espace totalement géodésique de M,
- (β) quelle que soit φ(n), tous les points de W sont dégénérés pour  $f_{φ(n)}$ ;
- $(\gamma)$  si  $u_n$  est une suite de vecteurs tangents de V convergeant vers un vecteur tangent u à W, alors  $Df_n(u_n)$  converge vers  $Df_0(u)$ . En particulier  $f_n(W)$  converge  $C^1$  vers  $f_0(W)$ .

Pour montrer que W' est l'hypersurface que nous recherchons, il suffit de montrer que  $\delta W'$  est inclus dans  $\delta V$ . Pour cela nous montrerons que pour tout y de W',  $d(y, \delta W') \ge \epsilon(y)$ .

Soit y un point de W', il est dégénéré pour toutes les sous-suites de  $f_n$ . On peut extraire de toute sous-suite  $\phi(n)$  une sous-suite  $\psi(n)$  à laquelle on applique le lemme 6.6. Celui-ci nous fournit une hypersurface W" nécessairement parallèle à W par unicité. Cette hypersurface est alors la même pour toute les sous-suites. Ceci suffit à prouver que W" est incluse dans W. En effet dans le cas contraire, on pourrait extraire une sous-suite contradictoire.

2)  $f_n(V)$  est incluse dans le domaine d'un modèle projectif G.

Dans ce cas, on considère la sous-suite  $g_n = Gof_n$ . Le lemme 4.4 et le théorème de compacité de Gromov, nous permettent d'extraire une sous-suite que nous noterons  $f'_n$  et qui vérifiera les hypothèses du théorème dans le cas où M est  $\mathbf{R}^p$ .

Nous obtenons une hypersurface W qui vérifie les conclusions du théorème pour nos  $f'_n$ . Il est alors facile de vérifier que les conclusions sont également vérifiées pour les  $f_n$ .

3) Cas général. Il suffit de supposer que V est compacte. Pour chaque x de V on construit un modèle projectif au voisinage de  $f_0(y)$ . On recouvre par un nombre fini de ces voisinages. On recouvre également V par un nombre fini d'ouverts  $V_i$  de façon à ce que pour n grand ,  $f_n(V_i)$  soit inv-clus dans le domaine d'un des modèles projectifs définis précédemment. On applique pour chacun des  $V_i$  le théorème et on peut se débrouiller facilement pour queb le recollemnt s'opère sans problème.

Ceci termine la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant démontrer le théorème C, dont nous rappelons l'énoncé:

THEOREME C. Si  $(f_n)$  est une suite d'immersions localement convexes convergeant  $C^0$  vers une immersion strictement localement convexe (la deuxième forme fondamentale est strictement positive), alors modulo une suite de difféomorphismes  $(f_n)$  converge  $C^1$ .

Preuve: D'après 2.5., il nous suffit de montrer que pour tout compact K de V,  $f_n(K)$  est un graphe dans le voisinage tubulaire de  $f_0(V)$ . Le résultat se réduit à un résultat local, on se ramène à l'aide de modèles projectifs au cas où M est l'espace euclidien.

Soit x un point de V,  $f_0$  étant strictement localement convexe on peut trouver un voisinage U de x et un hyperplan  $P_1$  de  $\mathbf{R}^p$  qui sépare  $f_0(x)$  et  $f_0(\delta U)$ . En particulier pour n grand,  $P^1$  sépare  $f_n(x)$  et  $f_n(\delta U)$ .

Il suffit de démontrer le lemme suivant:

LEMME 7.1. Soit W une hypersurface compacte connexe et localement convexe, x un point de W et  $P^1$  un hyperplan qui sépare x et  $\delta W$ , il existe alors un voisinage U de x dans W qui soit une hypersurface convexe telle que  $\delta U$  est inclus dans  $P_1$ .

Preuve du lemme: On considère pour cela U la composante connexe de x dans  $W \setminus P_1$ . Il suffit de montrer que U est une hypersurface convexe.

Soit y un minimum de la fonction hauteur donnée par le vecteur normal à  $P_1$ . L'hyperplan tangent  $P_0$  à W en y est parallèle à  $P_1$ . Soit alors  $P_t$  la famille d'hyperplans parallèle à  $P_1$  joignant  $P_0$  à  $P_1$  et  $U_t$  la composante connexe de y dans  $U - P_t$ .

Il nous suffit de montrer que pour tout t,  $U_t$  est une hypersurface convexe. Ceci se montre par connexité: Pour t proche de O,  $U_t$  est bien une hypersurface convexe. soit  $\lambda$  le plus grand des t tel que  $U_t$  est une hypersurface convexe.

D'après 3.3.,  $P_{\lambda}$  est soit transverse le long de  $\delta U_{\lambda}$ , soit tangent.

Si  $P_{\lambda}$  est tangent,  $\delta U_{\lambda}$  est le bord d'un ouvert convexe O tracée sur  $P_{\lambda}$  et W, En particulier  $U_{lamba} \cup O$  est une hypersurface convexe complète homéomorphe à une sphère et W ne serait pas connexe.

# Figure 12

 $P_{\lambda}$  est donc transverse le long de  $\delta U_{\lambda}$ , et en particulier pour tout t proche de  $lamda, U_t$  est une hypersurface convexe. Ceci en traine que t=1.

Démontrons maintenant le théorème B:

THEOREME B. Soit  $(f_n)$  une suite d'immersions isométriques d'une surface V dans une variété M de dimension 3 à courbure constante strictement inférieure à celle de V, convergeant  $C^0$  vers  $f_0$ . Un point x de V est dégénéré si et seulement si il existe une géodésique  $\gamma$  passant par x tel que  $f_0$  est une isométrie de  $\gamma$  dans une géodésique de M. De plus

- (a) une telle géodésique est unique,
- (b) on peut la prolonger jusqu'au bord,
- (c) tous ses points sont dégénérés,
- (d) si  $(u_n)$  est une suite de vecteurs tangents tendant vers un vecteur u tangent à la géodésique, alors  $Df_n(u_n)$  tend vers  $Df_0(u)$ .

Preuve: Il est clair tout d'abord que l'existence d'une géodésique envoyée isométriquement par  $f_0$  sur une géodésique de M entraı̂ne que  $f_0$  n'est

pas une isométrie au voisinage de x et donc que x est dégénéré. Maintenant l'unicité de la géodésique associée à un point dégénéré vient de 4.3..

Par rapport au théorème D, il nous reste simplement à montrer (d). Remarquons que si un point x est dégénéré, il l'est pour n'importe quelle sous-suite de  $f_n$ , de plust  $\gamma$  étant unique en est la géodésique associée. En particulier le théorème D nous permet d'affirmer que de toute sous-suite  $\phi(n)$  on peut extraire une sous-suite  $\psi(n)$  telle que  $Df_{\psi(n)}(u_{\psi(n)})$  converge vers  $Df_0(u)$ . Par compacité cela suffit à conclure.

## Références:

- [[A]] A.D.ALEKSANDROV, Intrinsic geometry of convex surfaces, O G I Z Moscou (1948), trad. all. Akademie Verlag, Berlin (1955).
- [[B]] Yu. D. BURAGO, Isoperimetric inequalities in the theory of surfaces of bounded external curvature., Seminars in Mathematics, V.A. Steklov Math.Inst., Leningrad, vol. 10 (1970).
- [[G1]] M.GROMOV, Partial differential equations, , Springer-Verlag, Berlin (1986)
- [[G2]] M.GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemaniennes, , CEDIC, Paris (1981).
- [[L1]] F.LABOURIE, Thèse de doctorat, Université Paris VII, (1985).
- [[L2]] F.LABOURIE, Une inégalité reliant diamètre extrinsèque, inradius et intégrale de la courbure de Gauss pour les hypersurfaces localemnt convexes des espaces euclidiens, , article à paraître.
- [[Le]] A.S.LEIBIN, On the deformability of convex surfaces with a boundary, Uspehi Mat. nauk 5 (1950) no 5 (39), 145-159.
- [[P1]] A.V.POGORELOV, Extrinsic geometry of convex surfaces, , Israel program for scientific translation, Jerusalem (1973).
- [[P2]] A.V.POGORELOV, Isometric transformation of punctured convex surfaces, , Soviet Math. 2, 475-476.
  - [[S]] M.SPIVAK, A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish, Boston (1975).

Centre de mathématiques U.A. du C.N.R.S no 169 Ecole Polytechnique. 91128 Palaiseau Cedex.